# Matemáticas Aplicadas II. Curso 2009-2010. Exámenes

## 1. Matrices y determinantes

**Ejercicio 1.** *Calcular el siguiente determinante:*

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

**Solución:**

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 \\ 13 & 0 & -17 & 1 \\ 5 & 0 & -10 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

(hemos sumado a la $F_2$, $5F_1$ y a $F_3$, $3F_1$)

Desarrollando por la segunda columna:

$$= -(-1)\begin{vmatrix} 13 & -17 & 1 \\ 5 & -10 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -45$$

---

**Ejercicio 2.** *Resolver la ecuación:*

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -x & 3 & -1 \\ -x^2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

**Solución:**

Desarrollando el determinante:

$$\begin{aligned} &(-1)\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot(-x)\cdot 1 + 2\cdot(-1)(-x^2) - 2\cdot 3\cdot(-x^2) - (-1)(-1)\cdot 1 - 2(-x)\cdot 3 \\ &= -9 - 2x + 2x^2 + 6x^2 - 1 + 6x \\ &= 8x^2 + 4x - 10 \end{aligned}$$

Resolvemos la ecuación:

$$8x^2 + 4x - 10 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+320}}{16} = \frac{-4 \pm \sqrt{336}}{16}$$

---

**Ejercicio 3.** *Dada la matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

*Hallar los valores de $m$ para los que la matriz no tiene inversa. Hallar su inversa para $m = 1$.*

**Solución:**

Calculamos el determinante de la matriz:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = m^2 - m - 2$$

El determinante es cero para:

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = -1, \ x = 2$$

por consiguiente, existe la matriz inversa para $m \neq -1$ y $m \neq 2$.

Para $m = 1$, por la fórmula obtenida $|A| = -2$. Además:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{adj} A^t = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

---

**Ejercicio 4.** *Calcula $AB - BA$ siendo:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} AB - BA &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

---

**Ejercicio 5.** *Calcular el rango de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

**Solución:**

$$\operatorname{rango}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \qquad \begin{array}{l} F_2 \to F_2 + F_1 \\ F_4 \to F_4 + F_1 \end{array}$$

$$= \operatorname{rango}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 8 & 2 & 6 & 2 & 0 & 12 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} F_2 = F_3 \\ F_4 = 2F_2 \end{array}$$

$$= \operatorname{rango}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= 2$$

# 2. Segundo examen de matrices y determinantes

**Ejercicio 1.** Dadas las matrices:

$$A=\begin{bmatrix}-2&3&1&2\\0&1&0&2\\0&0&-1&3\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}-1&1&1&2\\1&1&0&2\\0&3&0&-4\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}-2&-3&4&2\\1&0&1&-1\end{bmatrix}$$

calcular $(A+B)C^t$.

**Solución:**

$$\begin{aligned}(A+B)C^t&=\left[\begin{bmatrix}-2&3&1&2\\0&1&0&2\\0&0&-1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&1&1&2\\1&1&0&2\\0&3&0&-4\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}-2&-3&4&2\\1&0&1&-1\end{bmatrix}^t\\&=\begin{bmatrix}-3&4&2&4\\1&2&0&4\\0&3&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&1\\-3&0\\4&1\\2&-1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}10&-5\\0&-3\\-15&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

---

**Ejercicio 2.** Hallar los valores de $k$ para los cuales la matriz

$$A=\begin{bmatrix}1&k&2\\k-1&1&1\\k-2&-2&-1\end{bmatrix}$$

no posee inversa. Calcular $A^{-1}$ para $k=0$.

**Solución:**

La matriz no tiene inversa cuando su determinante sea cero. Así pues, calculamos:

$$\begin{vmatrix}1&k&2\\k-1&1&1\\k-2&-2&-1\end{vmatrix}=-1-2\cdot(k-1)\cdot2+k(k-2)-2(k-2)+2-k(k-1)(-1)=2k^2-9k+9$$

Igualando a cero resulta:

$$2k^2-9k+9=0\quad\Longrightarrow\quad k=3,\ k=\frac{3}{2}$$

Para estos valores de $k$ no existe la matriz inversa.

Calculemos la inversa para $k=0$:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2\\-1&1&1\\-2&-2&-1\end{bmatrix}\quad\Longrightarrow\quad \operatorname{adj}A=\begin{bmatrix}1&-3&4\\-4&3&2\\-2&-3&1\end{bmatrix}$$

Puesto que el determinante para $k=0$ vale 9 tenemos que:

$$A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&-3&4\\-4&3&2\\-2&-3&1\end{bmatrix}^t=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&-4&-2\\-3&3&-3\\4&2&1\end{bmatrix}$$

---

**Ejercicio 3.** Calcular el rango de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -4 & -2 \\ 7 & 0 & 1 & 11 & 8 \end{bmatrix}$$

**Solución:**

$$\begin{aligned}
\text{rango } A = \text{rango } &\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -4 & -2 \\ 7 & 0 & 1 & 11 & 8 \end{bmatrix} && \text{poniendo ceros en la } 3^{\text{a}} \text{ columna} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 6 & 6 \\ 5 & 1 & 0 & 6 & 6 \\ 5 & 1 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} && F_3 = F_2 \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 6 & 6 \\ 5 & 1 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} && \text{intercambiamos } C_1 \text{ y } C_3 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 6 & 4 \end{bmatrix} && F_3 \to F_3 - F_2 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
&= 3
\end{aligned}$$

---

**Ejercicio 4.** Calcula el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$

**Solución:** Poniendo ceros en la primera fila:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -5 & 4 \\ 3 & 11 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} && \text{desarrollamos por la } 1^{\text{a}} \\
&= (-1) \begin{vmatrix} -5 & -5 & 4 \\ 11 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} \\
&= 133
\end{aligned}$$

---

**Ejercicio 5.** Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

calcular:

1. La matriz inversa de $A$.
2. La matriz $X$ que verifica la ecuación:

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

**Solución:**

El determinante de $A$ es igual a 1, de modo que la inversa de $A$ es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad X = A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -9 & 14 \end{bmatrix}$$

# 3. Examen de sistemas de ecuaciones

**Ejercicio 1.** *Estudia la compatibilidad del sistema y resuelve si es posible:*

$$\begin{aligned} 2x+3y-z &= 3 \\ -x-5y+z &= 0 \\ 3x+\ \ y-z &= 6 \end{aligned}$$

**Solución:**

Calculamos el rango de las matrices:

$$\begin{aligned} \text{rango } A = \text{rango} &\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad F_2 \rightarrow F_2+F_1,\ F_3 \rightarrow F_3-F_1 \\ = \text{rango} &\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \\ = 2 & \\ \text{rango } A^* = \text{rango} &\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{solo 2 de las 3 primeras columnas son independientes} \\ = \text{rango} &\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix} \qquad F_2 \rightarrow F_2+F_1,\ F_3 \rightarrow F_3-F_1 \\ = \text{rango} &\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ = 2 & \end{aligned}$$

El sistema es por tanto, compatible, puesto que el rango de las dos matrices es el mismo, e indeterminado puesto que el rango es menor que el número de incógnitas.

Puesto que el rango es 2, solamente hay 2 ecuaciones independientes. Elegimos por ejemplo las dos primeras:

$$\begin{aligned} 2x+3y-z &= 3 \\ -x-5y+z &= 0 \end{aligned}$$

Llamando $z=t$ y pasando esta incógnita al segundo miembre resulta:

$$\begin{aligned} 2x+3y &= 3+t \\ -x-5y &= -t \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema por la regla de Cramer se obtiene finalmente:

$$x=\frac{2t+15}{7}; \quad y=\frac{t-3}{7}; \quad z=t$$

---

**Ejercicio 2.** *En una tienda de ropa se liquidan los pantalones que han quedado sin vender en la temporada. Los hay de tres tipos:*

- *Sin defecto, todos al precio de* 20 *euros.*
- *Con defecto no apreciable, con una rebaja del* 20 % *sobre el precio de los anteriores.*

- *Con defecto apreciable, con una rebaja del 60 % sobre el precio de los que no tienen defecto.*

*Hay 70 pantalones para vender. El precio total de todos ellos es de 1280 euros y los que tienen defecto suponen el 40 % de los que no lo tienen. ¿Cuántos pantalones hay de cada clase?*

**Solución:**

Llamemos $x$ al número de pantalones de la primera clase, $y$ al número de pantalones de la segunda clase y $z$ al número de pantalones de la tercera.

Los pantalones de la primera clase valen 20 euros, los de la segunda $20 - \frac{20}{100}20 = 16$ euros y los de la tercera $20 - \frac{60}{100}20 = 8$ euros.

Con los datos planteamos el sistema:

$$\begin{aligned} x + \quad y + \ z &= 70 \\ 20x + 16y + 8z &= 1280 \\ y + \ z &= 0{,}4x \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema resulta $x = 50$, $y = 15$, $z = 5$.

---

**Ejercicio 3.** *Discute el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro a y resuélvelo en el caso $a = 2$:*

$$\begin{aligned} ax + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + ay + 4z &= 2 \\ 2x + ay + 6z &= a - 2 \end{aligned}$$

**Solución:**

Calculemos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\left(a^2 - 4\right)$$

donde hemos hecho la transformación $F_3 \to F_3 - F_2$. El determinante es cero cuando $a^2 - 4$ es cero, esto es, para $a = -2$ y $a = 2$. Pueden darse los siguientes casos:

- $a \neq -2,\ a \neq 2$. En este caso rango $A$ = rango $A^* = 3$ y el sistema es compatible determinado.
- $a = -2$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\begin{aligned} \text{rango } A^* &= \text{rango} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{bmatrix} && \text{suprimiendo una columna de la matriz } A \\ &= \text{rango} \begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} && \text{sumando la primera fila a las otras dos} \\ &= \text{rango} \begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 12 & -4 \end{bmatrix} \\ &= 3 \end{aligned}$$

y, por consiguiente, el sistema es incompatible.

- $a = 2$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango } A^* = \text{rango } \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

El sistema es compatible indeterminado puesto que el rango de las dos matrices es 2.

Vamos a resolver el sistema para $a = 2$. Puesto que el rango de las dos matrices es 2 solamente hay 2 ecuaciones independientes. El sistema se reduce a:

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + 2y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

No podemos tomar $z$ como parámetro puesto que quedaría el determinante de la matiz de coeficientes igual a cero. Tomemos $y = t$ como parámetro:

$$\begin{aligned} 2x + 6z &= -2t \\ 2x + 4z &= 2 - 2t \end{aligned}$$

Resolviendo por la regla de Cramer resulta:

$$x = 3 - t; \quad y = t; \quad z = -1$$

---

**Ejercicio 4.** *Discute y resuelve el siguiente sistema homogéneo según los valores de a:*

$$\begin{aligned} x + y + \phantom{2}z &= 0 \\ ax \phantom{+ y} + 2z &= 0 \\ 2x - y + az &= 0 \end{aligned}$$

**Solución:**

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 3 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = -\left[a(a+1) - 6\right] = -a^2 - a + 6$$

Para calcular el determinante se le ha sumado la primera fila a la tercera. El determinante es cero cuando $-a^2 - a + 6 = 0$ es decir para $a = 2$ y $a = -3$. Así, pueden presentarse los siguientes casos:

- $a \neq 2, \ a \neq -3$. El rango de la matriz de coeficientes es 3 y el sistema es compatible determinado. El sistema tiene una solución única que es la solución trivial $x = y = z = 0$.

- $a = 2$. El rango de la matriz de coeficientes es 2. Solamente hay 2 ecuaciones independientes de modo que el sistema se reduce a:

$$\begin{aligned} x + y + \phantom{2}z &= 0 \\ 2x \phantom{+ y} + 2z &= 0 \end{aligned}$$

que tiene como solución $x = -t, y = 0, z = t$.

- $a = -3$. El rango de la matriz también es 2. Como en el caso anterior solamente hay 2 ecuaciones independientes:

$$\begin{aligned} x + y + \phantom{2}z &= 0 \\ -3x \phantom{+ y} + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Haciendo $z = t$ de la segunda ecuación se deduce fácilmente que $x = \frac{2}{3}t$ y sustituyendo en la primera da $y = -\frac{5}{3}t$. Puesto que en sistema homogéneo si se multiplica una solución por un número se obtiene otra solución, multiplicando por 3, la solución general puede expresarse de una manera más simple como $x = 2t, \ y = -5t, \ z = 3t$.

---

# 4. Segundo examen de sistemas de ecuaciones

**Ejercicio 1.** *Estudiar y resolver el siguiente sistema:*

$$\begin{aligned} 3x - 2y + \phantom{3}z &= 2 \\ 2x + 5y - 3z &= 15 \\ 11x - \phantom{5}y \phantom{{}-3z} &= 21 \end{aligned}$$

**Solución:**

El determinante de la matriz de coeficientes vale:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 11 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 11 & -1 & 0 \\ 11 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (F_2 \to F_2 + 3F_1)$$

De aquí deducimos que el rango de la matriz de coeficientes es 2.

