UNIDAD 2: DERIVADAS Y APLICACIONES

ÍNDICE DE LA UNIDAD

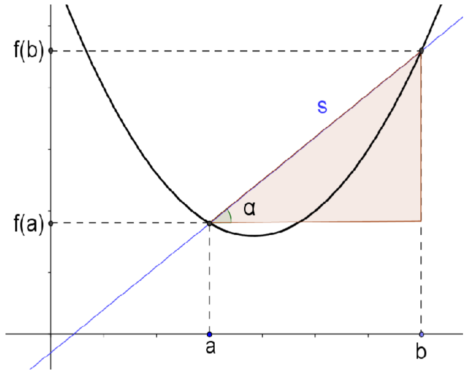
1.- INTRODUCCIÓN.

El concepto de derivada, íntimamente asociado al de límite, que ya estudiamos en la unidad anterior, constituyen, junto al de integral, los dos pilares fundamentales del ***Cálculo Infinitesimal****, parte de las Matemáticas de suma importancia en nuestro mundo actual.*

Fue ***Fermat*** *(1602-1665), adelantándose a* ***Newton y Leibnitz,*** *el primer matemático que formuló la idea de derivada en sus estudios de máximos y mínimos. Años después, Newton también llegó a la idea de derivada en sus investigaciones sobre velocidad. Por otra parte, Leibnitz también progresó en la definición de derivada y fue quien designó la derivada en la forma: dx/dt, refiriéndose a cantidades infinitesimalmente pequeñas.*

Ya en el siglo XIX, los matemáticos de la época dieron rigor y precisión al concepto de derivada, conservándose prácticamente hasta nuestros días y siendo, junto con las integrales una de las herramientas más eficaces para múltiples campos de la ciencia como la Física, la Química o toda la Ingeniería.

2.- DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.



Definición 1: Sea f una función definida en un intervalo $[a\,,b]\subseteq Dom(f)$. Se llama **tasa de variación media** de f en dicho intervalo al cociente: $TVM_{[a,b]}(f)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Nota 1: Obsérvese que la tasa de variación media de una función en un intervalo coincide con la pendiente (recordemos que la pendiente es la tangente trigonométrica del ángulo que forma con el eje de abscisas) de la recta secante a la gráfica en los puntos correspondientes, es decir: $m=tg\alpha=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=TVM_{[a,b]}(f)$

Definición 2: Sea f una función definida en un entorno de un punto $x=a$ de su dominio. Decimos que f es **derivable** en dicho punto si existe y es finito: $\underset{x\to a}{Lím}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. En tal caso, a este límite se le llama tasa de variación instantánea o **derivada** de la función en el punto. Se escribe: $f'(a)=\underset{x\to a}{Lím}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Al cociente $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se le llama **cociente incremental.**

Nota 2: Sin más que hacer el cambio de variable $h=x-a$, podemos obtener una definición equivalente y que fue la primera que apareció históricamente: $f'(a)=\underset{x\to a}{Lím}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\underset{h\to 0}{Lím}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Ambas definiciones son válidas y dependerá del caso la idoneidad de emplear una u otra.

Definición 3: Sea f una función definida en un entorno por la izquierda de un punto $x=a$ de su dominio. Decimos que f es **derivable por la izquierda** en dicho punto si existe y es finito: $\underset{x\to a^-}{Lím}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. En tal caso, a este límite se le llama **derivada por la izquierda** de la función en el punto. Se escribe: $f'_-(a)=\underset{x\to a^-}{Lím}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Definición 4: Sea f una función definida en un entorno por la derecha de un punto $x=a$ de su dominio. Decimos que f es **derivable por la derecha** en dicho punto si existe y es finito: $\underset{x\to a^+}{Lím}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. En tal caso, a este límite se le llama **derivada por la derecha** de la función en el punto. Se escribe: $f'_+(a)=\underset{x\to a^+}{Lím}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Nota 3: Es evidente que una función es derivable en un punto cuando existen sus derivadas laterales y coinciden.

Definición 5: Se dice que una función es derivable en un intervalo cuando lo es en todos sus puntos, entendiendo derivadas laterales en los extremos cerrados del intervalo si es que el intervalo es cerrado.

Ejemplo 1: Sea $f(x)=x^2-3x+1$. Veamos si es derivable en algunos puntos:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+1+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-2)(x-1)}{x-1}=-1\Rightarrow f'(1)=-1$

b) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2-3h+1-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(h-3)}{h}=-3\Rightarrow f'(0)=-3$

Ejemplo 2: Sea: $h(x)=\begin{cases}-2x-1 & si \quad x\le -1\\ -x^2+2 & si \quad x>-1\end{cases}$. Veamos si es derivable en $x=-1$

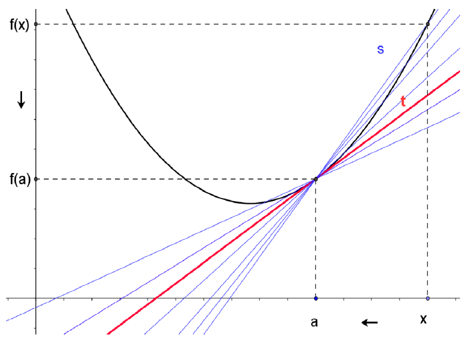
$$h'_-(-1)=\lim_{x\to -1^-}\frac{h(x)-h(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{-2x-1-1}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{-2(x+1)}{x+1}=-2$$

$$h'_+(-1)=\lim_{x\to -1^+}\frac{h(x)-h(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{-x^2+2-1}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{-(x+1)(x-1)}{x+1}=2$$

Así pues f no es derivable en $x=-1$

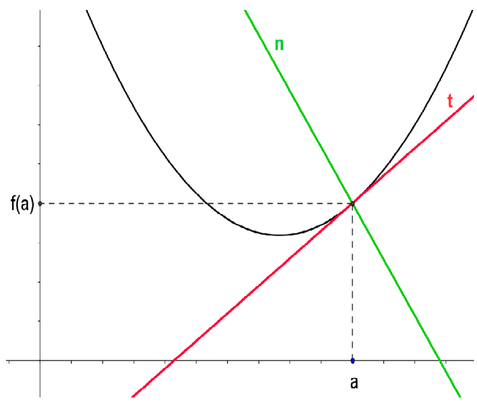
3.- INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA.

Analicemos desde un punto de vista gráfico la definición de derivada de una función en un punto:
Parece claro que, a medida que x se acerca al punto a, las rectas secantes se acercan a la recta tangente en el punto a. Es además evidente, que las distintas tasas de variación media, correspondientes a los sucesivos cocientes incrementales, tienden, en caso de existir, a la derivada. Podemos establecer, por tanto la siguiente interpretación geométrica de la derivada:



Nota 4: (Interpretación geométrica de la derivada). Si una función f es derivable en un punto $x=a$, entonces, **la derivada de f en $x=a$ coincide con la pendiente de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $(a,f(a))$**. Así pues, las rectas tangente y normal tienen por ecuaciones:

$t:\ y-f(a)=f'(a)(x-a)$ Recta tangente
$n:y-f(a)=\dfrac{-1}{f'(a)}(x-a)$ Recta normal



Esta nota es una de las propiedades más importantes para entender bien todas las aplicaciones de las derivadas, por lo que debemos tomarnos su comprensión e interpretación en distintos contextos como uno de los objetivos esenciales de la unidad.

4.- CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD.

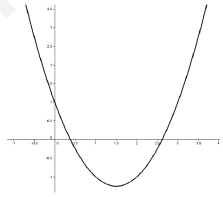
Proposición 1: Si f es derivable en el punto $x = a$, entonces es continua en $x = a$.

Nota 5: Como consecuencia de la proposición anterior, si una función no es continua en un punto, entonces, no puede ser derivable en dicho punto.

Nota 6: El recíproco de la proposición 1 no es cierto, es decir, una función continua en un punto no tiene porqué ser derivable.

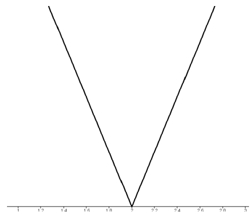
Definición 6: Se dice que una función f tiene un **punto anguloso** en $x = a$ si f es continua en $x = a$ y no derivable, siendo derivable por la izquierda y por la derecha en dicho punto, es decir, si es continua y existen las derivadas laterales pero no coinciden.

Gráficamente, un punto anguloso es aquel en el que las tangentes “saltan” de la izquierda a la derecha del punto. Por el contrario, las funciones derivables son “redondeadas” y sus tangentes no dan “saltos”.

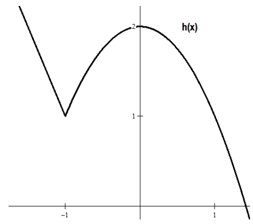


Ejemplo 3: Si recordamos los ejemplos 1 y 2, cuyas expresiones eran:

$f(x) = x^2 - 3x + 1$ y $h(x) = \begin{cases} -2x - 1 & si \quad x \le -1 \\ -x^2 + 2 & si \quad x > -1 \end{cases}$



La primera es “redondeada” y no tiene “picos”, la segunda presenta “picos” (puntos angulosos) en los puntos en los que no eran derivables. Este hecho es bastante frecuente en funciones con valores absolutos y en funcione definidas a trozos.
Además de esto, con estos ejemplos podemos comprobar que la continuidad no implica la derivabilidad ya que se trata de tres funciones continuas en todo su dominio.



5.- FUNCIÓN DERIVADA. DERIVADAS SUCESIVAS

Definición 7: Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función derivable en un dominio $D' \subseteq D$. Se llama **función derivada** primera de f a la función $\begin{array}{c} f' : D' \to \mathbb{R} \\ x \to f'(x) \end{array}$. De manera análoga se define la función **derivada segunda** de f en un dominio $D'' \subseteq D'$, como la derivada de la derivada, es decir $f''(x) = (f')'(x)$, la derivada tercera como la derivada de la segunda, etc.

Nota 7: Es importante observar que, mientras que la derivada de una función en un punto es un número, la función derivada, como su propio nombre indica, es una función, precisamente la que a cada punto asocia la derivada puntual.

Ejemplo 4: Hallemos la función derivada de la función $f(x) = x^2$. Sea $a \in \mathbb{R}$ cualquiera.

$f'(a) = \underset{x \to a}{Lím} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \underset{x \to a}{Lím} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a} = \underset{x \to a}{Lím} \dfrac{(x-a)(x+a)}{x - a} = 2a$. Así pues, podemos concluir que la función es derivable en todo su dominio, siendo $f'(x) = 2x$

6.- ÁLGEBRA DE DERIVADAS. REGLA DE LA CADENA

Proposición 2: (Álgebra de derivadas). Sean f y g dos funciones derivables en $x=a$, entonces:

a) $f \pm g$ es derivable en $x=a$ y se cumple: $(f \pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$

b) $k \cdot f$ es derivable en $x=a$ y se cumple: $(k \cdot f)'(a)=k \cdot f'(a)\ \forall k \in \mathbb{R}$

c) $f \cdot g$ es derivable en $x=a$ y se cumple: $(f \cdot g)'(a)=f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a)$

d) Si $g(a)\neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ es derivable en $x=a$ y se cumple: $(f/g)'(a)=\dfrac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)}{[g(a)]^2}$

Proposición 3: (Regla de la cadena). Sea g una función derivable en $x=a$ y f una función derivable en $x=g(a)$, entonces $f\circ g$ es derivable en $x=a$ y se cumple que: $(f\circ g)'(a)=f'(g(a))\cdot g'(a)$

7.- DERIVADAS DE FUNCIONES ELEMENTALES.

Veamos en este punto las derivadas de las funciones elementales que estudiaremos (1ª tabla) y una tabla resumen de las reglas de derivación vistas en el punto anterior (2ª tabla), que nos evitarán el largo procedimiento del cálculo de la derivada con definición.