Calculamos ahora el rango de la matriz ampliada:

$$\begin{aligned} \text{rango } A = \text{rango} &\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & 15 \\ 11 & -1 & 0 & 21 \end{bmatrix} && \text{(suprimimos la segunda columna)} \\ = \text{rango} &\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 15 \\ 11 & 0 & 21 \end{bmatrix} && (F_2 \to F_2 + 3F_1) \\ = \text{rango} &\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 11 & 0 & 21 \\ 11 & 0 & 21 \end{bmatrix} \\ = 2 & \end{aligned}$$

Así pues, las dos matrices tienen el mismo rango menor que el número de incógnitas: el sistema es compatible indeterminado.

Solamente tenemos dos ecuaciones independientes. Escogemos las dos primeras y tomamos $z = t$ como parámetro de modo que el sistema queda:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + \phantom{3}z &= 2 \\ 2x + 5y - 3z &= 15 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} 3x - 2y &= 2 - t \\ 2x + 5y &= 15 + 3t \end{aligned}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-t & -2 \\ 15+3t & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{40+t}{19}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2-t \\ 2 & 15+3t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{41+11t}{19}; \qquad z = t$$

---

**Ejercicio 2.** *Discutir la compatibilidad del siguiente sistema*

$$\begin{aligned} ax + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + ay + 4z &= 2 \\ 2x + ay + 6z &= a - 2 \end{aligned}$$

*según los valores de $a$ y resolverlo para $a = 2$.*

**Solución:**

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{vmatrix} = 6a^2 + 12a + 16 - 12a - 4a^2 - 24 = 2a^2 - 8$$

El determinante se anula para $a = -2$ y $a = 2$.

Pueden presentarse los siguientes casos:

- ⋄ $a \neq -2$ y $a \neq 2$. En este caso rango $A^* =$ rango $A = 3$. El sistema es compatible determinado.
- ⋄ $a = -2$. El rango de la matriz de coeficientes es 2. El rango de la matriz ampliada es:

$$\begin{aligned} \text{rango } A^* &= \text{rango} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{bmatrix} && (C_2 = -C_1) \\ &= \text{rango} \begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} && (F_2 \to F_2 + F_1;\ F_3 \to F_3 + F_1) \\ &= \text{rango} \begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 12 & -4 \end{bmatrix} \\ &= 3 \end{aligned}$$

  En este caso, el sistema es incompatible.

- ⋄ $a = 2$. El rango de la matriz de coeficientes es 2 y el rango de la matriz ampliada:

$$\begin{aligned} \text{rango } A^* &= \text{rango} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} && (F_1 = F_3) \\ &= \text{rango} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 2 \end{aligned}$$

  El sistema es, en esta ocasión, compatible indeterminado.

Resolvamos para $a = 2$. Solamente hay dos ecuaciones independientes. Tomemos las dos primeras, no podemos escoger como parámetro la incçognita $z$ pues nos quedaría un sistema com matriz de coeficientes con determinante cero. Tomemos como parámetro $x = t$. El sistema queda:

$$\left\{ \begin{aligned} 2x + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + 2y + 4z &= 2 \end{aligned} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{aligned} 2y + 6z &= -2t \\ 2y + 4z &= 2 - 2t \end{aligned} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{aligned} y + 3z &= -t \\ y + 2z &= 1 - t \end{aligned} \right.$$

Resolviendo resulta:

$$x = t; \quad y = 3 - t; \quad z = -1$$

---

**Ejercicio 3.** *Discute y resuelve según los valores del parámetro el siguiente sistema:*

$$\begin{aligned} 3x + 3y - z &= 0 \\ 4x + 2y - az &= 0 \\ 3x + 4y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

**Solución:**

Se trata de un sistema homogéneo que será, por tanto, compatible.

El determinante de la matriz de coeficientes vale:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -a \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 3a - 46$$

El determinante se anula para $a = \frac{46}{3}$. Pueden darse los siguientes casos:

- $a \neq \frac{46}{3}$. El rango de la matriz de coeficientes es 3 igual al número de incógnitas. El sistema es compatible determinado y su única solución es la solución trivial $x = y = z = 0$.
- $a = \frac{46}{3}$. El rango de la matriz de coeficientes es 2 y el sistema es compatible indeterminado. Solamente hay dos ecuaciones independientes (por ejemplo, la primera y la tercera) de modo que el sistema es equivalente a:

  $$\begin{aligned} 3x + 3y - \phantom{6}z &= 0 \\ 3x + 4y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

  Tomando $z = t$ como parámetro:

  $$\begin{aligned} 3x + 3y &= t \\ 3x + 4y &= -6t \end{aligned}$$

  resolviendo por la regla de Cramer resulta:

  $$x = \frac{\begin{vmatrix} t & 3 \\ -6t & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{22t}{3}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & t \\ 3 & -6t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-21t}{3} = -7t; \qquad z = t$$

---

**Ejercicio 4.** *Por un helado, dos horchatas y cuatro batidos nos cobraron en una heladería* 17 *euros un día. Otro día por cuatro helados y cuatro horchatas nos cobraron* 22 *euros. Un tercer día tuvimos que pagar* 13 *euros por una horchata y cuatro batidos. Razonar si hay o no motivos para pensar que alguno de los días nos presentaron una factura incorrecta.*

**Solución:**

Llamemos $x$ al precio del helado, $y$ al precio de la horchata y $z$ al precio del batido. De los datos resulta el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y + 4z &= 17 \\ 4x + 4y \phantom{+ 4z} &= 22 \\ y + 4z &= 13 \end{aligned}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(hemos restado } F_1 \text{ a } F_3\text{)}$$

Quiere esto decir que el rango de la matriz de coeficientes es 2 puesto que el determinante de orden 3 es cero y hay menores de orden 2 en la matriz que tienen determinante distinto de cero.

El rango de la matriz ampliada es:

$$
\begin{aligned}
\text{rango } A^* &= \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 17 \\ 4 & 4 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \end{bmatrix} && \text{(suprimiendo una columna dependiente)} \\
&= \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 17 \\ 4 & 0 & 22 \\ 0 & 4 & 13 \end{bmatrix} && F_1 \to F_1 - F_3 \\
&= \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 22 \\ 0 & 4 & 13 \end{bmatrix} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Así pues, los rangos de las matrices son diferentes y el sistema es incompatible. No puede valores de los precios que satisfagan las ecuaciones y, por consiguiente, alguna de las facturas era incorrecta.

# 5. Examen de recuperación

**Ejercicio 1.** *Calcular el siguiente determinante:*

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

**Solución:**

Restando la primera columna a la última resulta:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{desarrollando por la } 4^{\text{a}} \text{ fila:}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \qquad \text{y puesto que } C_3 = C_1 + C_2\text{:}$$

$$= 0$$

---

**Ejercicio 2.** *Calcular las inversas de las siguientes matrices:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \; ; \qquad \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

**Solución:**

- ⋄ La primera matriz tiene determinante $-1$. Así pues:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

- ⋄ Para la segunda matriz:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 1 - 20 = 3$$

además

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 12 & -21 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

De forma que, trasponiendo y dividiendo por el determinante resulta:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 12 & -4 \\ -2 & -21 & 8 \end{bmatrix}$$

---

**Ejercicio 3.** *Resolver el siguiente sistema:*

$$\begin{aligned} x - \phantom{2}y + 3z &= 1 \\ 3x - \phantom{2}y + 2z &= 3 \\ - 2y + 7z &= 0 \end{aligned}$$

**Solución:**

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} = -7 - 18 + 4 + 21 = 0$$

de forma que el rango de la matriz es menor que 3. Puesto que, por ejemplo, las dos primeras columnas son independientes, el rango de la matriz de coeficientes es 2.

Calculemos el rango de la matriz ampliada:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 2$$

En el cálculo anterior, hemos suprimido la tercera columna puesto que el rango de la matriz de coeficientes es 2 y la cuarta porque es igual a la primera. Puesto que las dos matrices tienen rango 2 el sistema es compatible indeterminado.

Resolvamos el sistema. Puesto que el rango de las matrices es 2, sólo hay dos ecuaciones independientes. Nos quedamos con la segunda y la tercera:

$$\begin{aligned} 3x - \phantom{2}y + 2z &= 3 \\ - 2y + 7z &= 0 \end{aligned}$$

Tomamos como parámetro $z = t$. Pasando $z$ al segundo miembro resulta:

$$\begin{aligned} 3x - \phantom{2}y &= 3 - 2z \\ - 2y &= 0 - 7z \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema resulta:

$$x = 1 + \frac{1}{2}t$$
$$y = \frac{7}{2}t$$
$$z = t$$

---

**Ejercicio 4.** *Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro $m$:*

$$\begin{aligned} x + \phantom{m}y + \phantom{m}z &= m - 1 \\ 2x + \phantom{m}y + mz &= m \\ x + my + \phantom{m}z &= 1 \end{aligned}$$

**Solución:**

El determinante de la matriz de coeficientes vale:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + 3m - 2$$

El determinante se hace cero para:

$$-m^2+3m-2=0 \quad\Longrightarrow\quad m^2-3m+2=0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} m=1 \\ m=2 \end{cases}$$

Para estos valores de $m$ el rango de la matriz de coeficientes es menor que 3. Es fácil ver que el rango es 2. Pueden distinguirse los siguientes casos:

- ⋄ $m\neq 1, m\neq 2$ En este caso rango $A=$ rango $A^*=3$. El sistema es compatible determinado.
- ⋄ $m=1$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango } A^* = \text{rango } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{rango } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Restando la primera fila de la tercera resulta:

$$\text{rango } A^* = \text{rango } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

y, por consiguiente, el sistema es incompatible.

- ⋄ $m=2$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango } A^* = \text{rango } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{rango } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

(hemos suprimido una columna de la matriz $A$ puesto que solamente hay dos independientes) y el sistema es compatible indeterminado.

---

**Ejercicio 5.** *Discutir en función del parámetro $a$ el siguiente sistema:*

$$\begin{aligned} x+y+\phantom{a}z &= 0 \\ ax \phantom{-y}\; + 2z &= 0 \\ 2x-y+az &= 0 \end{aligned}$$

*Resolverlo para $a=1$.*

**Solución:**

Se trata de un sistema homogéneo y, por tanto, es compatible. Para decidir si es determinado o indeterminado calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} = -a^2-a-6$$

El determinante se hace cero para:

$$-a^2-a-6=0 \quad\Longrightarrow\quad a^2+a-6=0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} a=-3 \\ a=2 \end{cases}$$

Por consiguiente, puede ocurrir que:

- ⋄ $a\neq -3, a\neq 2$. En este caso rango $A=3$ y el sistema es compatible determinado.

- ⋄ $a = -3$. El rango de la matriz es 2 y el sistema es compatible indeterminado.
- ⋄ $a = 2$. Como en el cao anterior el sistema es compatible indeterminado

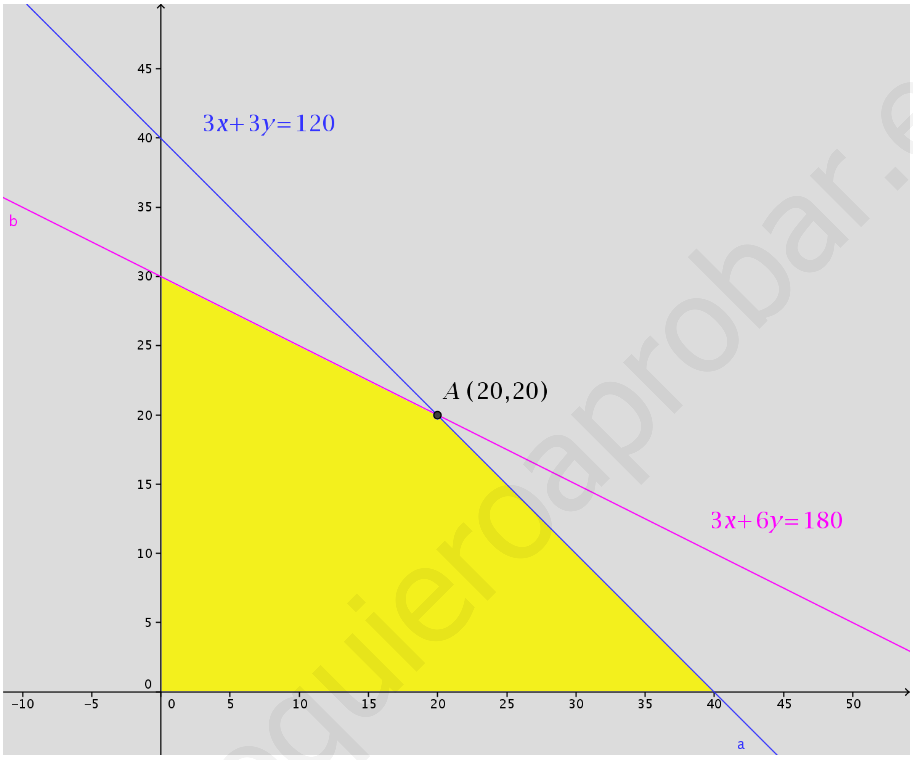
Resolvamos el sistema para $a = 1$. Según la discusión anterior, en este caso el sistema es compatible determinado. El sistema admite una única solución que será la solución trivial $x = y = z = 0$.