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES			
Simple		**Compuesta**	
Función	**Derivada**	**Función**	**Derivada**
$y=k$	$y'=0$		
$y=x^n$	$y'=nx^{n-1}$	$y=f(x)^n$	$y'=nf(x)^{n-1}\cdot f'(x)$
$y=\dfrac{1}{x}$	$y'=\dfrac{-1}{x^2}$	$y=\dfrac{1}{f(x)}$	$y'=\dfrac{-f'(x)}{f(x)^2}$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y=\sqrt{f(x)}$	$y'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y=\sqrt[n]{x}$	$y'=\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y=\sqrt[n]{f(x)}$	$y'=\dfrac{f'(x)}{n\cdot\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$
$y=e^x$	$y'=e^x$	$y=e^{f(x)}$	$y'=f'(x)\cdot e^{f(x)}$
$y=a^x$	$y'=a^x\cdot\ln a$	$y=a^{f(x)}$	$y'=f'(x)\cdot a^{f(x)}\cdot\ln a$
$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$	$y=\ln f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$y=\log_a f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)\ln a}$

OPERACIONES CON DERIVADAS	
Suma/Resta	$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
Producto por escalar	$(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$
Producto	$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Cociente	$(f / g)'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
Composición (Regla de la cadena)	$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Nota 8: Además de las derivadas de funciones elementales y de las reglas de derivación, es bastante importante que tengamos en cuenta algunas de las propiedades de los logaritmos que pasamos a recordar a continuación, ya que, al transformar productos y divisiones en sumas y restas, además de potencias en productos, facilitan bastante el cálculo de derivadas logarítmicas aplicando las propiedades antes de derivar. Pasamos a recordarlas:

a) $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

b) $\log_a (x / y) = \log_a x - \log_a y$

c) $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$

Vamos a dedicar en este punto un tiempo a resolver algunas situaciones que requerían el cálculo de derivada y que hemos pospuesto hasta disponer de la tabla de derivadas.

Nota 9: **(Estudio de la derivabilidad)** Lo primero que podemos observar, a la vista de la tabla, es que la mayoría de las funciones elementales no son sólo continuas y derivables, sino que sus derivadas son también continuas (y en la mayoría de los casos nuevamente derivables).
Esto nos permite estudiar la derivabilidad derivando las funciones y tomando límites y hallar derivadas puntuales derivando y sustituyendo. Esto simplifica bastante el estudio de la derivación. Veamos un ejemplo ya hecho utilizando este método:

Ejemplo 5: Si tomamos la misma función del ejemplo 3:

$$h(x) = \begin{cases} -2x - 1 & si \quad x \le -1 \\ -x^2 + 2 & si \quad x > -1 \end{cases} \Rightarrow h'(x) = \begin{cases} -2 & si \quad x < -1 \\ 2x & si \quad x > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} f'_-(-1) = -2 \\ f'_+(-1) = 2 \end{matrix}$$

Así pues, se concluye que no es derivable en $x = -1$, ya que tiene un punto anguloso.
Obsérvese también que al derivar una función a trozos, las desigualdades pasan a ser estrictas momentáneamente hasta que no tengamos seguridad de la derivabilidad de la misma en el punto en cuestión.

Ejemplo 6: Hallemos las recta tangente y normal a la curva $y = x^2 - 5x + 11$ en $x = 1$.

Lo primero que hacemos es llamarla $f(x)=x^2-5x+11$ para sustituir en valores numéricos con rigor. Recordemos que las fórmulas de la tangente y la normal, para este caso serían: $\begin{cases} t:\ y-f(1)=f'(1)(x-1) & \text{Recta tangente} \\ n:\ y-f(1)=\dfrac{-1}{f'(1)}(x-1) & \text{Recta normal} \end{cases}$

Así pues, necesitamos hallar $f(1)$ y $f'(1)$, para lo cual, derivamos la función: $f'(x)=2x-5$. Así pues: $\left.\begin{matrix} f(1)=7 \\ f'(1)=-3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} t: y-7=-3(x-1) \\ n: y-7=\dfrac{1}{3}(x-1) \end{cases}$ *simplificando* $\begin{cases} t: y=-3x+10 \\ n: y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{20}{3} \end{cases}$

Proponemos **las actividades 1, 2 y 3.**

<u>Ejemplo 7:</u> Vamos a mostrar ahora varios ejemplos de cómo se usa la tabla de derivadas y las reglas de derivación:

a) $y=x^2-x+6 \ \Rightarrow y'=2x-1$

b) $y=\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}+3x \ \Rightarrow \ y'=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+3$

c) $y=x^3\ln x \ \Rightarrow y'=3x^2\ln x+x^3\cdot\dfrac{1}{x}=3x^2\ln x+x^2=x^2(3\ln x+1)$

d) $y=\dfrac{3x-4x^2}{6} \ \Rightarrow \ y'=\dfrac{3-8x}{6}$

e) $y=\dfrac{e^x}{x^2} \ \Rightarrow \ y'=\dfrac{e^x x^2-2xe^x}{x^4}=\dfrac{xe^x(x-2)}{x^4}=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$

f) $y=4^{3/x} \ \Rightarrow \ y'=\dfrac{-3}{x^2}\cdot\ln 4\cdot 4^{3/x}$

g) $y=\ln\left(x^2+1\right) \ \Rightarrow \ y'=\dfrac{2x}{x^2+1}$

Se propone la **actividad 4**.

<u>8.- APLICACIONES DE LAS DERIVADAS</u>

<u>8.1.- Cálculo de límites: Reglas de L'Hôpital.</u>

<u>Proposición 4:</u> (Regla de L'Hôpital): Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones derivables en un entorno reducido de $x=a$ tales que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ presenta la indeterminación $\dfrac{0}{0}$ *o bien* $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Si existe $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ y coincide con el anterior. El resultado también es válido para límites en el infinito.

En la práctica, esto supone que en la mayoría de las situaciones en las que se nos presenten indeterminaciones de tipo cociente, podemos derivar numerador y denominador y ver si el límite resultante existe, ya que, en tal caso, coincidirá con el anterior.

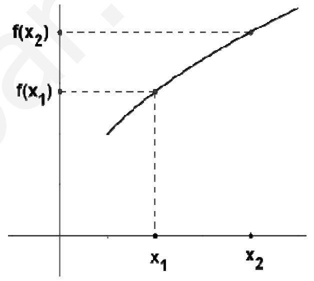
Ejemplo 8: Resolvamos los siguientes límites:

a) $\underset{x\to+\infty}{Lím}\dfrac{\ln x}{x^2+2}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]\overset{L'H}{=}\underset{x\to+\infty}{Lím}\dfrac{\frac{1}{x}}{2x}=\underset{x\to+\infty}{Lím}\dfrac{1}{2x^2}=\left[\dfrac{1}{+\infty}\right]=0$

b) $\underset{x\to0^+}{Lím}\left(x\ln x\right)=\left[0\cdot\infty\right]=\underset{x\to0^+}{Lím}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{L'H}{=}\underset{x\to0^+}{Lím}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\underset{x\to0^+}{Lím}\left(-x\right)=0$

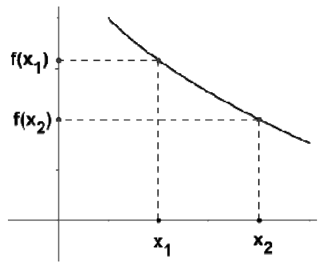
Se propone la **actividad 5**

8.2.- Monotonía y extremos relativos.



Definición 8: Sea f una función definida en un intervalo (a,b). Se dice que f es **creciente en el intervalo** (a,b) si $\forall x_1,x_2\in(a,b)/x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$

Definición 9: Se dice que una función f es **creciente en un punto** $x=a$ si existe un entorno $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ de dicho punto en el que f es creciente.



Definición 10: Sea f una función definida en un intervalo (a,b). Se dice que f es **decreciente en el intervalo** (a,b) si $\forall x_1,x_2\in(a,b)/x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$

Definición 11: Se dice que una función f es **decreciente en un punto** $x=a$ si existe un entorno $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ de dicho punto en el que f es decreciente.

Definición 12: Cuando las desigualdades de las definiciones anteriores son estrictas, hablamos de función **estrictamente creciente o decreciente**.

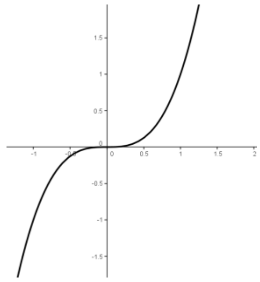
Proposición 5: (Monotonía): Sea f una función derivable en un punto $x=a$. Entonces:

a) Si $f'(a)>0\Rightarrow$ f es creciente en $x=a$

b) Si $f'(a)<0\Rightarrow$ f es decreciente en $x=a$

Nota 10: En general, el recíproco de la proposición anterior, no es cierto, es decir, no todas las funciones derivables en un punto y crecientes (o decrecientes) en el punto tienen porqué tener derivada positiva (o negativa). Lo único que podemos asegurar es que si una función es derivable y creciente (decreciente), entonces $f'(a)\ge0$ $\left(f'(a)\le0\right)$

Veamos un contraejemplo:



Ejemplo 9: Consideremos la función $f(x)=x^3$. Como podemos ver en su gráfica, se trata de una función creciente en todo su dominio y, en particular en $x=0$. Sin embargo, es evidente que su derivada no es positiva ya que $f'(0)=0$

Nota 11: Análogamente se obtiene un resultado para intervalos:

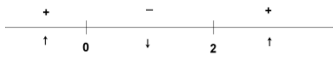
a) Si $f'(x)>0\ \forall x\in(a,b)\ \Rightarrow$ f es creciente en el intervalo (a,b)

b) Si $f'(x)<0\ \forall x\in(a,b)\ \Rightarrow$ f es decreciente en el intervalo (a,b)

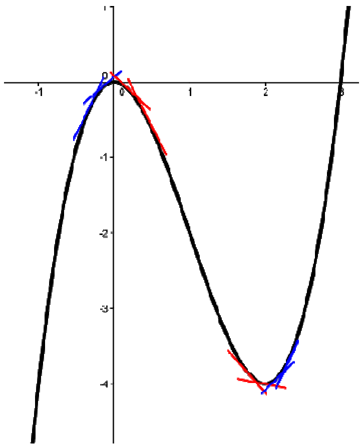
A partir de esta proposición, el estudio de la monotonía de una función derivable en un dominio se puede realizar estudiando el signo de su función derivada en dicho dominio. Este método, que durante el curso pasado no lo podíamos llevar a cabo, será una potente herramienta a la hora de conocer las características gráficas de una función dada algebraicamente. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 10: Estudiemos la monotonía de la función $f(x)=x^3-3x^2$ definida en $\mathbb{R}$:

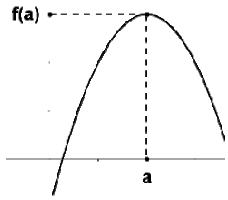
- $f'(x)=3x^2-6x\ \Rightarrow\ f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x=0 \overset{fácil}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=2 \end{cases}$
- Estudiando el signo de la derivada con las raíces calculadas:



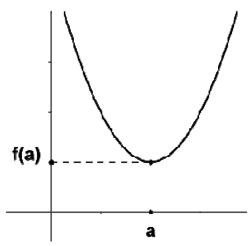
- Así pues, podemos concluir que: f es creciente en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$; f es decreciente en $(0,2)$
- Observemos lo visto desde un punto de vista gráfico:



Es evidente que la monotonía en la gráfica se corresponde con los visto estudiando el signo de la derivada. Una interpretación de esto bastante interesante para la comprensión de este apartado es observar lo que ocurre con las pendientes de las tangentes a la gráfica en los distintos intervalos. Se puede observar que en los intervalos en los que la función es creciente, las rectas tangentes también lo son y en los que la función es decreciente, las rectas tangentes son decrecientes también. Esto era de esperar, ya que, según vimos en la interpretación geométrica de la derivada, la pendiente de la recta tangente en un punto coincidía con la derivada en dicho punto.



Definición 13: Se dice que una función f alcanza un **máximo relativo** en un punto $(a,f(a))$ si existe un entorno $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ del punto $x=a$ tal que $f(x)<f(a)\ \forall x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)-\{a\}$



Definición 14: Se dice que una función f alcanza un **mínimo relativo** en un punto $(a,f(a))$ si existe un entorno $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ del punto $x=a$ tal que $f(x)>f(a)\ \forall x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)-\{a\}$.

Proposición 6: **(Condición necesaria de extremo relativo):** Sea f una función derivable en un punto $x = a$. Si f tiene en dicho punto un extremo relativo, entonces $f'(a) = 0$.

Nota 12: La condición anterior no es suficiente, es decir, puede darse que una función con derivada nula en un punto no tenga extremo relativo en dicho punto. Como contraejemplo nos sirve el ejemplo 11.

Proposición 7: **(Criterio de la derivada segunda):** Sea f una función dos veces derivable en $x = a$, siendo $f'(a) = 0 \;\; y \;\; f''(a) \neq 0$. Entonces:

a) Si $f''(a) > 0 \Rightarrow$ f presenta en $(a, f(a))$ un mínimo relativo.

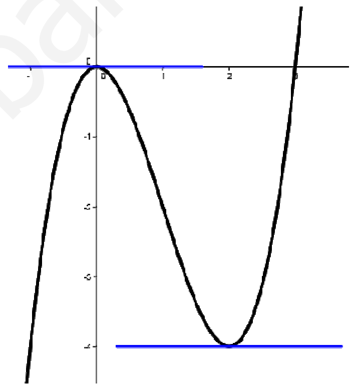
b) Si $f''(a) < 0 \Rightarrow$ f presenta en $(a, f(a))$ un máximo relativo.

Nota 13: En la situación de la proposición anterior, si $f'(a) = 0 \;\; y \;\; f''(a) = 0$ pero la primera derivada no nula en $x = a$ es de orden par, el criterio sigue siendo válido con el signo de dicha derivada.

Ejemplo 11: Con la función del ejemplo 12, es evidente que los candidatos a extremos relativos se obtienen en la forma:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \overset{fácil}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = -6 < 0 & \Rightarrow \text{Máximo relativo en } (0,0) \\ f''(2) = 6 > 0 & \Rightarrow \text{Mínimo relativo en } (2,-4) \end{cases}$$



Otra forma de establecer si un extremo es máximo o mínimo relativo es estudiar su monotonía a la izquierda y derecha del punto en cuestión.

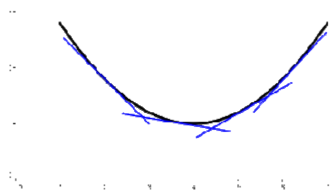
Nota 14: Al igual que la monotonía, se puede observar la estrecha relación entre el estudio analítico y el gráfico ya que, como se puede observar, las rectas tangentes en puntos en los que la función es derivable son horizontales, es decir, de pendiente nula, cosa que no es de extrañar puesto que la pendiente es la derivada, como ya hemos visto en numerosas ocasiones.

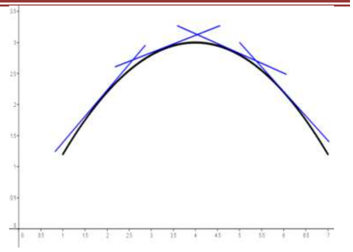
Nota 15: Hay que tener en cuenta que hay puntos en los que una función no es derivable. Así que si queremos ver si un punto "singular" es o no un extremo, hemos de actuar de forma distinta (sin usar la derivada). Lo más habitual es evaluar la función en puntos genéricos de la forma $a - \varepsilon \;\; y \;\; a + \varepsilon$ y ver lo que ocurre con sus imágenes.

Se proponen las **actividades 6, 7 y 8**

8.3.- Curvatura y puntos de inflexión.

Definición 15: Se dice que una función f es **convexa en un punto** $(a, f(a))$ si existe un entorno del punto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ en el que la recta tangente a la curva está situada por debajo de la gráfica de la función.





Definición 16: Se dice que una función f es **cóncava en un punto** $(a, f(a))$ si existe un entorno del punto $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ en el que la recta tangente a la curva está situada por encima de la gráfica de la función.

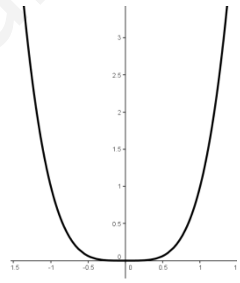
Definición 17: Diremos que una función es **convexa en un intervalo** (a,b) si lo es en todos sus puntos.

Definición 18: Diremos que una función es **cóncava en un intervalo** (a,b) si lo es en todos sus puntos.

Proposición 8: (Curvatura) Sea f una función dos veces derivable en $x=a$. Entonces:

a) Si $f''(a)>0 \Rightarrow$ f es convexa en $x=a$

a) Si $f''(a)<0 \Rightarrow$ f es cóncava en $x=a$



Nota 16: En general, el recíproco de la proposición anterior, no es cierto, es decir, no todas las funciones dos veces derivables en un punto y convexas (o cóncavas) en el punto tienen porqué tener derivada segunda positiva (o negativa). Lo único que podemos asegurar es que si una función es dos veces derivable y convexa (cóncava), entonces $f''(a)\geq 0$ $\left(f''(a)\leq 0\right)$

Veamos un contraejemplo:

Ejemplo 12: Consideremos la función $f(x)=x^4$. Como podemos ver en su gráfica, se trata de una función convexa en todo su dominio y, en particular en $x=0$. Sin embargo, es evidente que su derivada segunda no es positiva ya que $f''(0)=0$

Nota 17: Análogamente se obtiene un resultado para intervalos:

a) Si $f''(x)>0\ \forall x\in(a,b) \Rightarrow$ f es convexa en el intervalo (a,b)

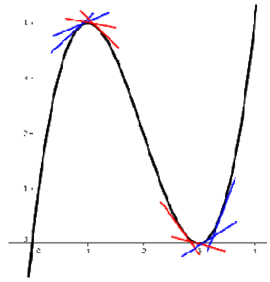
b) Si $f''(x)<0\ \forall x\in(a,b) \Rightarrow$ f es cóncava en el intervalo (a,b)

A partir de esta proposición, el estudio de la curvatura de una función dos veces derivable en un dominio se puede realizar estudiando el signo de su derivada segunda en dicho dominio. Veamos un ejemplo:

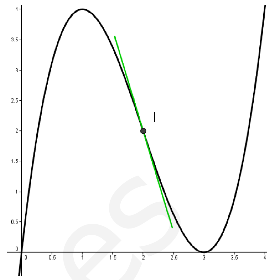
Ejemplo 13: Estudiemos la curvatura de la función $f(x)=x^3-6x^2+9x$ definida en $\mathbb{R}$:

- $f'(x)=3x^2-12x+9 \Rightarrow f''(x)=6x-12 \Leftrightarrow 6x-12=0 \overset{fácil}{\Leftrightarrow} x=2$

- Viendo el signo de la derivada 2ª con las raíces calculadas:
- Así pues, podemos concluir que: $\begin{cases} \text{f es convexa en } (2,+\infty) \\ \text{f es cóncava en } (-\infty,2) \end{cases}$



- Si observamos la gráfica, vemos que, efectivamente, los intervalos de convexidad corresponden a intervalos en los que las pendientes de las rectas tangentes van creciendo, con lo que las derivadas son crecientes y, por tanto, las derivadas de las derivadas, que son las derivadas segundas, son positivas. Lo contrario ocurre en los intervalos de concavidad.



<u>**Definición 19:**</u> Se dice que una función tienen un **punto de inflexión** en $\left(a, f\left(a\right)\right)$ si la función cambia de curvatura en $x = a$, es decir, si pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava.

Geométricamente, en un punto de inflexión, la recta tangente pasa de estar por debajo de la gráfica a estar por encima o viceversa.

<u>**Proposición 9:**</u> **(Puntos de inflexión)** Sea f una función tres veces derivable en $x = a$.

Si $f''\left(a\right) = 0 \;\; y \;\; f'''\left(a\right) \neq 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en $\left(a, f\left(a\right)\right)$.

<u>**Nota 18:**</u> En la situación de la proposición anterior, si $f''\left(a\right) = 0 \;\; y \;\; f'''\left(a\right) = 0$ pero la primera derivada no nula en $x = a$ es de orden impar, el criterio sigue siendo válido con el signo de dicha derivada.

<u>**Ejemplo 14:**</u> La función del ejemplo 17 tiene un punto de inflexión en $\left(2, 2\right)$ ya que $f'''\left(2\right) = 6 \neq 0$.

Se proponen las **actividades 9 y 10**

<u>8.4.- Representación gráfica de funciones.</u>

<u>**Nota 19:**</u> **(Aspectos a tratar para la representación gráfica de funciones)**
Aunque para representar gráficamente una función no son imprescindibles todas las características que vamos a ver a continuación, en un plano general, debemos tratar:

1) <u>Dominio</u>: Para ello, recordamos que hay que tener en cuenta que:

- Las funciones racionales no están definidas en las raíces del denominador.
- Las funciones radicales de índice par solo existen cuando el radicando es positivo o nulo.
- El argumento de un logaritmo debe ser estrictamente positivo.

2) <u>Puntos de corte con los ejes y signo</u>: Los puntos de corte y el estudio del signo suelen ser útiles ya que restringen bastante la zona de trazado de la función. Recordamos que los puntos de corte con los ejes se determinan a partir de los siguientes sistemas:

Eje OX: $\begin{cases} y = f\left(x\right) \\ y = 0 \end{cases}$ Eje OY: $\begin{cases} y = f\left(x\right) \\ x = 0 \end{cases}$

3) <u>Continuidad</u>: Estudiando la continuidad de la función podemos observar posibles saltos, discontinuidades evitables y enlazar con el estudio de las asíntotas.

4) <u>Asíntotas</u>: Son quizás el aspecto más determinante a la hora de la representación gráfica. Hemos de estudiar, de la forma que vimos en la unidad anterior, las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

5) <u>Simetría</u>: Aunque no es, en absoluto, un aspecto fundamental, puede ayudarnos a entender la gráfica de una forma global y detectar posibles errores. Recordemos que:

- Si $f(-x)=f(x) \Rightarrow$ f es par
- Si $f(-x)=-f(x) \Rightarrow$ f es impar

6) <u>Periodicidad</u>: Es útil en determinadas funciones, casi en su mayoría, trigonométricas ya que permite restringir el estudio a un intervalo concreto. Recordemos que una función f es periódica de período P cuando $f(x+P)=f(x)\ \forall x \in Dom f$.

7) <u>Monotonía y extremos relativos</u>: Se estudian como hemos visto en el punto 9.2 del tema, mediante el estudio del signo y las raíces de la derivada primera.

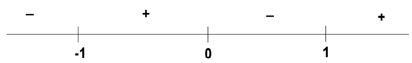
8) <u>Curvatura y puntos de inflexión</u>: Se estudian como hemos visto en el punto 9.3 del tema, mediante el estudio del signo y las raíces de la derivada segunda.

<u>Ejemplo 15:</u> Estudiemos y representemos la función $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

1) <u>Dominio</u>: Es evidente que $x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1 \;\Rightarrow\; Dom f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

2) <u>Puntos de corte con los ejes y signo</u>:

Eje OX: $\begin{cases} y=\dfrac{x^3}{x^2-1} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^3}{x^2-1}=0 \Rightarrow x^3=0 \Rightarrow x=0$. Así pues, el único punto de corte con los ejes es el origen $O(0,0)$. El signo de la función es:



3) <u>Continuidad</u>: Es inmediato ver que f es continua en su dominio con saltos infinitos en los puntos de discontinuidad pero eso lo vemos más claramente en las asíntotas.

4) <u>Asíntotas</u>:

- **Verticales**:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^3}{x^2-1}=\left[\dfrac{-1}{0^+}\right]=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^3}{x^2-1}=\left[\dfrac{-1}{0^-}\right]=+\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Tiene una asíntota vertical en } x=-1$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^3}{x^2-1}=\left[\dfrac{1}{0^-}\right]=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^3}{x^2-1}=\left[\dfrac{1}{0^+}\right]=+\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Tiene una asíntota vertical en } x=1$$

- **Oblicuas**

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3-x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = \left[\frac{1}{\pm\infty}\right] = 0$$

Así pues, tiene una asíntota oblicua en $y = x$

- **Horizontales**

No tiene ya que tiene oblicuas en ambos sentidos.

5) <u>Simetría</u>: $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -f(x) \Rightarrow$ f es impar

6) <u>Periodicidad</u>: Es evidente que no es periódica.