# 6. Programación lineal

**Ejercicio 1.** *Construye el recinto de soluciones del siguiente sistema:*

$$\begin{cases} 3x+3y & \leq & 120 \\ 3x+6y & \leq & 180 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{cases}$$

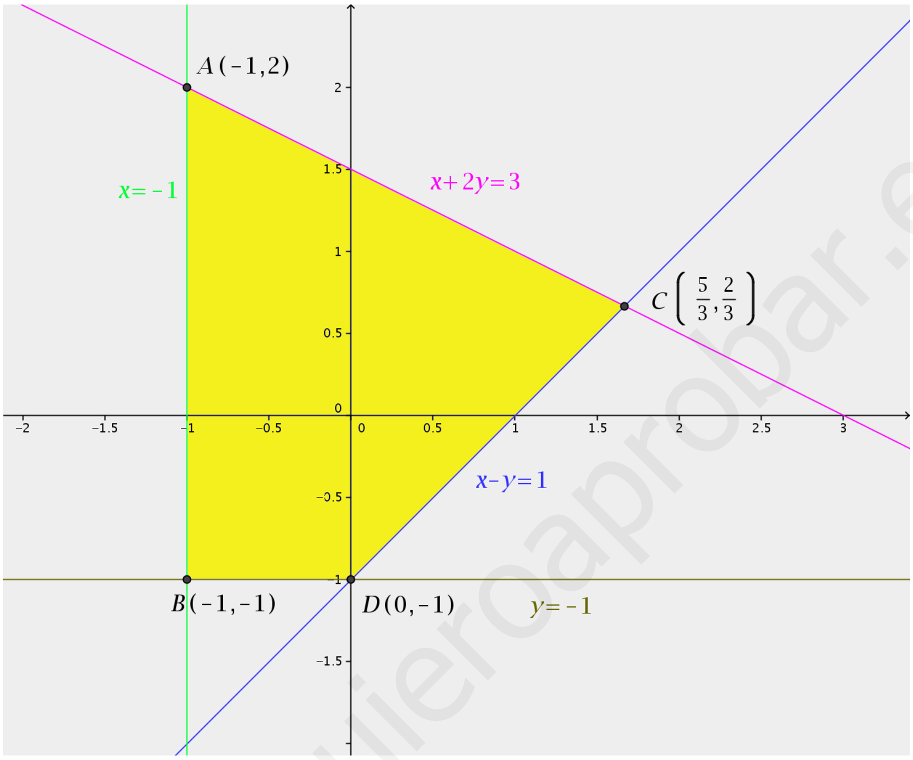
**Solución:**



**Ejercicio 2.** *Hallar el máximo y el mínimo de la función $z = x + y$, en la región determinada por:*

$$\begin{cases} x + 2y & \leq & 3 \\ x - y & \leq & 1 \\ x & \geq & -1 \\ y & \geq & -1 \end{cases}$$

**Solución:**




En la figura aparece representada la región factible. El valor de la función objetivo en cada uno de los vértices de la región es:

$$z(A) = z(-1,2) = -1 + 2 = 1$$
$$z(B) = z(-1,-1) = -1 - 1 = -2$$
$$z(C) = z\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$
$$z(D) = z(0,-1) = 0 - 1 = -1$$

El valor máximo se produce en el punto $C$ y el valor mínimo en el punto $D$.

**Ejercicio 3.** *Unos grandes almacenes desean liquidar* 200 *camisas y* 100 *pantalones de la temporada anterior. Para ello, lanzan dos ofertas A y B. La oferta A consiste en un lote de una camisa y un pantalón que se venden a* 30 *euros; la oferta B consiste en un lote de tres camisas y un pantalón, que se vende a* 50 *euros. No se desea ofrecer menos de* 20 *lotes de la oferta A ni menos de* 10 *de la oferta B.*

*¿Cuántos lotes han de vender de cada tipo para maximizar los ingresos?*

**Solución:**

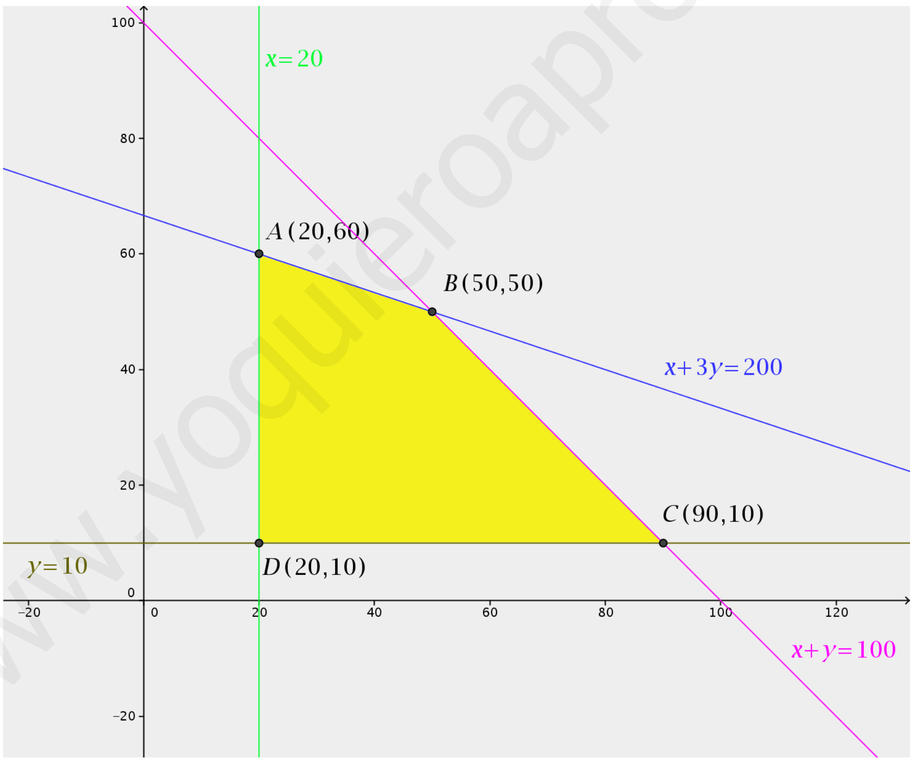
◇ Sea $x$ el número de lotes de tipo $A$ e $y$ el número de lotes de tipo $B$ que se venden. Los ingresos que se obtienen por la venta de estos lotes (la función objetivo) son:

$$F(x,y) = 30x + 50y$$

◇ Se tienen las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 200 \\ x + y \leq 100 \\ x \geq 20 \\ y \geq 10 \end{cases}$$

◇ Con estas restricciones resulta la siguiente región factible:




◇ Los valores de la función objetivo en los vértices de la región:

$$F(20,60) = 3600$$
$$F(50,50) = 4000$$
$$F(90,10) = 3200$$
$$F(20,10) = 1100$$

Los máximos ingresos se producen con la venta de 50 lotes de tipo $A$ y otros 50 de tipo $B$.

**Ejercicio 4.** *Disponemos de* 210000 *euros para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A que rinden el* 10 % *y las del tipo B que rinden el* 8 %*. Decidimos invertir un máximo de* 130000 *euros en las de tipo A y, como mínimo,* 60000 *euros en las de tipo B. Además, queremos que la inversión en las de tipo A sea menor o igual que el doble de la inversión en B.*

*¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener el máximo beneficio anual?*

**Solución:**

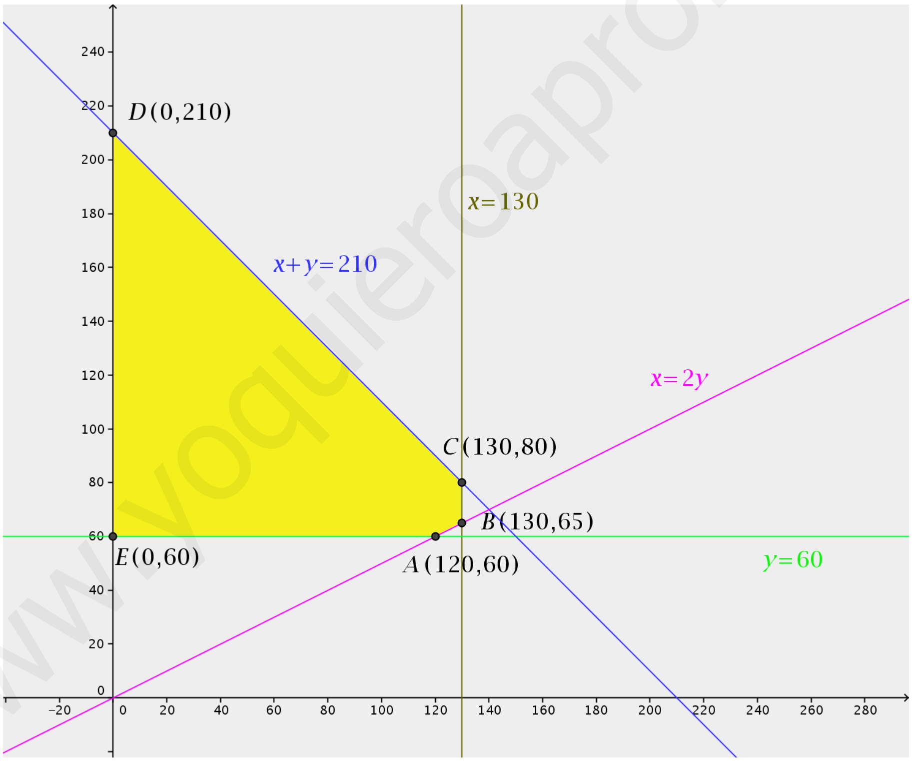
- Llamamos $x$ a la cantidad invertida en acciones del tipo $A$ e $y$ a la cantidad invertida en acciones de tipo $B$. La función objetio es el beneficio que se obtiene de la inversión que será:

  $$F(x, y) = 0{,}10x + 0{,}08y$$

- Tenemos las siguientes restricciones:

  $$\begin{cases} x + y \leq 210000 \\ x \leq 130000 \\ y \geq 60000 \\ x \leq 2y \end{cases}$$

- Con las restricciones anteriores resulta la siguiente región factible (las cantidades se han expresado en millares):




- Los valores de la función objetivo en los vértices son los siguientes:

  $$\begin{aligned} F(120000, 60000) &= 16800 \\ F(130000, 65000) &= 18200 \\ F(130000, 80000) &= 19400 \\ F(0, 210000) &= 16800 \\ F(0, 60000) &= 4800 \end{aligned}$$

  de forma que el máximo beneficio se obtiene invirtiendo 130000 euros en acciones de tipo $A$ y 80000 euros en acciones de tipo $B$.

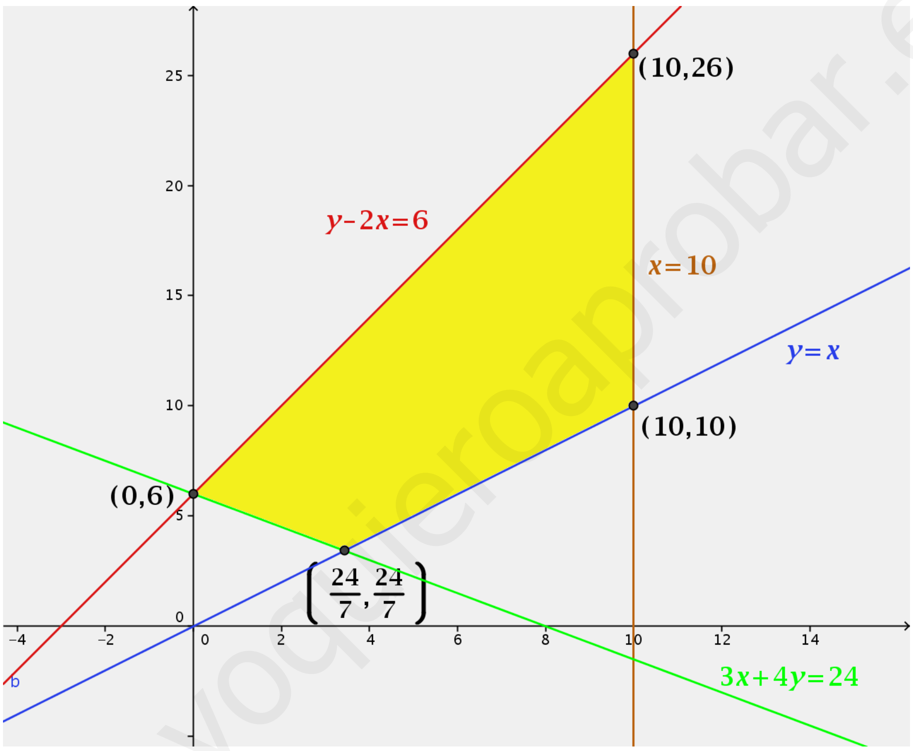
# 7. Segundo examen de programación lineal

**Ejercicio 1.** *Maximiza la función* $F(x, y) = x + y + 1$ *sujeta a las siguientes restricciones:*

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 10 \\ x \leq y \\ y - 2x \leq 6 \\ 3x + 4y \geq 24 \end{cases}$$

**Solución:**

La región factible es:




El máximo de la función $F(x, y) = x + y + 1$ se produce en el punto $(10, 26)$.