7) <u>Monotonía y extremos relativos</u>:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^4-3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\sqrt{3} \\ x_3 = \sqrt{3} \end{cases}$$

. Estudiando su signo:

+	$-\sqrt{3}$	−	-1	−	0	−	1	−	$\sqrt{3}$	+

Luego: f es creciente en $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$ y decreciente en $(-\sqrt{3},-1)\cup(-1,1)\cup(1,\sqrt{3})$

Es evidente que la función alcanza un máximo relativo en $\left(-\sqrt{3},\frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$ y un mínimo relativo en $\left(\sqrt{3}\,,\,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

8) <u>Curvatura y puntos de inflexión</u>:

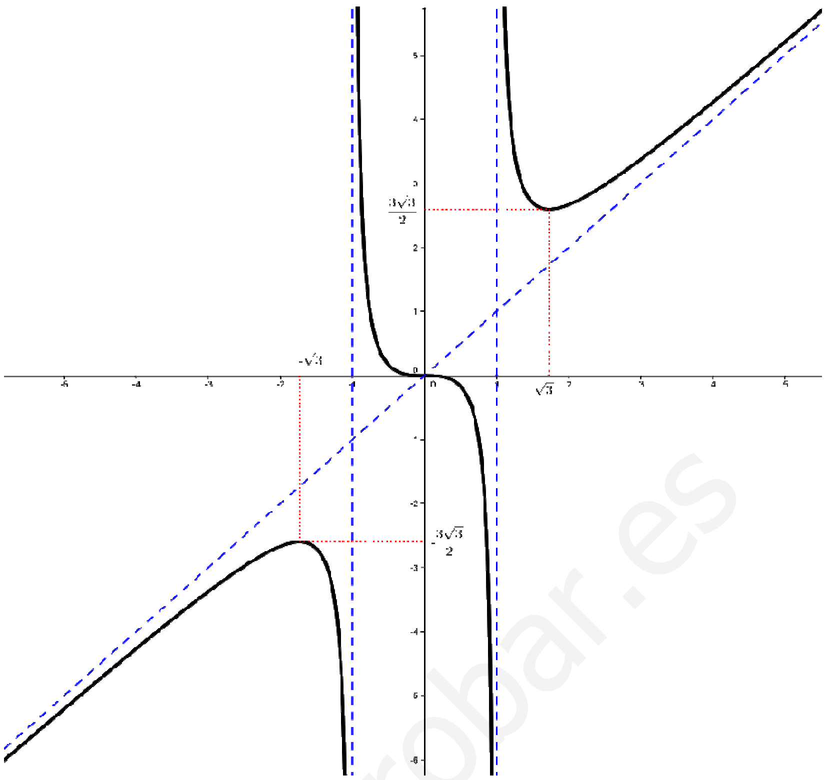
$$f''(x) = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-2\cdot 2x(x^2-1)(x^4-3x^3)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2-1)(6x^3-5x^2+3)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Para estudiar la curvatura, vemos el signo:

−		+		−		+
CVA	-1	CXA	0	CVA	1	CXA

Así pues, f es convexa en $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ y cóncava en $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ con un punto de inflexión en $O(0,0)$.

La gráfica queda como sigue:



Se propone la **actividad 11**.

8.5.- Optimización.

Definición 20: Sea f una función definida en un dominio D. Decimos que f tiene en el punto $\left(a, f(a)\right)$ un **máximo absoluto** si $f(x) < f(a)\ \forall x \in D$.

Definición 21: Sea f una función definida en un dominio D. Decimos que f tiene en el punto $\left(a, f(a)\right)$ un **mínimo absoluto** si $f(x) > f(a)\ \forall x \in D$.

Nótese que los conceptos de extremos relativos y absolutos son similares pero distintos. Mientras que el extremo relativo se centra en lo que ocurre "alrededor" del punto en un entorno cerca de él, los extremos absolutos abarcan un dominio mayor. En resumen, los extremos relativos son los mayores (menores) de los valores que toma la función cerca de ellos mientras que los absolutos son los mayores (o menores) de todo el dominio estudiado.

*En numerosas situaciones físicas, geométricas, económicas,…se plantean problemas que consisten en "**optimizar funciones**", es decir, en hallar sus máximos y/o mínimos absolutos en determinados dominios de definición de las mismas. A menudo, la dificultad de ello no radica en optimizar en sí las funciones, sino en encontrar su expresión algebraica.*

Nota 20: **(Optimización de funciones)** Optimizar una función consiste en determinar sus máximos y/o mínimos absolutos de dicha función en un dominio concreto. Para ello los pasos recomendados son los siguientes:

1º) Comprender bien el enunciado del problema y extraer la información necesaria para escribir la **expresión algebraica** de la función a optimizar y su **dominio**. Es bastante frecuente que la función de una variable pueda expresarse a partir de una función de dos variables y de unas restricciones, también llamadas ligaduras.

2º) Determinar los **extremos relativos** a los que se refiera el problema (máximos y/o mínimos) aplicando lo visto en la proposición 7.

3º) Determinar **"otros puntos evaluables"**, es decir, aquellos puntos que pudieran ser, en principio, extremos absolutos, pero que no sean extremos relativos. Estos serán los puntos aislados, puntos de discontinuidad, puntos angulosos y extremos de intervalos cerrados.

4º) **Evaluar todos los candidatos** extraídos del 2º y 3º paso en la función. Además hemos de ver la tendencia de la función en puntos de discontinuidad y en el infinito para ver posibles ausencias de extremos.

Ejemplo 16: Hallemos dos números positivos cuya suma sea 30 y el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

1º) Sean x e y los números. El problema de optimización es: $Máx\begin{cases} f(x,y)=x^2\cdot y \\ \text{Ligadura: } x+y=30 \end{cases}$.

Si despejamos y de la ligadura y sustituimos en la función, nos queda la función de una variable: $Máx\begin{cases} f(x)=x^2\cdot(30-x)=-x^3+30x^2 \\ Dom\, f=(0,30) \end{cases}$, ya que se trata de dos números positivos.

2º) Es claro que la función es continua y derivable en todo su dominio, por ser polinómica. Hallamos sus máximos relativos: $f'(x)=-3x^2+60x \Rightarrow -3x^2+60x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=0\notin Dom\, f \\ x_2=20 \end{cases}$

$f''(x)=-6x+60 \;\Rightarrow\; f''(20)=-60<0$. Así pues, se trata de un máximo relativo.

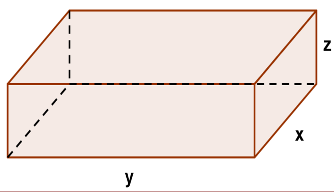
3º) No hay puntos singulares.
4º) Hemos de evaluar en $x=20$ y ver la tendencia de la función en los extremos abiertos:

$$\left.\begin{array}{l} f(20)=4000 \Rightarrow \text{Máximo absoluto} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 30^-} f(x)=0 \end{array}\right\} \text{Así pues, el máximo absoluto se alcanza para } x=20$$

Por tanto, los números buscados son el 20 y al 10, siendo el producto máximo 4000.

Ejemplo 17: Se quiere fabricar una caja de volumen máximo que sea el doble de larga que de ancha y que, además, la suma del ancho más el largo más el alto sea igual a un metro. Calculemos las medidas que debe tener la caja y su volumen máximo:

1º) Llamemos x, y, z al ancho, largo y alto respectivamente, tal y como se representa en el dibujo adjunto. Es evidente que el



problema de optimización es: $Máx\begin{cases} V(x,y)=x\cdot y\cdot z \\ \text{Ligaduras:}\begin{cases} y=2x \\ x+y+z=1 \end{cases}\end{cases}$. Si despejamos y, z de las ligaduras y sustituimos en la función, nos queda la función de una variable: $Máx\begin{cases} V(x)=x\cdot 2x\cdot(1-3x)=-6x^3+2x^2 \\ DomV=\left(0,\frac{1}{3}\right) \end{cases}$, ya que se trata de longitudes positivas.

2º) Es claro que la función es continua y derivable en todo su dominio, por ser polinómica. Hallamos sus máximos relativos: $V'(x)=-18x^2+4x \Rightarrow -18x^2+4x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=0\notin DomV \\ x_2=2/9 \end{cases}$

$V''(x)=-36x+4 \Rightarrow V''(2/9)=-4<0$. Así pues, se trata de un máximo relativo.

3º) No hay puntos singulares.

4º) Hemos de evaluar en $x=2/9$ y ver la tendencia de la función en los extremos abiertos:

$$\left.\begin{array}{l} V(2/9)=8/243 \Rightarrow \text{Máximo abs.} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} V(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1/3^-} V(x)=0 \end{array}\right\} \text{Así pues, el máximo absoluto se alcanza en } x=2/9$$

Por tanto, las medidas de la caja son 4/9 de largo, 2/9 de ancho y 1/3 de alto, siendo el volumen máximo 8/243.

Proponemos las **actividades 12 y 13**.

9.- ACTIVIDADES

ACTIVIDADES INTERCALADAS EN LA TEORÍA

Actividad 1: Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & si\ \ x<2 \\ 2x-4 & si\ \ x\geq 2 \end{cases}$ b) $g(x)=\left|x^2-1\right|$

Actividad 2: Determina los valores de los parámetros a y b para que sea derivable en todo su dominio la función: $f(x)=\begin{cases} x^2+x & si\ x\leq 0 \\ -x^2+ax+b & si\ \ x>0 \end{cases}$

Actividad 3: Dada la función: $f(x)=\begin{cases} 2-3x & si\ \ x\leq 2 \\ x^2-3 & si\ \ x>2 \end{cases}$

a) Estudia la continuidad y la derivabilidad de f.
b) Determina las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función en el punto de abscisa 3.

Actividad 4: Deriva las siguientes funciones:

a) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ b) $y=\left(x^2+x\right)^4$ c) $y=\frac{3}{\sqrt{4x^2+5}}$

d) $y=\left(e^{2x}+1\right)^3$ e) $y=e^{2x^2}-e^x$ f) $y=\ln\left(x^2+7\right)$

g) $y=\ln^2(x-2)$ h) $y=\log_2\left(x^2+1\right)$ i) $y=\frac{1-3x^2}{\ln x}$

j) $y=\ln\left(e^{2x}+1\right)^3$ k) $y=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ l) $y=\ln\left(x\sqrt{4-x^2}\right)$

m) $y=\ln(x-2)^2$ n) $y=\ln\frac{e^x}{e^x-1}$

Actividad 5: Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{e^x}{x^3}$ b) $\underset{x\to 0}{Lím}\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}$ c) $\underset{x\to -1}{Lím}\frac{x^3+2x^2+x}{x^3+x^2-x-1}$

Actividad 6: Estudia la monotonía de las siguientes funciones:

a) $f(x)=4x-x^2$ b) $g(x)=x^3-3x^2+5$ c) $h(x)=\frac{x-3}{x+3}$

Actividad 7: Halla los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $f(x)=-x^2+6x-5$ b) $g(x)=x^3-3x^2+5$ c) $h(x)=\frac{x^2+1}{x+3}$

Actividad 8: Halla b y c para que la curva $y=x^3+bx+c$ tenga un máximo relativo en el punto $(0,4)$.

Actividad 9: Estudia la curvatura y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $f(x)=2x^3-9x^2$ b) $g(x)=x^4-12x^2+8$ c) $h(x)=x\cdot e^{-2x}$

Actividad 10: Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y=4x^3-12x^2-10$ en su punto de inflexión.

Actividad 11: Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y=e^{\frac{1}{x}}$ b) $y=\frac{e^x}{x^2}$

Actividad 12: Teniendo terreno suficiente, se desea vallar una parcela rectangular que limita con un río que pasa por uno de los lados del terreno. La valla del lado opuesto al río cuesta 2 € el metro y la de los otros dos lados a 1 € el metro. ¿Cuál es la superficie máxima que podemos vallar si disponemos de 400 €?

Actividad 13: Recortando convenientemente en cada esquina de una lámina de cartón rectangular de 80x50 cm cuatro cuadrados y doblando convenientemente, se construye una caja. Calcula la longitud del lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja obtenida sea máximo.

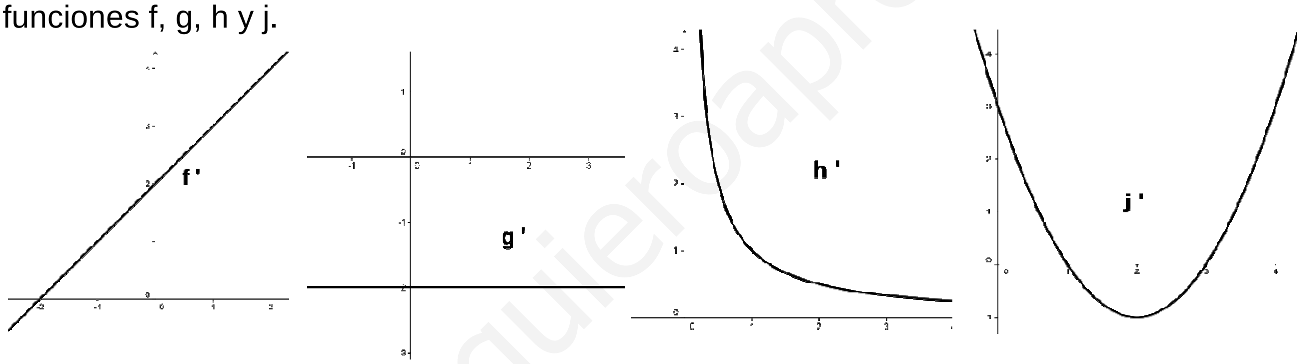
ACTIVIDADES DE DESARROLLO

Actividad 14: Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{e^{5x}}{x^3-1}$ b) $g(x)=4x\cdot L(3x+1)$ c) $h(x)=(x^2-1)(x^3+2x)$

d) $p(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ e) $q(x)=\dfrac{Lx}{x^2}$ f) $r(x)=4x^3-5x+\dfrac{1}{e^x}$

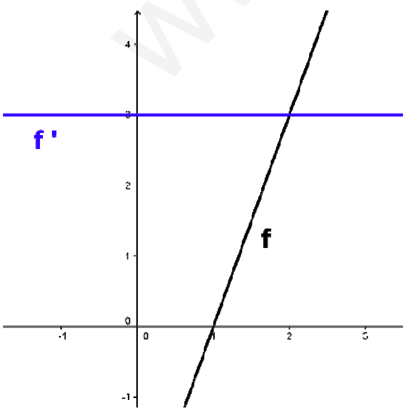
Actividad 15: Las siguientes gráficas corresponden a las funciones derivadas de las funciones f, g, h y j.



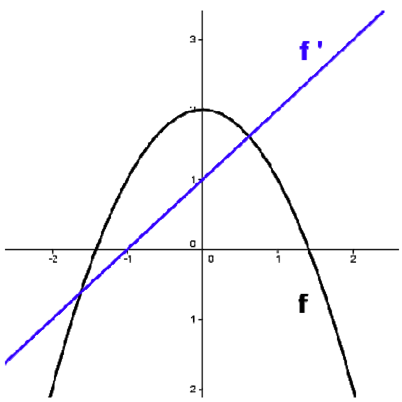
a) ¿Cuál de las siguientes funciones tiene puntos de tangente horizontal?
b) ¿Cuál de estas gráficas es la función derivada de una polinómica de primer grado?
c) ¿Cuál de estas gráficas corresponde a la función derivada de una polinómica de segundo grado?

Actividad 16: ¿Cuál de los siguientes apartados representa la gráfica de una función f y la de su derivada f'? Justifica tu respuesta

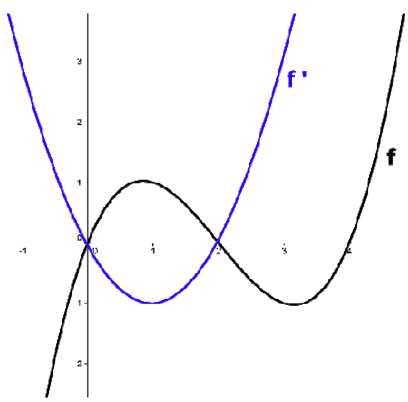
a)



b)

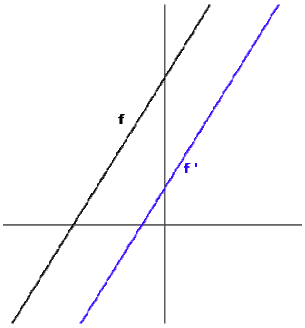


c)

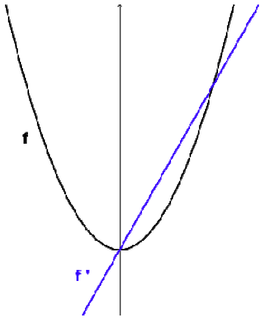


Actividad 17: ¿Cuál de las siguientes gráficas pueden ser posibles? Justifica la respuesta.

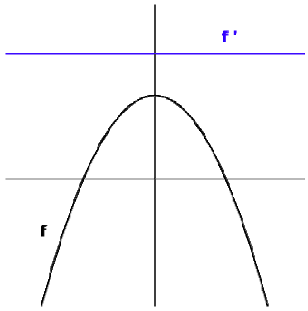
a)



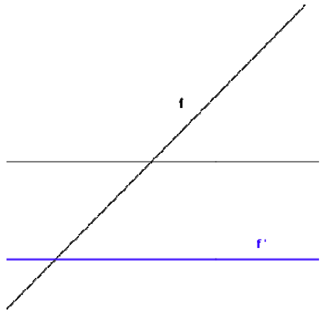
b)



c)



d)



Actividad 18: Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a las gráficas de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $f(x) = x^2 + 6 \quad en \;\; x = 2$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} - 2 \;\; en \;\; x = 1$

Actividad 19: Halla un punto de la curva $y = x^2 - 7x + 2$ en el que la tangente sea perpendicular a la recta $x + 5y = 1$.

Actividad 20: Halla el valor que deben tomar a y b para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} a + x + \ln(x+1) & si \;\; x \geq 0 \\ x^2 + be^{-x} & si \;\; x < 0 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 0$

Actividad 21: Se sabe que la función $f : [0,5] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & si \;\; 0 \leq x < 2 \\ c + \sqrt{x-1} & si \;\; 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$ es derivable en el intervalo $(0,5)$ y verifica que $f(0) = f(5)$. ¿Cuánto valen a, b y c?

Actividad 22: Sea $f(x) = x^2 \cdot e^{\frac{x}{2}}$

a) Calcula los límites en el infinito.
b) Determina los intervalos de monotonía y los extremos locales de la función.

Actividad 23: Indica cuál es el triángulo de área máxima de entre todos los isósceles de perímetro 30 cm.

Actividad 24: Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm. cada uno y los laterales 1 cm. Calcula las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

Actividad 25: Se desea construir una lata de conservas de forma cilíndrica de área total 150 cm^2 y volumen máximo. Halla el radio de la base y la altura de la lata.

Actividad 26: Halla a y b para que la función $f(x) = a\ln x + bx^2 + x$ tenga extremos en los puntos $x = 1$ y $x = 2$.

Actividad 27: Determina los valores de a y b que hacen que la función $f(x) = a \cdot e^{2x} + bx^2$ tenga un punto de inflexión para $x = 0$.

Actividad 28: Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{9x-3}{x^2-2x}$ b) $y = \dfrac{\ln x}{x}$ c) $y = \dfrac{x^2+2x}{e^x}$

ACTIVIDADES DE SELECTIVIDAD

Actividad 29: (2013) Los beneficios de una empresa en sus primeros 8 años vienen dados, en millones de euros, por la función: $B(t) = \dfrac{t^3}{4} - 3t^2 + 9t$, $0 \le t \le 8$, donde la variable t indica el tiempo transcurrido, en años, desde su fundación.

a) Estudia la monotonía y los extremos de $B(t)$.

b) Dibuja la gráfica de $B(t)$ en el intervalo $[0,8]$ y explica, a partir de ella, la evolución de los beneficios de esta empresa en sus 8 años de existencia.

Actividad 30: (2013) Sea $f(x)$ una función cuya función derivada, $f'(x)$, tiene por gráfica una parábola que corta al eje OX en los puntos $(-1,0)$ y $(5,0)$ y con vértice $(2,-4)$.

a) Estudia razonadamente la monotonía de $f(x)$.

b) Determina las abscisas de los extremos relativos de la función $f(x)$.

c) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$, sabiendo que $f(2) = 5$.

Actividad 31: (2013) Estudia la derivabilidad de la función: $f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x \le 0 \\ 1 & si \quad 0 < x \le 3 \\ -x^2+6x+2 & si \quad x > 3 \end{cases}$

Actividad 32: (2013) Sea la función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & si \quad x \le 1 \\ x^2-6x-6 & si \quad x > 1 \end{cases}$

a) Estudia la continuidad y derivabilidad de la función.

b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Actividad 33: (2013) En una empresa, el número de montajes diarios realizados por un trabajador depende de los días trabajados según la función $M(t)=\dfrac{11t+17}{2t+12}$, $t\geq 1$, donde t es el número de días trabajados.
a) ¿Cuántos montajes realiza el primer día? ¿Cuántos días necesitará para realizar cinco montajes diarios?
b) ¿Qué ocurrirá con el número de montajes diarios si trabajara indefinidamente?
c) El dueño de la empresa cree que el número de montajes aumenta con los días de trabajo. Estudiando la función, justifica si es cierta dicha creencia.
d) Dibuja la gráfica de la función.

Actividad 34: (2013) Sea la función: $f(x)=\begin{cases} x^2-bx+1 & si\ \ x\leq 2 \\ 2x+a & si\ \ x>2 \end{cases}$

a) Determina los valores de a y b parra que dicha función sea continua en $x=2$ y, además, tenga un mínimo en $x=1$.
b) Para $a=2$ y $b=6$, determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=-2$.

Actividad 35: (2012)
a) Sea la función: $f(x)=\begin{cases} ax^2+3x & si\ \ x\leq 2 \\ x^2-bx-4 & si\ \ x>2 \end{cases}$. Determina los valores de a y b, para que la función f sea derivable en $x=2$.
b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ en el punto de abscisa $x=0$.

Actividad 36: (2012) De la función f se sabe que su función derivada es $f'(x)=3x^2-8x+5$.

a) Estudia la monotonía y la curvatura de f.
b) Sabiendo que la gráfica pasa por el punto $(1,1)$, calcula la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

Actividad 37: (2012)

a) Dada la función $f(x)=2x^2+ax+b$, determina los valores de a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1,3)$ y alcanza un extremo en $x=-2$.
b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $g(x)=3x^2-2x+1$, en el punto de abscisa $x=1$.

Actividad 38: (2012)
a) Para la función f definida de la forma: $f(x)=\dfrac{ax}{x+b}$, determina, razonadamente, los valores de a y b sabiendo que tiene como asíntota vertical la recta de ecuación $x=-2$ y como asíntota horizontal la de ecuación $y=3$.

b) Para la función g, definida de la forma $g(x)=x^3-3x^2+2$, determina: su dominio, sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus extremos relativos. Con estos datos, haz un esbozo de su gráfica.

Actividad 39: (2012) Sea la función: $f(x)=\begin{cases} ax^2-2x & si \ \ x\leq 2 \\ \dfrac{x}{2}-b & si \ \ x>2 \end{cases}$

a) Calcula a y b para que la función sea continua en todo su dominio y presente un mínimo en $x=1$.
b) Representa gráficamente la función para $a=1.5 \ \ y \ \ b=0.5$.

Actividad 40: (2012) Se considera la función $f(x)=1-\dfrac{2}{x+2}$

a) Determina la monotonía y curvatura de la función.
b) Calcula sus asíntotas.
c) Represéntala gráficamente.

Actividad 41: (2012) Sea $P(t)$ el porcentaje de células, de un determinado tejido, afectadas por un cierto tipo de enfermedad transcurrido un tiempo t, medido en meses:
$P(t)=\begin{cases} t^2 & si \ \ 0\leq t\leq 5 \\ \dfrac{100t-250}{t+5} & si \ \ t>5 \end{cases}$

a) Estudia la continuidad de la función P.
b) Estudia la derivabilidad de P en $t=5$.
c) Estudia la monotonía de dicha función e interpreta la evolución del porcentaje de células afectadas.
d) ¿En algún momento el porcentaje de células afectadas podría valer 50?

Actividad 42: (2012) Sean dos funciones, f y g, tales que las expresiones de sus funciones derivadas son, respectivamente, $f'(x)=x+2 \quad y \quad g'(x)=2$.

a) Estudia la monotonía de las funciones f y g.
b) De las dos funciones f y g, indica, razonadamente, cuál de ellas tiene algún punto en el que su derivada es nula.
c) ¿Cuál de las funciones f y g es una función polinómica de primer grado? ¿Por qué?