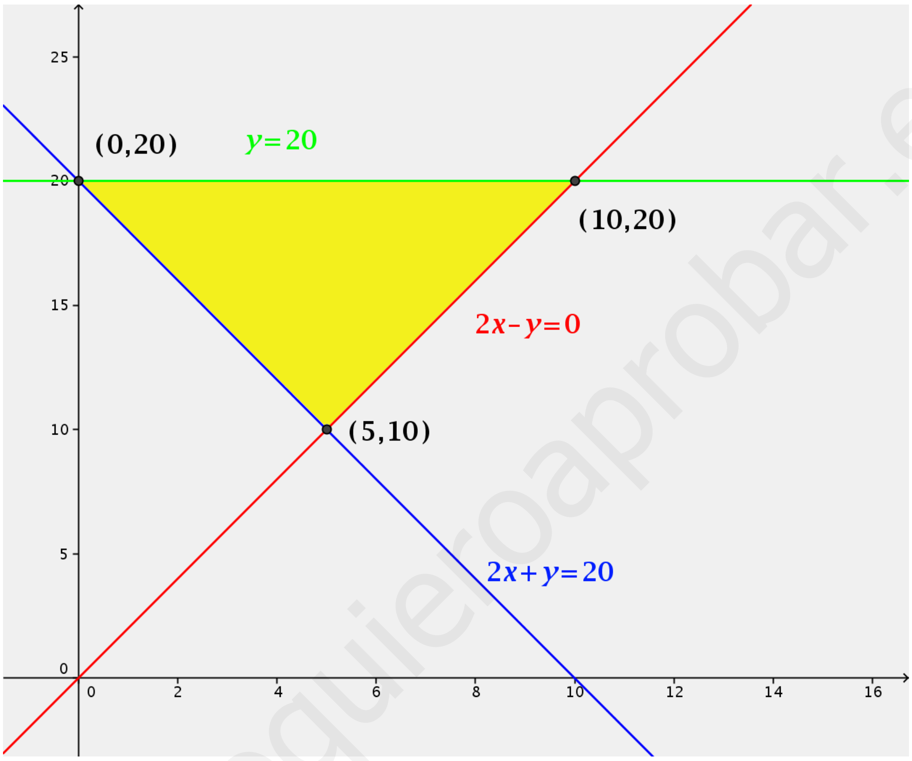
**Ejercicio 2.** *Calcula los puntos del recinto*

$$\begin{cases} 2x + y \geq 20 \\ 2x - y \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 20 \end{cases}$$

*que hacen mínima o máxima la función* $F(x, y) = 4x + 2y$*. ¿Cuántas soluciones hay para cada caso?*

**Solución:**

La región factible es:




Los valores de la función objetivo en los vértices son:

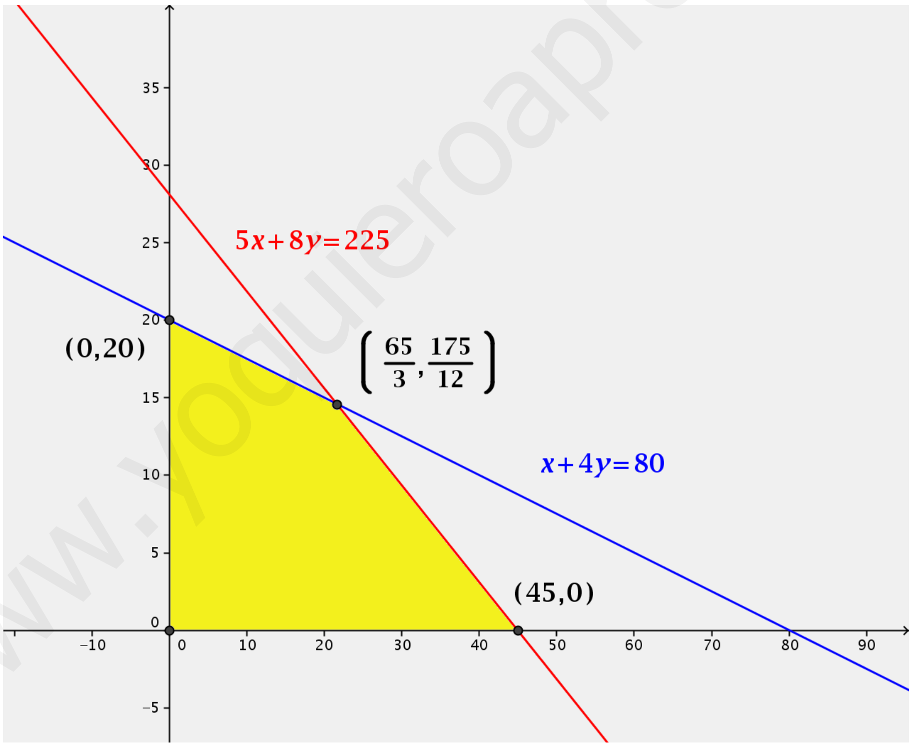
$$F(0, 20) = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 20 = 40$$
$$F(10, 20) = 4 \cdot 10 + 2 \cdot 20 = 80$$
$$F(5, 10) = 4 \cdot 5 + 2 \cdot 10 = 40$$

La función toma el valor máximo en el punto $(10, 20)$. Puesto que en los otros dos vértices la función toma valores iguales, la función toma los valores más pequeños en los puntos del segmento de extremos $(0, 20)$ y $(5, 10)$.

**Ejercicio 3.** *Una empresa fabrica láminas de aluminio de dos grosores, finas y gruesas y dispone cada mes de* 400 *Kg de aluminio y* 450 *horas de trabajo para fabricarlos. Cada* $m^2$ *de lámina fina necesita* 5 *kg de aluminio y* 10 *horas de trabajo, y deja una ganancia de* 45 *euros. Cada* $m^2$ *de lámina gruesa necesita* 20 *kg de aluminio y* 16 *horas de trabajo, y deja una ganancia de* 80 *euros. ¿Cuántos* $m^2$ *de cada tipo de lámina debe fabricar la empresa al mes para que la ganancia sea máxima y a cuánto asciende ésta?*

**Solución:**

- Sea:
  $x$: número de metros cuadrados de lámina fina
  $y$: número de metros cuadrados de lámina gruesa.
  La función objetivo es:
  $$F(x,y) = 45x + 80y$$
- Las restricciones son:
  $$\begin{cases} 5x + 20y \leq 400 \\ 10x + 16y \leq 450 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{o simplificando} \quad \begin{cases} x + 4y \leq 80 \\ 5x + 8y \leq 225 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
- Con estas restricciones, la región factible resulta ser:




- Calculamos la función objetivo en los vértices de la región:
  $$F(0,20) = 45 \cdot 0 + 80 \cdot 20 = 1600$$
  $$F\left(\frac{65}{3}, \frac{175}{12}\right) = 45 \cdot \frac{65}{3} + 80 \cdot \frac{175}{12} \simeq 2141{,}67$$
  $$F(45,0) = 45 \cdot 45 + 80 \cdot 0 = 2025$$

  De forma que los máximos ingresos se producen fabricando $65/3$ m$^2$ de lámina fina y $175/12$ m$^2$ de lámina gruesa. Los ingresos so aproximadamente de 2141,67 euros.

**Ejercicio 4.** *Un producto se compone de la mezcla de otros dos $A$ y $B$. Se tienen 500 kg de $A$ y 500 kg de $B$. En la mezcla, el peso de $B$ debe ser mayor o igual que 1,5 veces el de $A$. Para satisfacer la demanda, la producción debe ser mayor o igual que 600 kg. Sabiendo que cada kg de $A$ cuesta 5 euros y cada kg de $B$ cuesta 4 euros, calcular los kg de $A$ y $B$ que deben emplearse para obtener una mezcla de coste mínimo que cumpla los requisitos anteriores. Obtener dicho coste mínimo.*

**Solución:**

- Sea:

  $x$: número de kilos del producto $A$
  $y$: número de kilos del producto $B$.

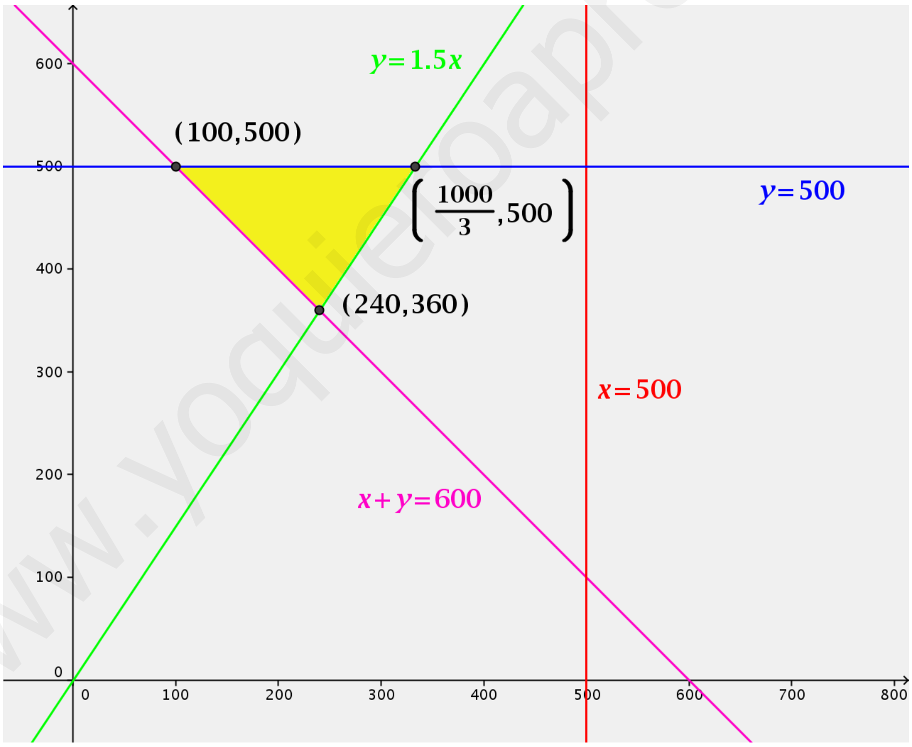
  La función objetivo es:

  $$F(x,y) = 5x + 4y$$

- Las restricciones son:

  $$\begin{cases} y \geq 1{,}5x \\ x + y \geq 600 \\ x \leq 500 \\ y \leq 500 \end{cases}$$

- La región factible es:




- Calculando los valores de la función objetivo en los vértices de la región factible:

  $$F(100,500) = 5 \cdot 100 + 4 \cdot 500 = 2500$$
  $$F\left(\frac{1000}{3}, 500\right) = \frac{5000}{3} + 2000 \simeq 3666{,}67$$
  $$F(240,360) = 5 \cdot 240 + 4 \cdot 360 = 2640$$

  de forma que el mínimo de la función se obtiene mezclando 100 kilos del producto $A$ y 500 kilos del producto $B$.

# Matemáticas Aplicadas II. Curso 2009-2010. Exámenes

## 1. Probabilidad

**Ejercicio 1**

- *Se lanza un dado dos veces. Calcular la probabilidad de que en la segunda tirada se obtenga un número mayor que en la primera.*
- *Se extraen tres cartas de una baraja de 40 cartas. Calcular la probabilidad de que las tres cartas tengan números distintos.*

**Solución:**

Los resultados posibles del experimento son:

$$\begin{aligned}&11, \mathbf{12}, \mathbf{13}, \mathbf{14}, \mathbf{15}, \mathbf{16}, 21, 22, \mathbf{23}, \mathbf{24}, \mathbf{25}, \mathbf{26}, 31, 32, 33, \mathbf{34}, \mathbf{35}, \mathbf{36}\\ &41, 42, 43, 44, \mathbf{45}, \mathbf{46}, 51, 52, 53, 54, 55, \mathbf{56}, 61, 62, 63, 64, 65, 66\end{aligned}$$

Hay 15 de los 36 resultados en los que el segundo número es mayor que el primero. La probabilidad es por tanto $\frac{15}{36}$.

Sacamos una carta. Al hacer la segunda extracción, la probabilidad de que la segunda carta sea distinta de la primera es $\frac{36}{39}$. Sacamos una tercera carta, la probabilidad de que sea distinta de las dos primeras es $\frac{32}{38}$. La probabilidad que nos piden es

$$p = \frac{36}{39} \cdot \frac{32}{38} = 0{,}7773$$

---

**Ejercicio 2.** *De los sucesos $A$ y $B$ se sabe que $p(A) = 0{,}4$, $p(B) = 0{,}5$ y $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}3$. Hallar la probabilidad $p(A \cup B)$, $p(A \cap B)$ y $p(A \cap \overline{B})$.*

**Solución:**

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}3 \quad \Longrightarrow \quad p(\overline{A \cup B}) = 0{,}3 \quad \Longrightarrow \quad p(A \cup B) = 0{,}7$$

Entonces:

$$\begin{aligned}p(A \cap B) &= p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}7 = 0{,}2\\ p(A \cap \overline{B}) &= p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2\end{aligned}$$

---

**Ejercicio 3.** *Se consideran dos sucesos $A$ y $B$ asociados a un experimento aleatorio con $p(A) = 0{,}7$, $p(B) = 0{,}6$ y $p(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}58$. ¿Son independientes $A$ y $B$?*

**Solución:**

$$p(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}58 \quad \Longrightarrow \quad p(\overline{A \cap B}) = 0{,}58 \quad \Longrightarrow \quad p(A \cap B) = 1 - 0,58 = 0,42$$

Puesto que:

$$p(A) \cdot p(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42 = p(A \cap B)$$

los sucesos son independientes.

---

**Ejercicio 4.** *Una encuesta revela que el 35 % de los habitantes de una ciudad escucha la emisora A, el 28 % la emisora B y el 10 % oye ambas emisoras. Se elige al azar uno de esos ciudadanos. Calcular la probabilidad de que escuche:*

- ◇ *Alguna de esas emisoras.*
- ◇ *Ninguna de ellas.*
- ◇ *La emisora A sabiendo que no escucha la B.*
- ◇ *Solo una de las dos.*

**Solución:**

Llamando:

$A =$ "la persona elegida escucha la emisora $A$"
$B =$ "la persona elegida escucha la emisora $B$"

tenemos que $P(A) = 0{,}35$, $p(B) = 0{,}28$ y $P(A \cap B) = 0{,}10$. Entonces tenemos:

- ◇ $p($"escucha alguna de estas emisoras"$) = p(A \cup B) = 0{,}35 + 0{,}28 - 0,10 = 0{,}53$
- ◇ $p($"no escucha ninguna de ellas"$) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - 0,53 = 0{,}47$
- ◇ $p($"escucha $A$ sabiendo que no escucha $B$"$) = p(A/\overline{B}) = \frac{p(A\cap\overline{B})}{p(\overline{B})} = \frac{0{,}35-0{,}10}{0{,}72} = 0{,}3472$
- ◇ $p($"escucha solo una de las dos"$) = p(A - B) + p(B - A) = 0{,}35 - 0{,}10 + 0{,}28 - 0{,}10 = 0{,}43$

---

**Ejercicio 5.** *En una casa hay tres llaveros A B y C, el primero con 5 llaves, el segundo con 7 y el tercero con 8, de las que solo una abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y, de él, una llave para intentar abrir el trastero.*

- ◇ *¿Cuál será la probabilidad de que se acierte con la llave?*
- ◇ *¿Cuál será la probabilidad de que el llavero elegido sea el tercero y la llave no abra?*
- ◇ *Si la llave escogida es la correcta, ¿cuál será la probabilidad de que pertenezca al llavero A?*

**Solución:**

El problema responde al siguiente esquema:

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "\frac{1}{5}"] \arrow[dr] & T \\
 & & \overline{T} \\
{} \arrow[uur, "\frac{1}{3}"'] \arrow[r, "\frac{1}{3}"'] \arrow[ddr, "\frac{1}{3}"] & B \arrow[r, "\frac{1}{7}"] \arrow[dr] & T \\
 & & \overline{T} \\
 & C \arrow[r, "\frac{1}{8}"] \arrow[dr] & T \\
 & & \overline{T}
\end{tikzcd}
$$

donde hemos llamado:

$A =$ "escoger el llavero $A$"
$B =$ "escoger el llavero $B$"
$C =$ "escoger el llavero $C$"
$T =$ "la llave abre el trastero"

Entonces:

$$
\begin{aligned}
p(T) &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}=\frac{131}{840}\\
p(C\cap\overline{T}) &= \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{24}\\
p(A/T) &= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{131}{840}}=\frac{56}{131}
\end{aligned}
$$

---

## 2. Segundo examen de probabilidad

**Ejercicio 1.** *En un experimento se sabe que* $p(A) = 0{,}5$, $p(B) = 0{,}7$ *y* $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}15$. *Calcula:*

- ◇ $p(A \cap B)$
- ◇ $p(A \cap \overline{B})$
- ◇ $p(A/B)$

**Solución:**

Si $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 0{,}15$, entonces:

$$p(A \cup B) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85 \quad \Longrightarrow \quad p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0{,}5 + 0{,}7 - 0{,}85 = 0{,}35$$

A partir de aquí:

$$p(A \cap \overline{B}) = p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}35 = 0{,}15$$

y

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0{,}35}{0{,}7} = 0{,}50$$

---

**Ejercicio 2.** *Una experiencia aleatoria consiste en lanzar tres monedas al aire. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:*

- ◇ *"obtener tres caras"*
- ◇ *"obtener dos caras y una cruz"*
- ◇ *"obtener al menos una cara"*

**Solución:**

Llamando $C$ al resultado cara y $X$ al resultado cruz, el espacio muestral es:

$$E = \{CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX\}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} p(\text{“}obtener\ tres\ caras''') &= \frac{1}{8} \\ p(\text{“}obtener\ dos\ caras\ y\ una\ cruz'') &= \frac{3}{8} \\ p(\text{“}obtener\ al\ menos\ una\ cara'') &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

---

**Ejercicio 3.** *En un experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente tres dados equilibrados se pide calcular la probabilidad de obtener:*

- ◇ *Tres unos.*
- ◇ *Al menos un dos.*
- ◇ *Tres números distintos.*
- ◇ *Una suma de diez.*

**Solución:**

La probabilidad de sacar tres unos es por la regla del producto:

$$p(\text{“}tres\ unos\text{”}) = \frac{1}{6}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

La probabilidad de no sacar ningún dos es:

$$p(\text{“}ningún\ dos\text{”}) = \frac{5}{6}\,\frac{5}{6}\,\frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

de forma que la probabilidad de sacar algún dos es:

$$p(\text{“}algún\ dos\text{”}) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

Al tirar el segundo dado, la probabilidad de obtener un número diferente que en el primer lanzamiento es $\frac{5}{6}$. Si lanzamos el tercer dado, la probabilidad de obtener un número diferente que en los dos primeros lanzamientos es $\frac{4}{6}$. Entonces:

$$p(\text{“}tres\ números\ diferentes\text{”}) = \frac{5}{6}\,\frac{4}{6} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

Una suma de 10 puede obtenerse de las siguientes maneras:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 145 | 154 | 415 | 451 | 514 | 541 |
| 136 | 163 | 316 | 361 | 613 | 631 |
| 226 | 262 | 622 | | | |
| 235 | 253 | 325 | 352 | 523 | 532 |
| 244 | 424 | 442 | | | |
| 334 | 343 | 433 | | | |

En total, 27 resultados favorables de los 216 posibles. La probabilidad de obtener suma 10 es

$$p(\text{“}suma\ diez\text{”}) = \frac{27}{216}$$

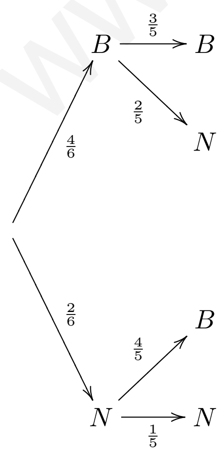
---

**Ejercicio 4.** *De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se extraen al azar, sucesivamente y sin reeemplazamiento, dos bolas.*

- ⋄ *¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean blancas?*
- ⋄ *Si la segunda bola es negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo sea?*

**Solución:**

El problema puede representarse mediante el siguiente esquema:



La probabilidad de que las dos sean blancas es:

$$p(B_1B_2) = \frac{4}{6}\frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

Si la segunda es negra:

$$p(N_1/N_2) = \frac{p(N_1 \cap N_2)}{p(N_2)} = \frac{\frac{2}{6}\frac{1}{5}}{\frac{4}{6}\frac{2}{5} + \frac{2}{6}\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$$

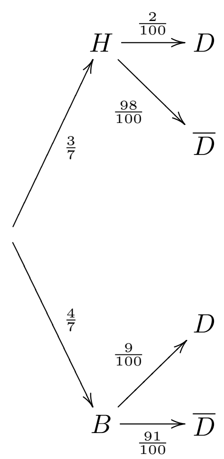
---

**Ejercicio 5.** *En una empresa se producen dos tipos de bombillas, halógenas y de bajo consumo en una proporción de 3 a 4 respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es de* 0,02*, y las de que lo sea una de bajo consumo es de* 0,09*. Se escoge una bombilla al azar:*

- ◇ *Calcular la probabilidad de que no sea defectuosa.*
- ◇ *Si la bombilla escogida resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea halógena?*

**Solución:**

En este caso el esquema es el siguiente:




La probabilidad de que la bombilla no sea defectuosa es:

$$p(\overline{D}) = \frac{3}{7}\frac{98}{100} + \frac{4}{7}\frac{91}{100} = \frac{658}{700}$$

En cuanto a la segunda cuestión:

$$p(H/\overline{D}) = \frac{p(H \cap \overline{D})}{p(\overline{D})} = \frac{\frac{3}{7}\frac{98}{100}}{\frac{658}{700}} = \frac{294}{658}$$

---

# 3. Recuperación de probabilidad

**Ejercicio 1.** *Sean $A$ y $B$ dos sucesos tales que:*

$$p(A \cup B) = \frac{3}{4}, \quad p(\overline{B}) = \frac{2}{3}, \quad p(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

*Hallar $p(B)$, $p(A)$ y $p(\overline{A} \cap B)$.*

**Solución:**

La probabilidad de $B$ se calcula fácilmente puesto que se conoce la de su contrario:

$$p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

De $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ resulta que:

$$\frac{3}{4} = p(A) + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad p(A) = \frac{2}{3}$$

y finalmente

$$p(\overline{A} \cap B) = p(B - A) = p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

---

**Ejercicio 2.** *Sean $A$ y $B$ dos sucesos de un espacio de probabilidad, de manera que $p(A) = 0{,}4$, $p(B) = 0{,}3$ y $P(A \cap B) = 0{,}1$. Calcular:*

$$p(A \cup B), \quad p(\overline{A} \cup \overline{B}), \quad p(A/B), \quad p(\overline{A} \cap \overline{B}).$$

**Solución:**

$$\begin{aligned}
p(A \cup B) &= 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}6 \\
p(\overline{A} \cup \overline{B}) &= p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9 \\
p(A/B) &= \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{1}{3} \\
p(\overline{A} \cap \overline{B}) &= p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4
\end{aligned}$$

---

**Ejercicio 3.** *En una cierta ciudad, el 40 % de la población tiene cabellos castaños, el 25 % tiene los ojos castaños y el 15 % tiene cabellos y ojos castaños. Se escoge una persona al azar:*

- *Si tiene cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ojos castaños?*
- *Si tiene ojos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga cabellos castaños?*
- *Cuál es la probabilidad de que no tenga ojos ni cabellos castaños?*

**Solución:**

Llamemos $O$ = "tener ojos castaños" y $C$ = "tener cabellos castaños":

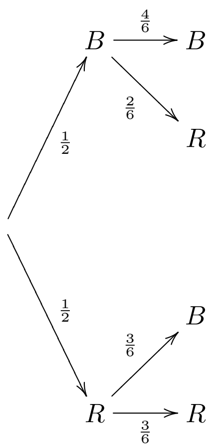
$$\begin{aligned}
p(O/C) &= \frac{p(O \cap C)}{p(C)} = \frac{0{,}15}{0{,}40} = \frac{3}{8} \\
p(C/O) &= \frac{p(O \cap C)}{p(O)} = \frac{0{,}15}{0{,}25} = \frac{3}{5} \\
p(\overline{O} \cap \overline{C}) &= p(\overline{O \cup C}) = 1 - p(O \cup C) = 1 - (0{,}40 + 0{,}25 - 0{,}15) = 0{,}50
\end{aligned}$$

---

**Ejercicio 4.** *Una caja $A$ contiene dos bolas blancas y dos rojas, y otra caja $B$ contiene tres blancas y dos rojas. Se pasa una bola de $A$ a $B$ y después se extrae una bola de $B$.*

- *Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea blanca.*
- *Si la bola extraída ha sido blanca, calcular la probabilidad de que la bola trasladada haya sido también blanca.*

**Solución:**




Del esquema anterior se deduce que:

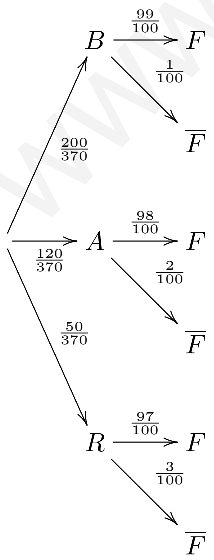
- $p(B) = \frac{1}{2}\frac{4}{6} + \frac{1}{2}\frac{3}{6} = \frac{7}{12}$
- $p(B_1/B_2) = \frac{\frac{1}{2}\frac{4}{6}}{\frac{7}{12}} = \frac{4}{7}$

---

**Ejercicio 5.** *Para la construcción de un luminoso de feria se dispone de un contenedor con* 200 *bombillas blancas,* 120 *bombillas azules y* 50 *bombillas rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es igual a* 0,01 *si la bombilla es blanca, es igual a* 0,02 *si la bombilla es azul e igual a* 0,03 *si la bombilla es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor.*

- *Calcúlese la probabilidad de que la bombilla elegida no funcione.*
- *Sabiendo que la bombilla elegida no funciona, calcúlese la probabilidad de que dicha bombilla sea azul.*

**Solución:**




En este caso resulta:

- $p(\overline{F}) = \frac{200}{370}\frac{1}{100} + \frac{120}{370}\frac{2}{100} + \frac{50}{370}\frac{3}{100} = \frac{59}{3700}$
- $p(A/\overline{F}) = \frac{\frac{120}{370}\frac{2}{100}}{\frac{59}{3700}} = \frac{24}{59}$

# 4. Estadística

**Ejercicio 1.**

- *En la distribución normal $N(0,1)$ calcula un intervalo característico del $82\,\%$.*
- *Calcula un intervalo característico del $75\,\%$ en la distribución $N(200,43)$.*

**Solución:**

- $p(-z_p < z < z_p) = 0{,}82 \quad \Longrightarrow \quad p(z < z_p) = 0{,}91 \quad \Longrightarrow \quad z_p = 1{,}34$
- Calculamos en primer lugar el intervalo característico en $N(0,1)$:

$$p(-z_p < z < z_p) = 0{,}75 \quad \Longrightarrow \quad p(z < z_p) = 0{,}875 \quad \Longrightarrow \quad z_p = 1{,}15$$

Los extremos del intervalo en $N(200,43)$ son

$$200 - 1{,}15 \cdot 43 = 150{,}55; \quad 200 + 1{,}15 \cdot 43 = 249{,}45$$

El intervalo característico es $(150{,}55; 249{,}45)$.