Actividad 43: (2012) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=e^{3x}\cdot\ln(2x-5)$ b) $g(x)=\dfrac{3^{2x}}{x^2-1}$ c) $h(x)=\left(3x^2+5x-1\right)^6+x^2-\ln x$

Actividad 44: (2012) Determina los valores que han de tomar a y b para que la función:

$f(x)=\begin{cases} -x^2+ax-7 & si \ \ x<1 \\ 4x-b & si \ \ x\geq 1 \end{cases}$ sea derivable en $\mathbb{R}$.

Actividad 45: (2011)

a) Calcula la función derivada de $f(x)=\dfrac{e^{-2x}}{\left(-x^2+2\right)^2}$

b) Se sabe que la expresión que representa el número medio de clientes $N(t)$ que acuden un día a una cadena de almacenes, en función del número de horas t que llevan abiertos, es $N(t)=at^2+bt \quad ,0\le t\le 8$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Sabiendo que el máximo de clientes que han acudido ese día ha sido de 160 y que se ha producido a las 4 horas de abrir, calcule a y b.

Actividad 46: (2011) Las funciones $I(t)=-2t^2+51t \;\; y \;\; G(t)=t^2-3t+96 \;\; con \quad 0\le t\le 18$ representan, respectivamente, los ingresos y gastos de una empresa, en miles de euros, en función de los años, t, transcurridos desde su inicio y en los últimos 18 años.

a) ¿Para qué valores de t, desde su entrada en funcionamiento, los ingresos coincidieron con los gastos?
b) Determina la función que refleje los beneficios (ingresos menos gastos) en función de t y represéntala gráficamente.
c) ¿Al cabo de cuántos años, desde su entrada en funcionamiento, los beneficios fueron máximos? Calcula el valor de ese beneficio.

Actividad 47: (2011) Sea la función $f(x)=\begin{cases}-x+4 & si \;\; x<2\\ \dfrac{4}{x} & si \;\; 2\le x<4\\ x^2-4x+1 & si \;\; x\ge 4\end{cases}$

a) Estudia la continuidad y la derivabilidad de f.
b) Determina los extremos locales de f.
c) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=3$.

Actividad 48: (2011) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x)=\frac{2^x+x^2}{x} \quad ; \quad g(x)=\left(x^2+1\right)^2\cdot\ln\left(e^{3x}+4\right) \quad ; \quad h(x)=\frac{1}{3x}-\frac{5}{x^2-2}$$

Actividad 49: (2011) Se considera la función dada por: $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{x+2} & si \;\; x\le 0\\ \dfrac{2}{x+2} & si \;\; x>0\end{cases}$

a) Estudia la continuidad y derivabilidad de f.
b) Halla las ecuaciones de las asíntotas de esta función.

Actividad 50: (2011) Sea la función $f(x)=\begin{cases}1-2x^2 & si \;\; x\le 1\\ x^2-2ax+3 & si \;\; 1<x\le 3\\ -x^2+8x-15 & si \;\; x>3\end{cases}$

a) Calcula el valor de a para que f sea continua en $x = 1$.
b) Para $a = 2$, estudia la continuidad y derivabilidad de f.

Actividad 51: (2011) El beneficio, en miles de euros, alcanzado en una tienda de ropa el pasado año, viene dado por la función $B(t)$ representada a continuación:
$B(t) = \begin{cases} \frac{1}{8}t^2 - t + 5 & si \ \ 0 \le t \le 6 \\ \frac{t+1}{2} & si \ \ 6 < t \le 12 \end{cases}$, donde t es el tiempo transcurrido en meses.

a) Estudia la derivabilidad de la función al cabo de 6 meses.
b) ¿Cuándo fue mínimo el beneficio? ¿Cuál fue dicho beneficio?
c) Representa gráficamente la función $B(t)$. ¿Cuándo fue máximo el beneficio? ¿A cuánto ascendió?

Actividad 52: (2011)

a) La gráfica de la función derivada, f' de una función f es una parábola que corta al eje OX en los puntos $(-1,0)$ y $(3,0)$, y tiene su vértice en $(1,-4)$.
Estudia, a partir de ella, la monotonía de la función f e indica la abscisa de cada extremo relativo.
b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = -2e^{3x}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Actividad 53: (2011)

a) Halla el dominio, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la función: $f(x) = \frac{4x}{2x+1}$.
b) Halla los intervalos de monotonía, los extremos relativos, los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión de la función $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$.

Actividad 54: (2011) Sea la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & si \ \ x \le 2 \\ 4 - \frac{a}{x} & si \ \ x > 2 \end{cases}$

a) Halla el valor de a para que dicha función sea continua y estudie la derivabilidad de f para ese valor.
b) Para $a = 1$, ¿existe alguna asíntota vertical de esa función? ¿Y horizontal? Razona las respuestas y calcula, en caso afirmativo, dichas asíntotas.

Actividad 55: (2010) Sea $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$. Calcula:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) Las coordenadas de sus extremos relativos.
c) El punto de la gráfica en el que la pendiente de la recta tangente a dicha gráfica es 4.

Actividad 56: (2010) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{e^{3x}}{1+x^2}$ b) $g(x)=\ln\left\{x\left(1+3x^2\right)\right\}$ c) $h(x)=2^{5x}+\dfrac{1}{x^2}$

Actividad 57: (2010) Sea la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x} & si\ \ x\le 1\\ x^2-4x+5 & si\ \ x>1\end{cases}$

a) Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función.
b) Represéntala gráficamente.

Actividad 58: (2010) Sean las funciones:

$$f(x)=\begin{cases}x^3-x^2+2 & si\ \ -1\le x\le 0\\ -x^3-x^2+2 & si\ \ 0<x\le 1\end{cases}\quad ;\quad h(x)=\begin{cases}-x^2+x+2 & si\ \ -1\le x\le 0\\ -x^2-x+2 & si\ \ 0<x\le 1\end{cases}$$

a) Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función f en $x=0$.
b) Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función h en $x=0$.
c) Si las dos funciones anteriores representan el perfil de un arco puntiagudo de una catedral y el de un arco redondeado (sin picos) de un túnel, indica, razonadamente la que corresponde a la catedral y la que corresponde al túnel.

Actividad 59: (2010) Sea la función definida por: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2} & si\ \ x\le 0\\ x^3-4x^2 & si\ \ 0<x\le 4\\ 1-\dfrac{4}{x} & si\ \ x>4\end{cases}$

a) Estudia su continuidad y derivabilidad.
b) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$.

Actividad 60: (2010) Un depósito lleno de agua se vacía por un sumidero que tiene en la parte baja. El volumen de agua, en m^3, que hay en cada momento en el depósito, desde que empieza a vaciarse, viene dado por la función: $V(t)=8-t+\dfrac{t^2}{32}$, donde t es el tiempo en minutos.

a) ¿Cuál es la capacidad del depósito?
b) ¿Cuánto tiempo tarda en vaciarse?
c) Representa gráficamente la función $V(t)$.
d) Calcula la derivada de esa función en $t=8$ e interpreta su significado.

Actividad 61: (2010) Sea la función: $f(x)=2x^2+ax+b$

a) Determina los valores de a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1,3)$ y alcanza un extremo local en el punto de abscisa $x=-2$.

b) Tomando $a = 8$ y $b = -10$ deduce la curvatura de su gráfica, el valor mínimo que alcanza la función y los valores donde la función se anula.

Actividad 62: (2010)

a) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \left(\frac{2-5x}{3}\right)^2 + \frac{1-2x}{x^2} \quad ; \quad g(x) = (3x+2)^2 \cdot \ln\left(1+x^2\right)$$

b) Halla las asíntotas y los puntos de corte con los ejes de $h(x) = \dfrac{1+2x}{x-2}$.

Actividad 63: (2010) Un consultorio médico abre a las 5 de la tarde y cierra cuando no hay pacientes. La expresión que representa el número medio de pacientes en función del tiempo en horas, t, que lleva abierto el consultorio es $N(t) = 4t - t^2$.

a) ¿A qué hora el número medio de pacientes es máximo? ¿Cuál es ese máximo?
b) Sabiendo que el consultorio cierra cuando no hay pacientes. ¿a qué hora cerrará?
c) Representa gráficamente $N(t) = 4t - t^2$, con $N(t) \geq 0$.

Actividad 64: (2009) Sea la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & si \;\; x < 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$

a) Analiza la continuidad y derivabilidad de la función en su dominio.
b) Determina la asíntota horizontal, si la tiene.
c) Determina la asíntota vertical, si la tiene.

Actividad 65: (2009) Un estudio acerca de la presencia de gases contaminantes en la atmósfera de una ciudad indica que el nivel de contaminación viene dado por la función: $C(t) = -0{,}2t^2 + 4t + 25 \quad , \quad 0 \leq t \leq 25$ (t = años transcurridos desde el año 2000)

a) ¿En qué año se alcanzará un máximo en el nivel de contaminación?
b) ¿En qué año se alcanzará el nivel de contaminación cero?
c) Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $C(t)$ en $t = 8$. Interpreta el resultado anterior relacionándolo con el crecimiento o decrecimiento.

Actividad 66: (2009)

a) Halla las funciones derivadas de las funciones definidas por las siguientes expresiones:

$$f(x) = \left(2x^2 - 3\right)^3 \quad ; \quad g(x) = \frac{\ln(x)}{x} \quad ; \quad h(x) = x \cdot e^{3x}$$

b) Determina el dominio y las asíntotas de la función: $m(x) = \dfrac{2x+3}{x-4}$

Actividad 67: (2009)

a) Sea la función: $f(x)=\begin{cases}1-2x & si\ \ x\le 0\\ \dfrac{1}{x+1} & si\ \ x>0\end{cases}$. Estudia su continuidad y su derivabilidad.

b) Se consideran las funciones: $g(x)=(2x+1)^3$, $h(x)=\dfrac{x-1}{2^x}$. Halla sus funciones derivadas.

Actividad 68: (2009) Sea la función: $f(x)=\begin{cases}3^x & si\ \ x\le 1\\ x^2-6x+8 & si\ \ x>1\end{cases}$

a) Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función f.
b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la grafica de la función f y el punto de abscisa $x=3$.

Actividad 69: (2009) Sea la función: $f(x)=x^3-1$.

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica con los ejes, su monotonía y extremos relativos, si los tuviese.
b) Determina su curvatura y punto de inflexión.
c) Halla los puntos de la gráfica en los que la recta tangente tiene de pendiente 3.

Actividad 70: (2009) Sea la función real de variable real: $f(x)=\begin{cases}-x+1 & si\ \ x<1\\ x-1 & si\ \ x\ge 1\end{cases}$

a) Representa gráficamente la función.
b) Estudia la continuidad de la función.
c) Estudia la derivabilidad de la función.

Actividad 71: (2009) Sea la función $f(x)=\dfrac{x-1}{2x-1}$

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(0,1)$.
b) Estudia la monotonía de f.
c) Halla las asíntotas, los puntos de corte con los ejes y representa gráficamente la función.

Actividad 72: (2009) Sea la función: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida mediante: $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & si\ \ x\le 0\\ x^3-x+1 & si\ \ x>0\end{cases}$

a) ¿Es f continua en $x=0$? ¿Es continua en su dominio?
b) ¿Es f derivable en $x=0$? ¿Es derivable en su dominio?
c) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x=1$.

Actividad 73: (2009) La función derivada de una función f viene dada por:

$f'(x)=3x^2-12x+9$

a) Obtén los intervalos de monotonía de la función f y los valores de x en los que dicha función alcanza sus extremos locales.
b) Determina los intervalos de concavidad y convexidad de la función f.
c) Sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto $(2,5)$, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto.

Actividad 74: (2009) Sea la función $f(x)=ax^3+bx^2+x$

a) Determina el valor de los parámetros a y b sabiendo que la función f tiene un máximo en $x=1$ y que $f(1)=2$.
b) Para $a=b=1$, halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$.

10.- SOLUCIONES A LAS ACTIVIDADES

Actividad 1:

a) f es continua y derivable en $\mathbb{R}$ b) g es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

Actividad 2: $a=1$ y $b=0$

Actividad 3:

a) f es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$ b) $t: y=6x-12$, $n: y=\dfrac{-1}{6}x+\dfrac{13}{2}$

Actividad 4:

a) $y'=\dfrac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$ b) $y'=4\left(x^2+x\right)^3(2x+1)$ c) $y'=\dfrac{-12x}{\sqrt{\left(4x^2+5\right)^3}}$

d) $y'=6e^{2x}\left(e^{2x}+1\right)^2$ e) $y'=4xe^{2x^2}-e^x$ f) $y'=\dfrac{2x}{x^2+7}$ g) $y'=\dfrac{2\ln(x-2)}{x-2}$

h) $y'=\dfrac{2x}{\ln 2\cdot\left(x^2+1\right)}$ i) $y'=\dfrac{-6x^2\ln x-1+3x^2}{x\ln^2 x}$ j) $y'=\dfrac{6e^{2x}}{e^{2x}+1}$ k) $y'=\dfrac{2}{1-x^2}$

l) $y'=\dfrac{2x^2-4}{x\left(x^2-1\right)}$ m) $y'=\dfrac{2}{x-2}$ n) $y'=\dfrac{-1}{e^x-1}$

Actividad 5:

a) $+\infty$ b) 1/2 c) 1/2

Actividad 6:

a) f es creciente en $(-\infty,2)$ y decreciente en $(2,+\infty)$
b) g es creciente en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ y decreciente en $(0,2)$
c) h es creciente en $\mathbb{R}-\{-3\}$

Actividad 7:

a) f tiene un máximo relativo en $A(3,4)$

b) g tiene un máximo relativo en $A(0,5)$ y un mínimo relativo en $B(2,1)$

c) h tiene un máximo relativo en $B\left(-\sqrt{10}-3\ ,\ -2\sqrt{10}-6\right)$ y un mínimo relativo en $B\left(\sqrt{10}-3\ ,\ 2\sqrt{10}-6\right)$

Actividad 8: $b=0 \quad y \quad c=4$

Actividad 9:

a) f es convexa en $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ y cóncava en $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$. Tiene un punto de inflexión en $A\left(\frac{3}{2},-\frac{27}{2}\right)$.

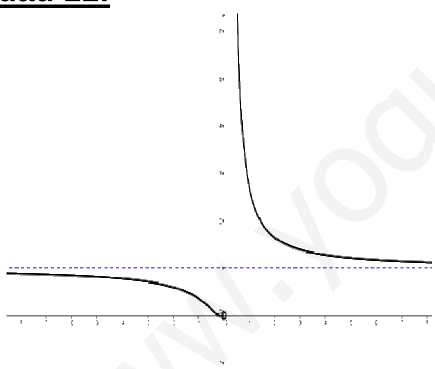
b) g es convexa en $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$ y cóncava en $\left(-\sqrt{2}\ ,\sqrt{2}\right)$. Tiene dos puntos de inflexión en $A\left(\sqrt{2},-12\right)$ y $B\left(\sqrt{2},-12\right)$.

c) h es convexa en $(1,+\infty)$ y cóncava en $(-\infty,1)$. Tiene un punto de inflexión en $A\left(1,\frac{1}{e^2}\right)$.

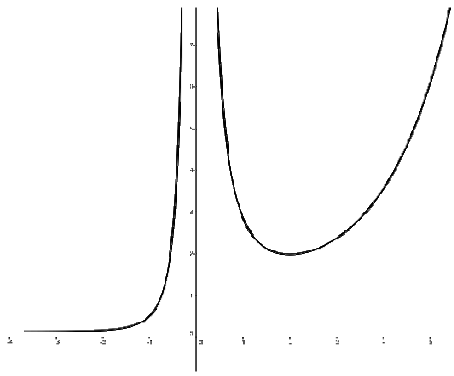
Actividad 10: $y=-12x-6$

Actividad 11:

a)



b)



Actividad 12: La superficie máxima es de 10000 m^2, para un cuadrado de lado 100 m.

Actividad 13: 10 cm

Actividad 14:

a) $f'(x)=\dfrac{e^{5x}\left(5x^3-3x^2-5\right)}{\left(x^3-1\right)^2}$

b) $g'(x)=4\cdot L(3x+1)+\dfrac{12x}{3x+1}$

c) $h'(x)=5x^4+3x^2-2$

d) $p'(x)=\dfrac{-4}{(x-2)^2}$

e) $q'(x)=\dfrac{1-2Lx}{x^3}$

f) $r'(x)=12x^2-5-\dfrac{1}{e^x}$

Actividad 15:

a) $f \;\; y \;\; j$ b) $g'(x)$ c) $f'(x)$

Actividad 16: La del apartado a)

Actividad 17: La del apartado b)

Actividad 18:

a) $\begin{cases} t: y = 4x + 2 \\ n: y = \dfrac{-1}{4}x + \dfrac{21}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} t: y = -3x + 3 \\ n: y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3} \end{cases}$

Actividad 19: El punto es $(6,-4)$

Actividad 20: $a = -2 \;\; y \;\; b = -2$

Actividad 21: $a = -3/2 \;\;,\;\; b = 1/2 \;\; y \;\; c = -2$

Actividad 22:

a) El límite en $-\infty$ vale 0 y el límite en $+\infty$ vale $+\infty$.
b) Es estrictamente creciente en $(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-4,0)$.
Presenta un mínimo relativo en $O(0,0)$ y un máximo relativo en $A\left(-4,16/e^{2}\right)$

Actividad 23: El equilátero de lado 10 cm.

Actividad 24: La base de la hoja 10 cm y la altura 5 cm.

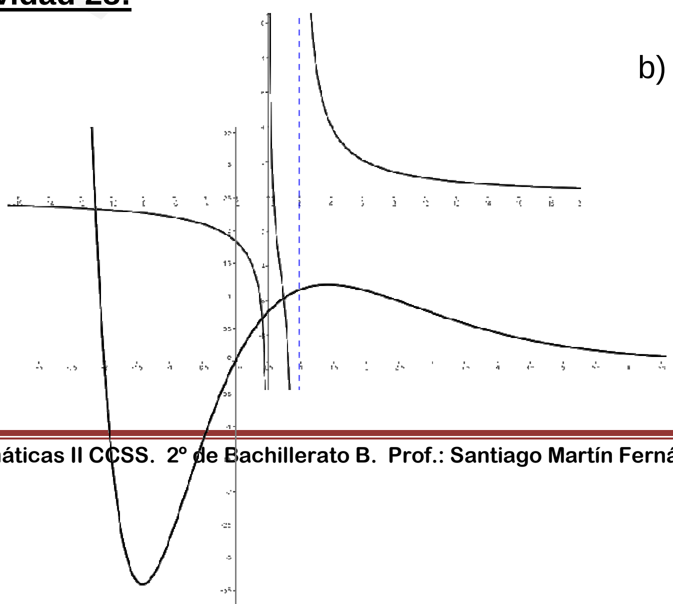
Actividad 25: El radio de la base $\dfrac{5}{\sqrt{\pi}}cm$ y la altura es de $\dfrac{10}{\sqrt{\pi}}cm$.

Actividad 26: $a = -2/3 \;\; y \;\; b = -1/6$

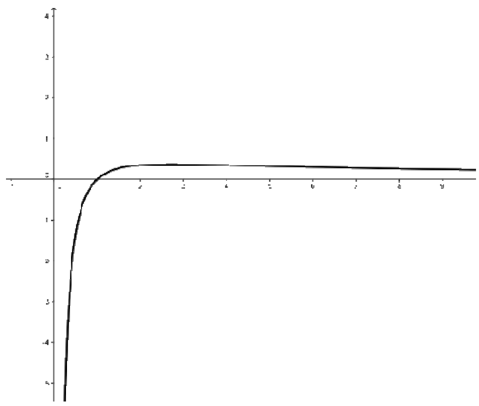
Actividad 27: Debe cumplirse la relación $b = -2a \;\; con \; a \neq 0$

Actividad 28:

a)



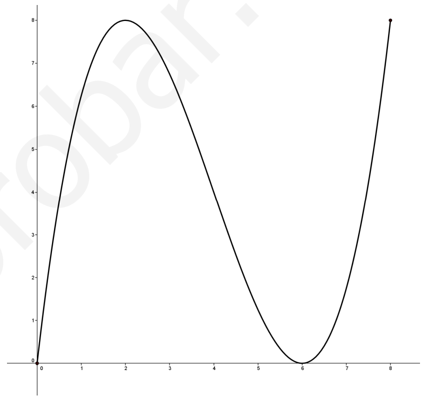
b)



c)

Actividad 29:

a) B es creciente en $(0,2)\cup(6,8)$ y decreciente en $(2,6)$. Tiene un máximo relativo en $A(2,8)$ y un mínimo relativo en $B(6,0)$.



b) Los beneficios crecen durante los dos primeros años y desde el sexto año al octavo y decrecen desde el segundo hasta el sexto año.

Actividad 30:

a) f es creciente en $(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$ y decreciente en $(-1,5)$.
b) f tiene un máximo relativo para $x=-1$ y un mínimo relativo para $x=5$.
c) $y=-4x+13$.

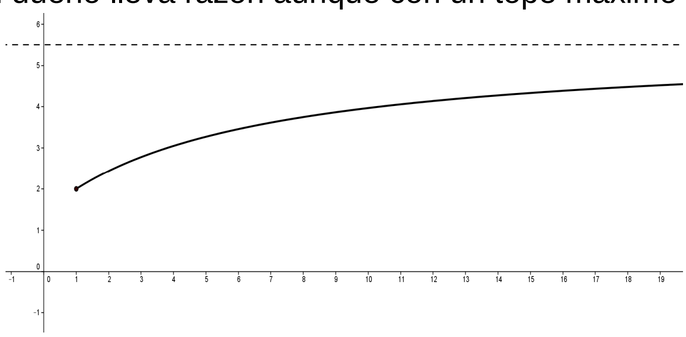
Actividad 31: f es derivable en $\mathbb{R}-\{0,3\}$

Actividad 32:

a) f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$. b) $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$

Actividad 33:

a) El primer día realiza 2 montajes. Necesita 43 días para realizar 5 montajes diarios.
b) Se irá acercando a 5,5 montajes diarios de media.
c) El dueño lleva razón aunque con un tope máximo de 5,5 montajes.
d)



Actividad 34:

a) $a = -3$, $b = 2$ b) $y = -10x - 3$

Actividad 35:

a) $a = 2$, $b = -7$ b) $y = -3x - 2$

Actividad 36:

a) f es creciente en $(-\infty,1) \cup \left(\frac{5}{3},+\infty\right)$ y decreciente en $\left(1,\frac{5}{3}\right)$. Es convexa en $\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$ y cóncava en $\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)$.

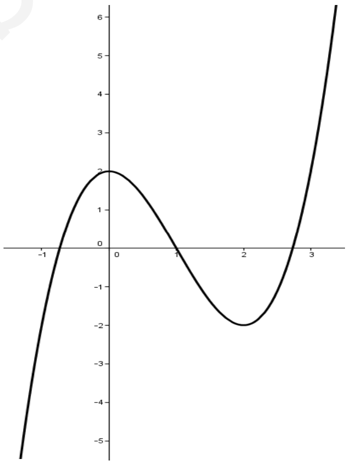
b) $y = 1$

Actividad 37:

a) $a = 8$, $b = -7$ b) $y = 4x - 2$

Actividad 38:

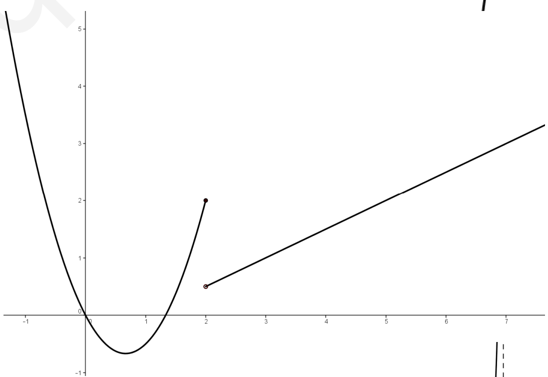
a) $a = 3$, $b = 2$



b) $Dom(g) = \mathbb{R}$. Es creciente en $(-\infty,0) \cup (2,+\infty)$ y decreciente en $(0,2)$. Tiene un máximo relativo en $A(0,2)$ y un mínimo relativo en $B(2,-2)$.