---

**Ejercicio 2.** *La cantidad de café depositada en cada bolsa por una máquina envasadora sigue una distribución normal con media $\mu = 1040$ gramos y desviación típica $50$ gramos:*

- *Calcula la probabilidad de que un paquete escogido al azar pese más de un kilo.*
- *Calcula $x_0$ sabiendo que el $97{,}5\,\%$ de los paquetes pesan menos de $x_0$ gramos.*
- *Calcula el tanto por ciento de paquetes cuyo contenido tiene un peso comprendido entre $950$ y $1050$ gramos.*

**Solución:**

- $p(x > 1000) = p(z > \dfrac{1000-1040}{50}) = p(z > -0{,}8) = p(z < 0{,}8) = 0{,}7881$
- $p(z < z_0) = 0{,}975 \quad \Longrightarrow \quad z_0 = 1{,}96 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = 1040 + 1{,}96 \cdot 50 = 1138$
- $p(950 < x < 1050) = p(-1{,}8 < z < 0{,}2) = p(z < 0{,}2) - p(z < -1{,}8) = 0{,}5434$

---

**Ejercicio 3.** *El tiempo en minutos dedicado cada día a escuchar música por los estudiantes de secundaria de una cierta ciudad se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a $15$ minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de $10$ estudiantes y se obtienen los siguientes tiempos (en minutos):*

$$91;\ 68;\ 39;\ 82;\ 55;\ 70;\ 72;\ 62;\ 54;\ 67$$

- *Determínese un intervalo de confianza al $90\,\%$ para el tiempo medio diario dedicado a escuchar música por un estudiante.*
- *Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para conseguir una estimación de la media del tiempo diario dedicado a escuchar música con un error menor que 5 minutos, con un nivel de confianza del $95\,\%$.*

**Solución:**

La media muestral es $\overline{x} = 66$. Para el nivel de confianza $c = 0{,}90$, $z_c = 1{,}645$. El intervalo de confianza tiene como extremos:

$$66 - \frac{1{,}645 \cdot 15}{\sqrt{10}} = 58{,}20$$

$$66 + \frac{1{,}645 \cdot 15}{\sqrt{10}} = 73{,}80$$

El intervalo es (58,20; 73,80).

Para $c = 0{,}95$, $z_c = 1{,}96$. Si el error debe ser menor de 5 se cumple que:

$$\frac{1{,}96 \cdot 15}{\sqrt{n}} < 5 \quad \Longrightarrow \quad n > \left(\frac{1{,}96 \cdot 15}{5}\right)^2 = 34{,}57$$

y el tamaño muestral mínimo es $n_{min} = 35$

---

**Ejercicio 4.** *La edad a la que contraen matrimonio los hombres de la Isla Barataria es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media 35 años y desviación típica 5 años. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 hombres de dicha isla. Sea $\overline{X}$ la media muestral de la edad de casamiento.*

- *¿Cuáles son la media y la varianza de $\overline{X}$?*
- *¿Cuál es la probabilidad de que la edad media de casamiento de la muestra esté comprendida entre 36 y 37 años?*

**Solución:**

La distribución de medias muestrales tiene el mismo valor medio que la población, es decir, 35 y desviación típica:

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{100}} = 0{,}5$$

Por tanto, la varianza es $s^2 = 0{,}25$.

La probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 36 y 37 la calculamos a partir de la distribución $N(35; 0{,}5)$:

$$p(36 < \overline{x} < 37) = p\left(\frac{36-35}{0{,}5} < z < \frac{37-35}{0{,}5}\right) = p(2 < z < 4) = 0{,}0228$$

---

**Ejercicio 5.** *El rendimiento por hectárea de las plantaciones de trigo en una cierta región, se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a* 1 *tonelada por hectárea. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de* 64 *parcelas con una superficie igual a 1 hectárea cada una, obteniéndose un rendimiento medio de* 6 *toneladas.*

- *¿Puede asegurarse que el error de estimación del rendimiento medio por hectárea es menor que* 0,5 *toneladas, con un nivel de confianza del* 98 %*? Razónese.*
- *¿Qué tamaño muestral mínimo ha de tomarse para que el error en la estimación sea menor que* 0,5 *toneladas con un nivel de confianza del* 95 %*?*

**Solución:**

Con un nivel de confianza $c = 0{,}98$ resulta $z_c = 2{,}33$. El error en la estimación es:

$$E = \frac{z_c \sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}33 \cdot 1}{8} = 0{,}291$$

que es menor que 0,5.

Si el nivel de confianza es $c = 0{,}95$ resulta que $z_c = 1{,}96$ y el tamaño de la muestra debe cumplir que:

$$\frac{1{,}96 \cdot 1}{\sqrt{n}} < 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad n > \left(\frac{1{,}96 \cdot 1}{0{,}5}\right)^2 = 15{,}37$$

con lo que el tamaño mínimo de la muestra debe ser $n_{min} = 16$

---

# 5. Segundo examen de estadística

**Ejercicio 1.**

- *En una distribución normal $N(0,1)$ calcula $p(-1{,}25 < z < 2{,}4)$.*
- *En la distribución $N(32,5)$ calcula un intervalo característico del 84 %.*

**Solución:**

$$p(-1{,}25 < z < 2{,}4) = p(z < 2{,}4) - p(z < -1{,}25) = p(z < 2{,}4) - p(z > 1{,}25) = 0{,}9918 - 0{,}4013 = 0{,}5905$$

El intervalo característico tiene la forma $(\mu - z_p\sigma, \mu + z_p\sigma)$. Calculamos el valor de $z_p$:

$$p(-z_p < z < z_p) = 0{,}84 \quad\Longrightarrow\quad p(z < z_p) = 0{,}92 \quad\Longrightarrow\quad z_p = 1{,}41$$

Los extremos del intervalo son $32 \pm 1{,}41 \cdot 5$. El intervalo característico resulta ser $(24{,}95; 39{,}05)$.

---

**Ejercicio 2.** *En una muestra aleatoria de 256 individuos se ha obtenido una edad media de 17,4 años. Se sabe que la desviación típica de la población de la que procede esa muestra es de 2 años.*

- *Obtenga un intervalo de confianza al 95 % para la edad media de la población.*
- *¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el correspondiente intervalo de confianza, al 90 %, tenga de amplitud a lo sumo 0,5?*

**Solución:**

- Para un nivel de confianza $c = 0{,}95$, $z_c = 1{,}96$. Los extremos del intervalo de confianza son:

  $$17{,}4 \pm \frac{1{,}96 \cdot 2}{16}$$

  y el intervlo es $(17{,}16; 17,65)$.

- Si $c = 0{,}90$, $z_c = 1{,}645$. Si la amplitud del intervalo de confianza es a lo sumo de 0,5, el error en la estimación debe ser menor que 0,25. Por consiguiente:

  $$\frac{1{,}645 \cdot 2}{\sqrt{n}} < 0{,}25 \quad\Longrightarrow\quad n > \left(\frac{1{,}645 \cdot 2}{0{,}25}\right)^2 = 173{,}19 \quad\Longrightarrow\quad n_{min} = 174$$

---

**Ejercicio 3.** *El precio de ciertos electrodomésticos puede considerarse una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 100 euros.Los precios en euros correspondientes a una muestra de 9 de estos electrodomésticos son:*

255, 85, 120, 290, 80, 80, 275, 290, 135

- *Construir un intervalo de confianza al 98 % para la media poblacional.*
- *Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra, para que con un nivel de confianza del 99 %, el error de estimación del precio medio no supere los 50 euros.*

**Solución:**

- Para un nivel de confianza $c = 0{,}98$:

  $$p(-z_c < z < z_c) = 0{,}98 \quad\Longrightarrow\quad p(z < z_c) = 0{,}99 \quad\Longrightarrow\quad z_c = 2{,}33$$

  El intervalo de confianza tiene por extremos:

  $$178{,}89 \pm \frac{2{,}33 \cdot 100}{3}$$

  y el intervalo resulta ser $(101{,}22; 256{,}56)$.

- ◇ Si $c = 0{,}99$, $z_c = 2{,}575$. Si queremos que el error en la estimación sea menor que 50, debe verificarse que:

$$\frac{2{,}575 \cdot 100}{\sqrt{n}} < 50 \quad \Longrightarrow \quad n > \left(\frac{2{,}575 \cdot 100}{50}\right)^2 = 26{,}52 \quad \Longrightarrow \quad n_{min} = 27$$

---

**Ejercicio 4.** *Se ha medido la talla de* 100 *personas elegidas al azar, mediante muestreo aleatorio simple, de entre los estudiantes varones de bachillerato de una gran ciudad, obteniéndose una talla media de* 1,75 *m. Se sabe que la desviación típica de la población es* 0,2 *m.*

- ◇ *Halle un intervalo de confianza, al* 90 %*, para la media poblacional de la talla de los estudiantes.*
- ◇ *¿Con qué nivel de confianza se ha construido el intervalo* $(1{,}73; 1{,}77)$ *para la media poblacional?*

**Solución:**

- ◇ En este caso $c = 0{,}90$ y $z_c = 1{,}645$, con lo que los extremos del intervalo son:

$$1{,}75 \pm \frac{1{,}645 \cdot 0{,}2}{10}$$

y el intervalo es $(1{,}72; 1{,}78)$.

- ◇ El error en la estimación es la mitad de la longitud del intervalo de confianza:

$$E = \frac{1{,}77 - 1{,}73}{2} = 0{,}02$$

Entonces:

$$0{,}02 = \frac{z_c \cdot 0{,}2}{\sqrt{100}} \quad \Longrightarrow \quad z_c = 1$$

Y el nivel de confianza es:

$$c = p(-1 < z < 1) = p(z < 1) - p(z < -1) = 0{,}8413 - 0{,}1587 = 0{,}6826 = 68{,}26\,\%$$

---

**Ejercicio 5.** *Se sabe que los estudiantes de una provincia duermen un número de horas diarias que se distribuye según una ley Normal de media* $\mu$ *horas y desviación típica* $\sigma = 2$ *horas.*

- ◇ *A partir de una muestra de* 64 *alumnos se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza* $(7{,}26; 8{,}14)$ *para la media de la población. Determine el nivel de confianza con que se ha construido dicho intervalo.*
- ◇ *Determine el tamaño muestral mínimo necesario para que el error que se cometa al estimar la media de la población por un intervalo de confianza sea, como máximo, de* 0,75 *horas, con un nivel de confianza del* 98 %*.*

**Solución:**

- ◇ Como en el problema anterior, el error en la estimación es la mitad de la longitud del intervalo de confianza:

$$E = \frac{8{,}14 - 7{,}26}{2} = 0{,}44$$

Entonces:

$$0{,}44 = \frac{z_c \cdot 2}{8} \quad \Longrightarrow \quad z_c = 1{,}76 \quad \Longrightarrow \quad c = p(-1{,}76 < z < 1{,}76) = 0{,}9216 = 92{,}16\,\%$$

- ◇ Si $c = 0{,}98$, $z_c = 2{,}33$. Si el error en la estimación debe ser menor de 0,75, debe cumplirse que:

$$\frac{2{,}33 \cdot 2}{\sqrt{n}} < 0{,}75 \quad \Longrightarrow \quad n > \left(\frac{2{,}33 \cdot 2}{0{,}75}\right)^2 = 38{,}61 \quad \Longrightarrow \quad n_{min} = 39$$

---

# 6. Derivadas

**Ejercicio 1.** *Derivar las siguientes funciones:*

1. $y = 4x^2 - 3x + 2$
2. $y = (3x+1)^2$
3. $y = (3x^2 - 2x + 5)^2$
4. $y = \sqrt{3x+1}$
5. $y = (3x+1) \cdot (x^2 - 6x + 3)$
6. $y = \dfrac{3x^2}{4}$
7. $y = \dfrac{3x^4 + 2x - 1}{3x^2 - 1}$
8. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
9. $y = \dfrac{1}{x}$
10. $y = \sqrt[3]{x^2}$

**Solución:**

$$
\begin{array}{ll}
y = 4x^2 - 3x + 2 & y' = 8x - 3 \\
y = (3x+1)^2 & y' = 2 \cdot (3x+1) \cdot 3 \\
y = (3x^2 - 2x + 5)^2 & y' = 2 \cdot (3x^2 - 2x + 5) \cdot (6x - 2) \\
y = \sqrt{3x+1} & y' = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}} \\
y = (3x+1) \cdot (x^2 - 6x + 3) & y' = 3 \cdot (x^2 - 6x + 3) + (2x - 6) \cdot (3x+1) \\
y = \dfrac{3x^2}{4} & y' = \dfrac{6x}{4} \\
y = \dfrac{3x^4 + 2x - 1}{3x^2 - 1} & y' = \dfrac{(12x^3 + 2)(3x^2 - 1) - 6x \cdot (3x^4 + 2x - 1)}{(3x^2 - 1)^2} \\
y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} & y' = -\dfrac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}} \\
y = \dfrac{1}{x} & y' = \dfrac{-1}{x^2} \\
y = \sqrt[3]{x^2} & y' = \dfrac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}
\end{array}
$$

---

**Ejercicio 2.** *Calcular los puntos de intersección de la parábola $y = 2x^2 - 5x + 1$ y la recta $y = -x - 1$. Representar gráficamente la parábola.*

**Solución:**

Las coordenadas de los puntos de intersección son las soluciones del sistema

$$
\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1 \\ y = -x - 1 \end{cases} \implies 2x^2 - 5x + 1 = -x - 1 \implies 2x^2 - 4x + 2 = 0 \implies x^2 - 2x + 1 = 0
$$

Esta ecuación tiene una únic solución $x = 1$ a la que corresponde el valor $y = 2$. Así pues el punto de intersección de la parábola y la recta es $(1, -2)$.

---

**Ejercicio 3.** *Hallar los puntos de tangente horizontal de la curva $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$.*

**Solución:**

En los puntos de tangente horizontal la derivada es cero. Igualando a cero la derivada resulta:

$$
y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \implies x^2 - 2x - 3 = 0 \implies x_1 = -1, \quad x_2 = 3
$$

Calculamos la ordenada sustituyendo estos valores en la ecuación de la curva y obtenemos los puntos $(-1, 4)$ y $(3, -28)$.

---

**Ejercicio 4.** *Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva* $y = x^2 - 5x + 6$ *en el punto de abscisa* $x = 2$.

**Solución:**

Calculamos en primer lugar la ordenada del punto de tangencia:

$$y_0 = y(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$$

Así pues la tangente pasa por el punto $(2, 0)$.

La pendiente de la tangente es la derivada en el punto de abscisa 2, es decir:

$$y' = 2x - 5 \quad \Longrightarrow \quad m = y'(2) = -1$$

La ecuación de la tangente es:

$$y = -1 \cdot (x - 2)$$

---

**Ejercicio 5.** *Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva* $y = 4 - x^2$ *en los puntos de corte con el eje de abscisas.*

**Solución:**

Los puntos de corte con el eje de abscisas son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

que son los puntos $A(-2, 0)$ y $B(2, 0)$.

Teniendo en cuenta que $y' = -2x$, la pendiente de las tangentes en estos puntos es:

$$\begin{cases} m_1 = y'(-2) = 4 \\ m_2 = y'(2) = -4 \end{cases}$$

Las ecuaciones de las tangentes son:

$$y = 4 \cdot (x + 2); \qquad y = -4 \cdot (x - 2)$$

---

**Ejercicio 6.** *¿En qué puntos la recta tangente a* $y = x^3 - 4x$ *tiene la pendiente igual a 8?*

**Solución:** Calcular los puntos de intersección de la parábola $y = 2x^2 - 5x + 1$ y la recta $y = -x - 1$. Representar gráficamente la parábola. Igualamos la derivada a 8 y resulta:

$$y' = 3x^2 - 4 = 8 \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 = 12 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -2,\ x_2 = 2$$

Las ordenadas de la curva para estos valores son:

$$\begin{cases} y(-2) = -8 + 8 = 0 \\ y(2) = 8 - 8 = 0 \end{cases}$$

Los puntos son $A(-2, 0)$ y $B(2, 0)$.

**Ejercicio 7.** *Representar gráficamente la curva* $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$ *calculando sus máximos mínimos y puntos de inflexión.*

**Solución:**

**Ejercicio 8.** *Se considera la función:*

$$y = \frac{x}{x^2 + 5x + 4}$$

*Calcular:*

- ⋄ *(1 punto) Intersecciones con los ejes y asíntotas.*
- ⋄ *(0,75 puntos)Intervalos de crecimiento y decrecimiento.*
- ⋄ *(0,75 puntos) Representación gráfica.*

**Solución:**

# 7. Integrales

**Ejercicio 1.** *Calcular las siguientes integrales:*

1. $\displaystyle\int (5x^2 - 6x - 2)\, dx$
2. $\displaystyle\int \sqrt{x}\, dx$
3. $\displaystyle\int (4x+1)^3\, dx$
4. $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{x-5}}\, dx$

**Solución:**

$\diamond$ $\displaystyle\int (5x^2 - 6x - 2)\, dx = \frac{5x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} - 2x + C = \frac{5x^3}{3} - 3x^2 - 2x + C$

$\diamond$ $\displaystyle\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$

$\diamond$ $\displaystyle\int (4x+1)^3\, dx = \frac{(4x+1)^4}{4} \cdot \frac{1}{4} + C$

$\diamond$ $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{x-5}}\, dx = 3\int (x-5)^{-\frac{1}{2}}\, dx = 3 \cdot \frac{(x-5)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 6\sqrt{x-5} + C$

---

**Ejercicio 2.** *Calcular las siguientes integrales definidas:*

1. $\displaystyle\int_{-1}^{2} (x^2 - 2x + 3)\, dx$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{3} \sqrt{x+1}\, dx$

**Solución:**

$\diamond$ $\displaystyle\int_{-1}^{2} (x^2 - 2x + 3)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{8}{3} - 4 + 6\right) - \left(-\frac{1}{3} - 1 - 3\right) = 9$

$\diamond$ $\displaystyle\int_{-1}^{3} \sqrt{x+1}\, dx = \left[\frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3}\right]_{-1}^{3} = \frac{16}{3}$

---

**Ejercicio 3.** *Representar gráficamente la parábola $y = 3x^2 - x + 1$ y calcular el área comprendida entre esa curva, el eje $X$ y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.*

**Solución:**

La parábola tiene como vértice el punto:

$$x_0 = \frac{1}{6}; \qquad y_0 = \frac{3}{36} - \frac{1}{6} + 1 = \frac{11}{12} \qquad \Longrightarrow \qquad V\left(\frac{1}{6}, \frac{11}{12}\right)$$

No tiene puntos de corte con el eje $X$ pues el sistema

$$\begin{cases} y = 3x^2 - x + 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

no tiene solución. La intersección con el eje $Y$ es $(0, 1)$.

La representación gráfica aparece en la figura 1. Puesto que la curva no corta al eje $X$, el área puede calcularse mediante la integral:

$$S = \int_0^4 (3x^2 - x + 1)\, dx = \left[\frac{3x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^4 = (64 - 8 + 4) - 0 = 60$$

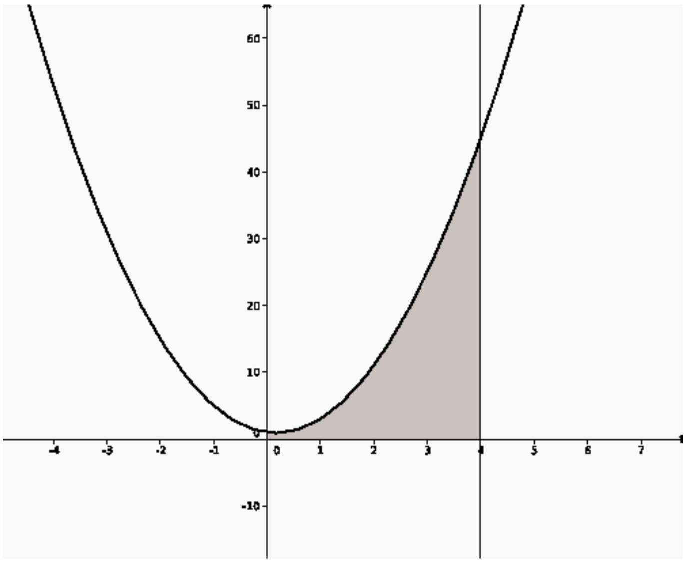



Figura 1: Ejercicio 3

---

**Ejercicio 4.** *Se considera el recinto limitado por la parábola $y = x^2 + x - 2$, el eje $X$ y las rectas $x = -1$ y $x = 4$. Representarlo gráficamente y calcular su área.*

**Solución:**

La parábola tiene como vértice el puntos

$$x_0 = \frac{-1}{2}; \qquad y_0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{4}$$

y corta al eje $X$ en los puntos

$$\begin{cases} y = x^2 + x - 2 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad x_1 = -2, \ x_2 = 1$$

La representación gráfica puede verse en la figura 2. Puesto que la curva corta al eje de abscisas, para calcular el área de la zona sombreada es preciso calcular dos integrales:

$$\int_{-1}^{1} (x^2 + x - 2)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2\right) = -\frac{10}{3}$$
$$\int_{1}^{4} (x^2 + x - 2)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{1}^{4} = \left(\frac{64}{3} + 8 - 8\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{45}{2}$$

de modo que el área total es:

$$S = \frac{10}{3} + \frac{45}{2} = \frac{155}{6}$$

---

**Ejercicio 5.** *Calcular el área comprendida entre las curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 2x$.*

**Solución:**

Calculamos en primer lugar los puntos de intersección de las curvas, es decir, resolvemos el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 2x \end{cases}$$

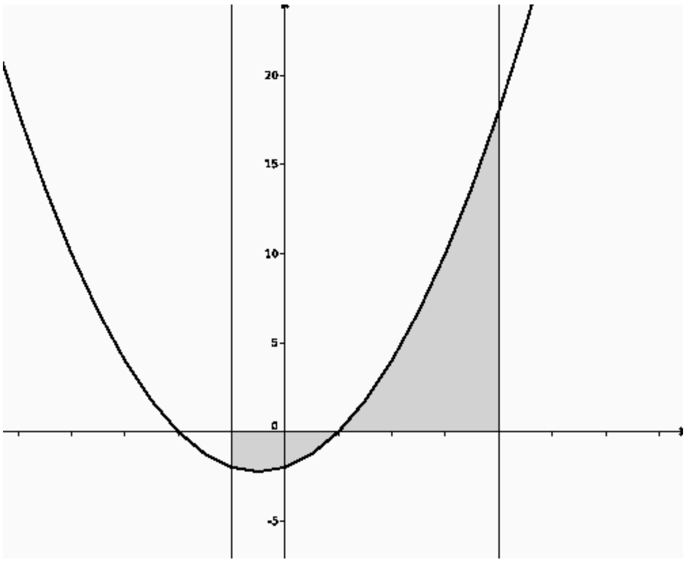



Figura 2: Ejercicio 4

Las soluciones de este sistema (para la incógnita $x$) son $x = 0$ y $x = 1$.

Calculamos la integral de la diferencia de las dos funciones:

$$\int_0^1 (2x^2 - 2x)\, dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

y, por consiguiente, la superficie es igual a $\frac{1}{3}$.

---

**Ejercicio 6.** *Calcula el área limitada por la curva $y = x^3 - 2x^2 + x$ y la recta tangente a ella en el origen de coordenadas.*

**Solución:**

Calculamos la ecuación de la recta tangente. La derivada de la función es

$$y' = 3x^2 - 4x + 1$$

La pendiente de la recta tangente es la derivada en el punto de abscisa 0:

$$m = y'(0) = 1$$

La ecuación de la tangente es $y - 0 = 1 \cdot (x - 0)$, es decir, $y = x$.

Ahora debemos calcular el área comprendida entre la curva y su tangente, es decir, entre $y = x^3 - 2x^2 + x$ y la recta $y = x$. Como en el ejercicio anterior, calculamos los puntos de intersección:

$$\begin{cases} y = x^3 - 2x^2 + x \\ y = x \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = 0,\ x_2 = 2$$

Como las dos gráficas se cortan solamente en dos puntos, para calcular el área comprendida entre las dos, basta calcular la integral de la diferencia, o sea,

$$\int_0^2 (x^3 - 2x^2 + x - x)\, dx = \int_0^2 (x^3 - 2x^2)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{16}{3} = -\frac{4}{3}$$

y la superficie encerrada por la curva y la tangente es igual a $\frac{4}{3}$.

---

# 8. Examen final

**Ejercicio 1.** *Hallar los valores de $k$ para los cuales la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 2 \\ k-1 & 1 & 1 \\ k-2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

*no posee inversa. Calcular $A^{-1}$ para $k = 0$.*

**Solución:**

La matriz no tiene inversa cuando su determinante sea cero. Así pues, calculamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ k-1 & 1 & 1 \\ k-2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 \cdot (k-1) \cdot 2 + k(k-2) - 2(k-2) + 2 - k(k-1)(-1) = 2k^2 - 9k + 9$$

Igualando a cero resulta:

$$2k^2 - 9k + 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = 3,\ k = \frac{3}{2}$$

Para estos valores de $k$ no existe la matriz inversa.

Calculemos la inversa para $k = 0$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -4 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Puesto que el determinante para $k = 0$ vale 9 tenemos que:

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -4 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}^t = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

---

**Ejercicio 2.** *Discute el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro $a$ y resuélvelo en el caso $a = 2$:*

$$\begin{aligned} ax + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + ay + 4z &= 2 \\ 2x + ay + 6z &= a - 2 \end{aligned}$$

**Solución:**

Calculemos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\,(a^2 - 4)$$

donde hemos hecho la transformación $F_3 \to F_3 - F_2$. El determinante es cero cuando $a^2 - 4$ es cero, esto es, para $a = -2$ y $a = 2$. Pueden darse los siguientes casos:

- ⋄ $a \neq -2,\ a \neq 2$. En este caso rango $A$ = rango $A^* = 3$ y el sistema es compatible determinado.