Actividad 39:

a) $a = 1$, $b = 1$ b)

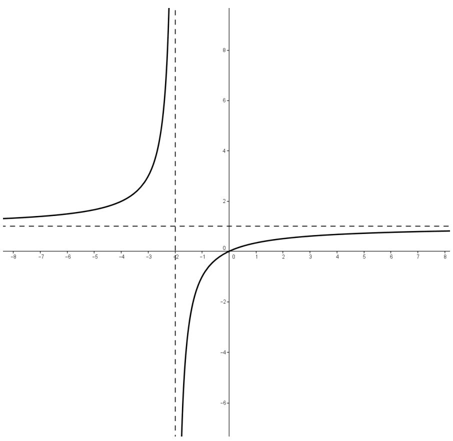


Actividad 40:

a) f es creciente en $(-\infty,-2) \cup (-2,+\infty)$. Es convexa en $(-\infty,-2)$ y cóncava en $(-2,+\infty)$.

b) $x = -2$, $y = 1$

c) Ver a la derecha.



Actividad 41:

a) P es continua.
b) P es derivable en $(0,5)\cup(5,+\infty)$
c) P es creciente en todo su dominio, por lo que el porcentaje de células afectadas crece con el tiempo.
d) Sí, a los 10 meses.

Actividad 42:

a) f es creciente en $(-2,+\infty)$ y decreciente en $(-\infty,-2)$. Por su parte g es creciente en $\mathbb{R}$
b) f, ya que g' no se anula al ser constante.
c) g, ya que es de grado 0.

Actividad 43:

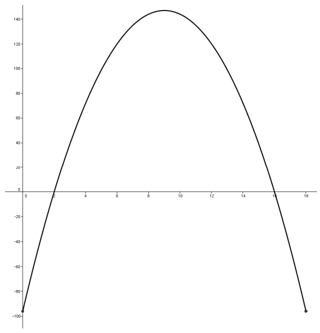
a) $f'(x)=3e^{3x}\cdot\ln(2x-5)+\dfrac{2e^{3x}}{2x-5}$ b) $g'(x)=\dfrac{2\cdot 3^{2x}\cdot\left(\ln 3\cdot\left(x^2-1\right)-x\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$

c) $h'(x)=6\left(3x^2+5x-1\right)^5\cdot(6x+5)+2x-\dfrac{1}{x}$

Actividad 44: $a=6$, $b=6$

Actividad 45:

a) $f'(x)=\dfrac{2e^{-2x}\left(x^2+2x-2\right)}{\left(-x^2+2\right)^3}$ b) $a=-10$, $b=80$



Actividad 46:

a) Para $t=2$ y $t=16$ b) $B(t)=-3t^2+54t-96$

c) Al cabo de los 9 años, con un beneficio máximo de 147000 €

Actividad 47:

a) f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{4\}$.
b) f tiene un mínimo relativo en $A(4,1)$ y no tiene máximo relativo.
c) $y=\dfrac{-4}{9}x+\dfrac{24}{9}$

Actividad 48:

a) $f'(x)=\dfrac{2^x(x\ln 2-1)+x^2}{x^2}$ b) $g'(x)=\left(x^2+1\right)\left[4x\cdot\ln\left(e^{3x}+4\right)+\dfrac{3e^{3x}\left(x^2+1\right)}{e^{3x}+4}\right]$

c) $h'(x)=\dfrac{-1}{3x^2}+\dfrac{10x}{\left(x^2-2\right)^2}$

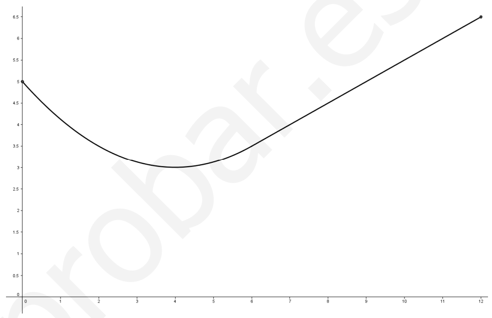
Actividad 49:

a) f es continua en $\mathbb{R}-\{-2,2\}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{-2,0,2\}$ b) $x=-2$, $x=2$, $y=0$

Actividad 50:

a) $a=\dfrac{5}{2}$ b) f es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$.

Actividad 51:



a) B es derivable en todo su dominio.
b) El mínimo beneficio fue a los 4 meses y ascendió a 3000 €.
c) El máximo beneficio fue a los 12 meses y ascendió a 6500 €.

Actividad 52:

a) f es creciente en $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$ y decreciente en $(-1,3)$. Presenta un mínimo relativo para $x=3$ y un máximo relativo para $x=-1$.
b) $y=-6x-2$.

Actividad 53:

a) $Dom\,f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$. Corta a los ejes en el punto: $O(0,0)$. Las asíntotas son $x=\dfrac{-1}{2}$, $y=2$.
b) g es creciente en todo su dominio y no tiene extremos relativos. Es convexa en $(-1,+\infty)$ y cóncava en $(-\infty,-1)$.

Actividad 54:

a) $a=4$. Para ese valor, f des derivable en $\mathbb{R}$.
b) No tiene asíntotas verticales. Tiene una asíntota horizontal en $y=4$.

Actividad 55:

a) f es creciente en $(0,4)$ y decreciente en $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$.

b) Tiene un máximo relativo en $A\left(4,\dfrac{32}{3}\right)$ y un mínimo relativo en $O(0,0)$.

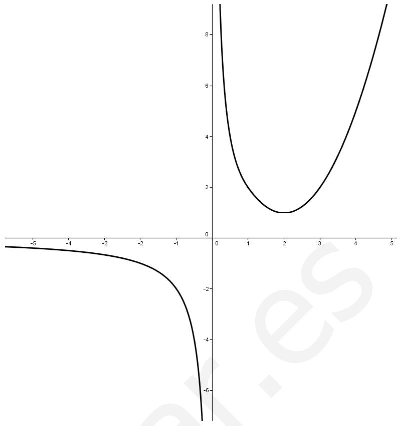
c) El punto es $B\left(2,\dfrac{16}{3}\right)$.

Actividad 56:

a) $f'(x)=\dfrac{e^{3x}\left(3x^2-2x+3\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$ b) $g'(x)=\dfrac{9x^2+1}{3x^3+x}$ c) $h'(x)=5\ln 2\cdot 2^{5x}-\dfrac{2}{x^3}$

Actividad 57:

a) f es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$. b)



Actividad 58:

a) f es continua y derivable en $x=0$.
b) h es continua pero no es derivable en $x=0$.
c) f corresponde al arco redondeado del túnel porque es derivable y h al puntiagudo de la catedral por no ser derivable (punto anguloso).

Actividad 59:

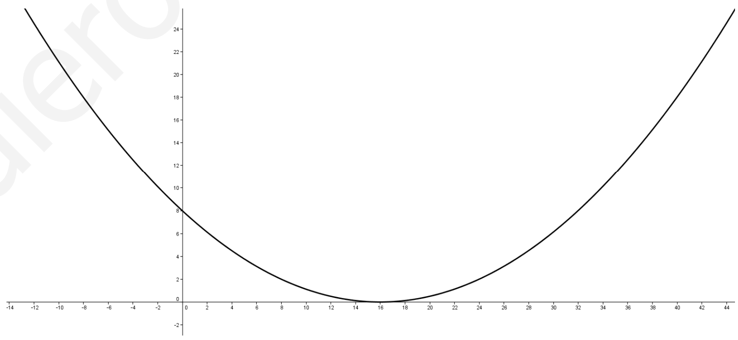
a) f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{4\}$. b) $y=-4x$

Actividad 60:

a) 8 m^3

b) 16 minutos

c) Ver a la derecha



d) $V'(8)=-\dfrac{1}{2}$. Es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x=8$.

Actividad 61:

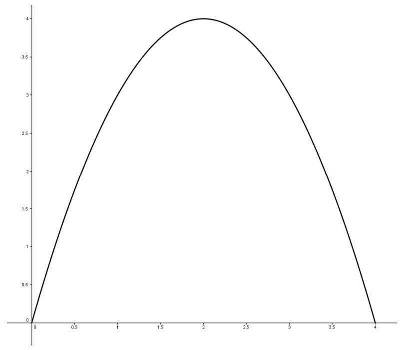
a) $a=8$, $b=-7$
b) Es convexa en $\mathbb{R}$. El mínimo es $A(-2,-18)$. Se anula en $x=1$, $x=-5$.

Actividad 62:

a) $f'(x)=\dfrac{50x^4-20x^3+18x-18}{9x^3}$ $g'(x)=2(3x+2)\left[3\ln\left(1+x^2\right)+\dfrac{3x^2+2x}{1+x^2}\right]$

b) Las asíntotas son $x=2$, $y=2$. Los puntos de corte son $A\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ y $B\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$.

Actividad 63:



a) A las 7 de la tarde con una media de 4 pacientes.

b) Cierra a las 9 de la noche.

c) Ver a la derecha.

Actividad 64:

a) f es continua y derivable en $\mathbb{R}$. b) $y=1$ c) No tiene

Actividad 65:

a) En 2010 b) En 2025 c) $C'(8)=0{,}8$ por lo que la función es creciente en $t=8$.

Actividad 66:

a) $f'(x)=12x\left(2x^2-3\right)^2$, $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $h'(x)=e^{3x}(3x+1)$

b) $Dom(m)=\mathbb{R}-\{4\}$ y las asíntotas son $x=4$, $y=2$.

Actividad 67:

a) f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$ b) $g'(x)=6(2x+1)^2$, $h'(x)=\dfrac{1-\ln 2\cdot(x-1)}{2^x}$

Actividad 68:

a) f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$. b) $y=-1$

Actividad 69:

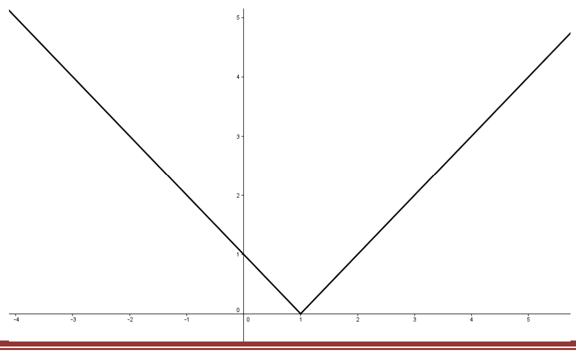
a) Los puntos de corte son $A(1,0)$ y $B(0,-1)$. Es creciente en todo su dominio y no tiene extremos relativos.

b) Es convexa en $(0,+\infty)$ y cóncava en $(-\infty,0)$. Tiene un punto de inflexión en $B(0,-1)$.

c) $A(1,0)$ y $C(-1,-2)$.

Actividad 70:

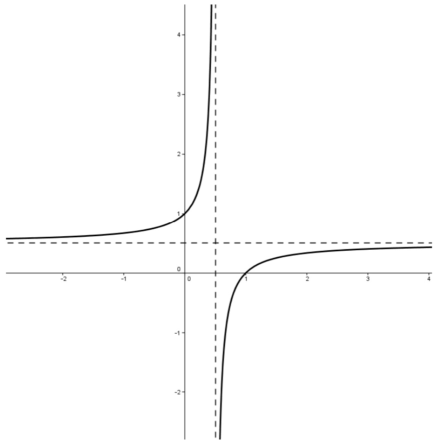
a)



b) f es continua en $\mathbb{R}$

c) f es derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$

Actividad 71:



a) $y = x + 1$

b) f es creciente en todo su dominio

c) Las asíntotas son $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$. Los puntos de corte con los ejes son $A(1,0)$ y $B(0,1)$.

Actividad 72:

a) f es continua en $x = 0$ y, por tanto, en todo su dominio.
b) f es derivable en $x = 0$ y, por tanto, en todo su dominio.
c) $y = 2x - 1$

Actividad 73:

a) f es creciente en $(-\infty,1) \cup (3,+\infty)$ y decreciente en $(1,3)$. Tiene un máximo relativo para $x = 1$ y un mínimo relativo parar $x = 3$.
b) f es convexa en $(2,+\infty)$ y cóncava en $(-\infty,2)$. c) $y = -3x + 11$

Actividad 74:

a) $a = -3$, $b = 4$ b) $y = x$

NOTA IMPORTANTE: Las actividades de la 29 a la 74 son de Selectividad. En las dos páginas web siguientes se encuentran las soluciones de todos los exámenes de forma detallada:

- **http://emestrada.wordpress.com/category/matematicas-aplicadas-a-las-ccss-ii/**
- ***http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/***