◇ $a = -2$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\begin{aligned}
\text{rango } A^* = \text{rango} &\begin{bmatrix} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{bmatrix} && \text{suprimiendo una columna de la matriz } A \\
= \text{rango} &\begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} && \text{sumando la primera fila a las otras dos} \\
= \text{rango} &\begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 12 & -4 \end{bmatrix} \\
= 3 &
\end{aligned}$$

y, por consiguiente, el sistema es incompatible.

◇ $a = 2$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango } A^* = \text{rango} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

El sistema es compatible indeterminado puesto que el rango de las dos matrices es 2.

Vamos a resolver el sistema para $a = 2$. Puesto que el rango de las dos matrices es 2 solamente hay 2 ecuaciones independientes. El sistema se reduce a:

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + 2y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

No podemos tomar $z$ como parámetro puesto que quedaría el determinante de la matiz de coeficientes igual a cero. Tomemos $y = t$ como parámetro:

$$\begin{aligned} 2x + 6z &= -2t \\ 2x + 4z &= 2 - 2t \end{aligned}$$

Resolviendo por la regla de Cramer resulta:

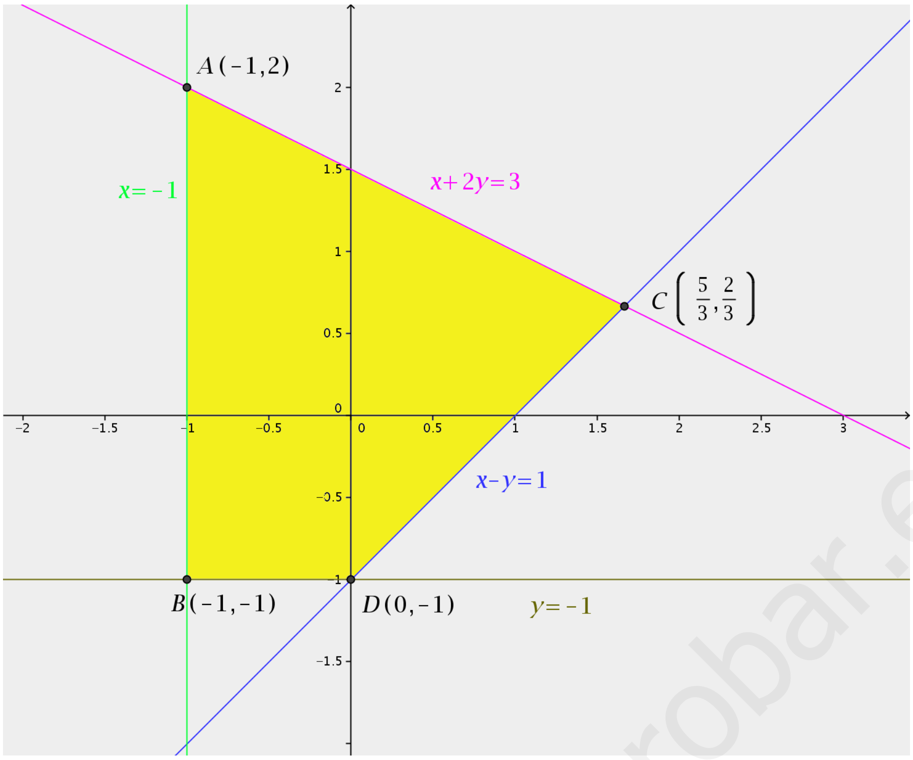
$$x = 3 - t; \quad y = t; \quad z = -1$$

---

**Ejercicio 3.** *Hallar el máximo y el mínimo de la función $z = x + y$, en la región determinada por:*

$$\begin{cases} x + 2y \leq 3 \\ x - y \leq 1 \\ x \geq -1 \\ y \geq -1 \end{cases}$$

**Solución:**




En la figura aparece representada la región factible. El valor de la función objetivo en cada uno de los vértices de la región es:

$$z(A) = z(-1, 2) = -1 + 2 = 1$$
$$z(B) = z(-1, -1) = -1 - 1 = -2$$
$$z(C) = z\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$
$$z(D) = z(0, -1) = 0 - 1 = -1$$

El valor máximo se produce en el punto $C$ y el valor mínimo en el punto $D$.

---

**Ejercicio 4.** *Unos grandes almacenes desean liquidar* 200 *camisas y* 100 *pantalones de la temporada anterior. Para ello, lanzan dos ofertas* $A$ *y* $B$*. La oferta* $A$ *consiste en un lote de una camisa y un pantalón que se venden a* 30 *euros; la oferta* $B$ *consiste en un lote de tres camisas y un pantalón, que se vende a* 50 *euros. No se desea ofrecer menos de* 20 *lotes de la oferta* $A$ *ni menos de* 10 *de la oferta* $B$*. ¿Cuántos lotes han de vender de cada tipo para maximizar los ingresos?*

**Solución:**

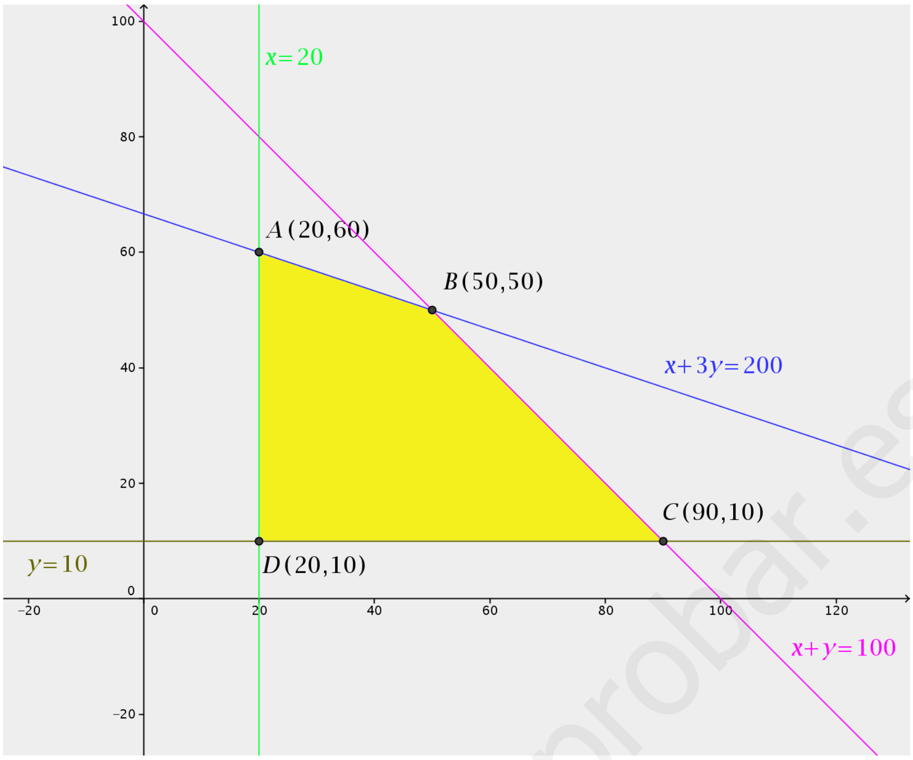
- Sea $x$ el número de lotes de tipo $A$ e $y$ el número de lotes de tipo $B$ que se venden. Los ingresos que se obtienen por la venta de estos lotes (la función objetivo) son:

$$F(x, y) = 30x + 50y$$

- Se tienen las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 200 \\ x + y \leq 100 \\ x \geq 20 \\ y \geq 10 \end{cases}$$

- Con estas restricciones resulta la siguiente región factible:




- Los valores de la función objetivo en los vértices de la región:

$$\begin{aligned} F(20,60) &= 3600 \\ F(50,50) &= 4000 \\ F(90,10) &= 3200 \\ F(20,10) &= 1100 \end{aligned}$$

Los máximos ingresos se producen con la venta de 50 lotes de tipo $A$ y otros 50 de tipo $B$.

---

**Ejercicio 5.** *De los sucesos $A$ y $B$ se sabe que $p(A) = 0{,}4$, $p(B) = 0{,}5$ y $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}3$. Hallar la probabilidad $p(A \cup B)$, $p(A \cap B)$ y $p(A \cap \overline{B})$.*

**Solución:**

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}3 \quad \Longrightarrow \quad p(\overline{A \cup B}) = 0{,}3 \quad \Longrightarrow \quad p(A \cup B) = 0{,}7$$

Entonces:

$$\begin{aligned} p(A \cap B) &= p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}7 = 0{,}2 \\ p(A \cap \overline{B}) &= p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2 \end{aligned}$$

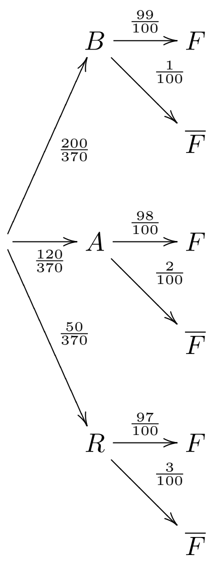
---

**Ejercicio 6.** *Para la construcción de un luminoso de feria se dispone de un contenedor con 200 bombillas blancas, 120 bombillas azules y 50 bombillas rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es igual a 0,01 si la bombilla es blanca, es igual a 0,02 si la bombilla es azul e igual a 0,03 si la bombilla es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor.*

- *Calcúlese la probabilidad de que la bombilla elegida no funcione.*

- *Sabiendo que la bombilla elegida no funciona, calcúlese la probabilidad de que dicha bombilla sea azul.*

**Solución:**




En este caso resulta:

- $p(\overline{F}) = \dfrac{200}{370}\dfrac{1}{100} + \dfrac{120}{370}\dfrac{2}{100} + \dfrac{50}{370}\dfrac{3}{100} = \dfrac{59}{3700}$
- $p(A/\overline{F}) = \dfrac{\frac{120}{370}\frac{2}{100}}{\frac{59}{3700}} = \dfrac{24}{59}$

---

**Ejercicio 7.** *La edad a la que contraen matrimonio los hombres de la Isla Barataria es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media 35 años y desviación típica 5 años. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 hombres de dicha isla. Sea $\overline{X}$ la media muestral de la edad de casamiento.*

- *¿Cuáles son la media y la varianza de $\overline{X}$?*
- *¿Cuál es la probabilidad de que la edad media de casamiento de la muestra esté comprendida entre 36 y 37 años?*

**Solución:**

La distribución de medias muestrales tiene el mismo valor medio que la población, es decir, 35 y desviación típica:

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{100}} = 0{,}5$$

Por tanto, la varianza es $s^2 = 0{,}25$.

La probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 36 y 37 la calculamos a partir de la distribución $N(35; 0{,}5)$:

$$p(36 < \overline{x} < 37) = p\left(\frac{36-35}{0{,}5} < z < \frac{37-35}{0{,}5}\right) = p(2 < z < 4) = 0{,}0228$$

---

**Ejercicio 8.** *El precio de ciertos electrodomésticos puede considerarse una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 100 euros.Los precios en euros correspondientes a una muestra de* 9 *de estos electrodomésticos son:*

255, 85, 120, 290, 80, 80, 275, 290, 135

- *Construir un intervalo de confianza al* 98 % *para la media poblacional.*

◇ *Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra, para que con un nivel de confianza del* 99 %*, el error de estimación del precio medio no supere los* 50 *euros.*

**Solución:**

◇ Para un nivel de confianza $c = 0{,}98$:

$$p(-z_c < z < z_c) = 0{,}98 \implies p(z < z_c) = 0{,}99 \implies z_c = 2{,}33$$

El intervalo de confianza tiene por extremos:

$$178{,}89 \pm \frac{2{,}33 \cdot 100}{3}$$

y el intervalo resulta ser $(101{,}22; 256{,}56)$.

◇ Si $c = 0{,}99$, $z_c = 2{,}575$. Si queremos que el error en la estimación sea menor que 50, debe verificarse que:

$$\frac{2{,}575 \cdot 100}{\sqrt{n}} < 50 \implies n > \left(\frac{2{,}575 \cdot 100}{50}\right)^2 = 26{,}52 \implies n_{min} = 27$$

---

**Ejercicio 9.** *Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva* $y = x^2 - 5x + 6$ *en el punto de abscisa* $x = 2$.

**Solución:**

Calculamos en primer lugar la ordenada del punto de tangencia:

$$y_0 = y(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$$

Así pues la tangente pasa por el punto $(2, 0)$.

La pendiente de la tangente es la derivada en el punto de abscisa 2, es decir:

$$y' = 2x - 5 \implies m = y'(2) = -1$$

La ecuación de la tangente es:

$$y = -1 \cdot (x - 2)$$

---

**Ejercicio 10.** *Calcular el área comprendida entre las curvas* $y = x^2$ *e* $y = -x^2 + 2x$.

**Solución:**

Calculamos en primer lugar los puntos de intersección de las curvas, es decir, resolvemos el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 2x \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema (para la incógnita $x$) son $x = 0$ y $x = 1$.

Calculamos la integral de la diferencia de las dos funciones:

$$\int_0^1 (2x^2 - 2x)\, dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

y, por consiguiente, la superficie es igual a $\frac{1}{3}$.

---