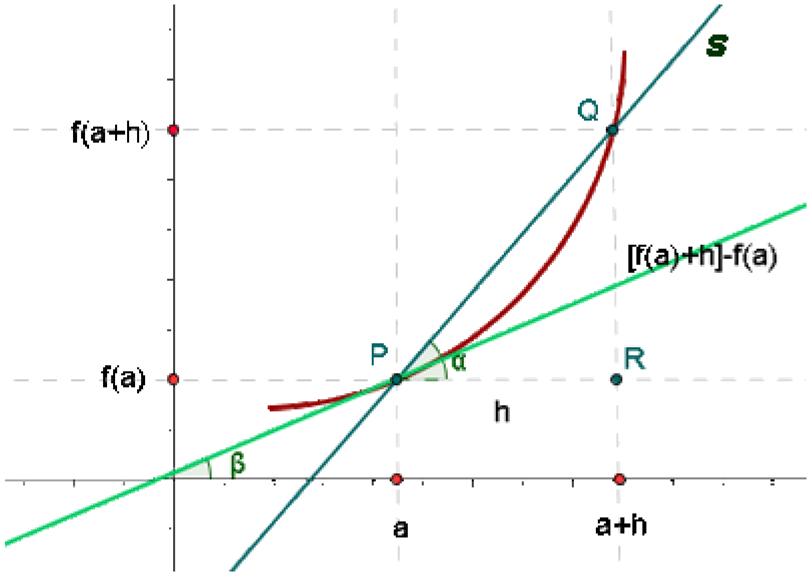
Ecuación de la recta tangente

Pendiente de la recta tangente



La pendiente de la recta tangente a una curva en un punto es la derivada de la función en dicho punto.

$$tg\beta = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{h} = f'(a)$$

Recta tangente a una curva en un punto

La recta tangente a a una curva en un punto es aquella que pasa por el punto (a, f(a)) y cuya pendiente es igual a f '(a).

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

<u>Ejemplo:</u>

Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 5x + 6$ paralela a la recta $3x + y - 2 = 0$.

Sea el punto de tangencia (a, f(a))

m = −3

f'(a) = 2a - 5

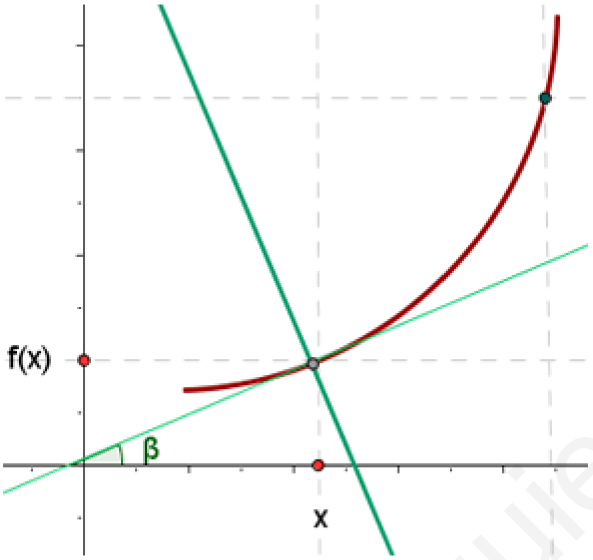
2a − 5 = −3a = 1

P(1, 2)

y − 2= -3 (x − 1)**y = -3x + 5**

Ecuación de la recta normal

Pendiente de la recta normal



La pendiente de la recta normal a una curva en un punto es la opuesta de la inversa de la pendiente de la recta tangente, por ser rectas perpendiculares entre sí.

$$m_n = -\frac{1}{m_t}$$

Es decir, es la opuesta de la inversa de la derivada de la función en dicho punto.

$$m_n = -\frac{1}{f'(a)}$$

Recta normal a una curva en un punto

La recta normal a a una curva en un punto a es aquella que pasa por el punto (a, f(a)) y cuya pendiente es igual a la inversa de la opuesta de f '(a).

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la parábola $y = x^2 + x + 1$ paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

Sea el punto de tangencia (a, b)

m = 1

f'(a) = 2a + 12a + 1 = 1 a = 0

Punto de tangencia:(0, 1)

Recta tangente:

y − 1 = x **y = x +1**

Recta normal:

m= 1P(0, 1)

y − 1 = −x **y = −x + 1**

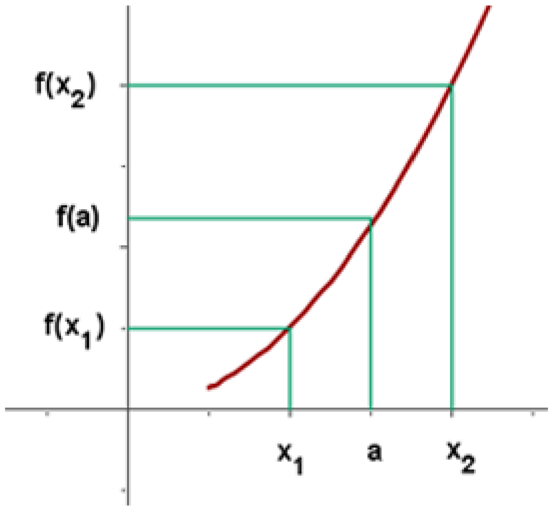
Crecimiento y decrecimiento

Función estrictamente creciente

f es estrictamente creciente en a $\Leftrightarrow \exists E(a) / \forall x \in E(a)$:

$x > a \Rightarrow f(x) > f(a)$

$x < a \Rightarrow f(x) < f(a)$

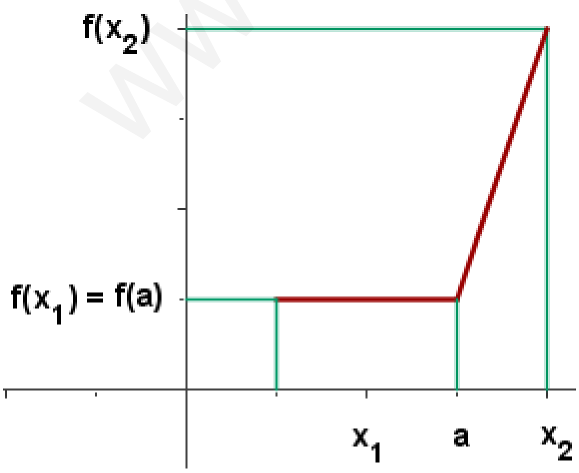


Función creciente

f es creciente en a $\Leftrightarrow \exists E(a) / \forall x \in E(a)$:

$x > a \Rightarrow f(x) \geq f(a)$

$x < a \Rightarrow f(x) \leq f(a)$

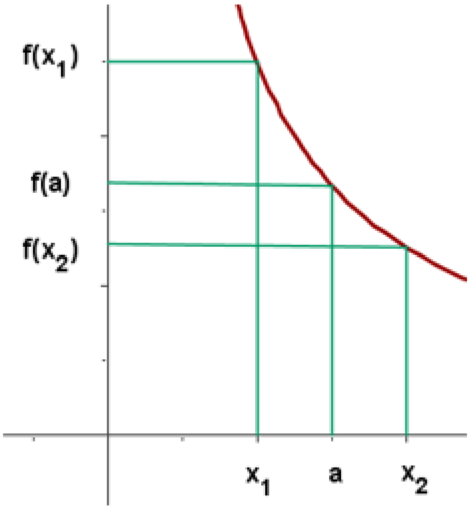


Función estrictamente decreciente

f es estrictamente decreciente en a $\Leftrightarrow \exists\, E(a) / \forall x \in E(a)$:

$x > a \Rightarrow f(x) < f(a)$

$x > a \Rightarrow f(x) < f(a)$

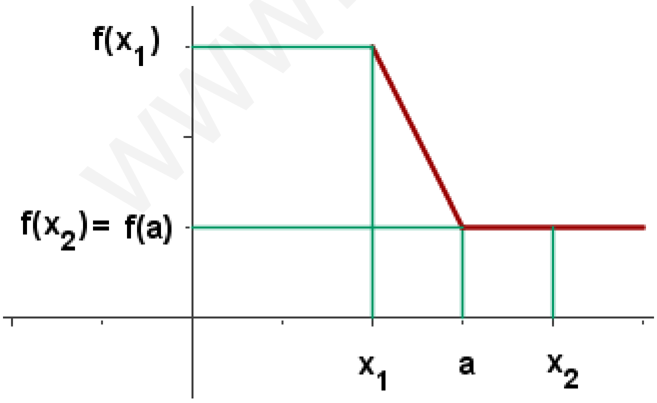


Función decreciente

f es decreciente en a $\Leftrightarrow \exists\, E(a) / \forall x \in E(a)$:

$x > a \Rightarrow f(x) \leq f(a)$

$x > a \Rightarrow f(x) \leq f(a)$



Crecimiento

Si f es derivable en a:

f es estrictamente creciente en a $\Rightarrow f'(a) > 0$

Decrecimiento

Si f es derivable en a:

f es estrictamente decreciente en a $\Rightarrow f'(a) < 0$

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Crecimiento

Si f es derivable en a:

f es estrictamente creciente en a $\Rightarrow f'(a) > 0$

Decrecimiento

Si f es derivable en a:

f es estrictamente decreciente en a $\Rightarrow f'(a) < 0$

Cálculo de los intervalos de crecimiento y decrecimiento

Estudiar los **intervalos de crecimiento y decrecimiento** de:

$f(x) = x^3 - 3x + 2$

Para hallar su crecimiento y decrecimiento vamos a realizar los siguientes pasos:

1. Derivar la función.

$f'(x) = 3x^2 - 3$

2. Obtener las raíces de la derivada primera, para ello hacemos: f'(x) = 0.

$3x^2 - 3 = 0 \quad x = -1 \quad x = 1$

3. Formamos intervalos abiertos con los ceros (raíces) de la derivada primera y los puntos de discontinuidad (si los hubiese)

4. Tomamos un valor de cada intervalo, y hallamos el signo que tiene en la derivada primera.

Si f'(x) > 0 es creciente.

Si f'(x) < 0 es decreciente.

Del intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos x = -2, por ejemplo.

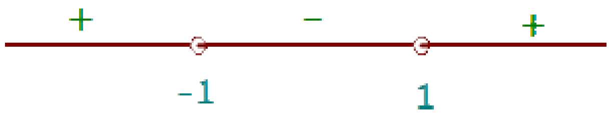
$f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 > 0$

Del intervalo $(-1, 1)$ tomamos x = 0, por ejemplo.

$f'(0) = 3(0)^2 - 3 < 0$

Del intervalo $(1, \infty)$ tomamos x = 2, por ejemplo.

$f'(2) = 3(2)^2 - 3 > 0$



5. Escribimos los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

De crecimiento: **$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$**

De decrecimiento: **$(-1,1)$**

Ejemplo de intervalos de crecimiento y decrecimiento

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$$

Dominio

$(x-1)^2=0 \qquad x=1 \qquad D=\mathbb{R}-\{1\}$

$$f'(x)=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3} \qquad\qquad \frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=0$$

$x=0 \qquad x=3$

x	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Creciente

$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(3,\infty)$

Decreciente

$(1,3)$

Extremos relativos o locales

Si f es derivable en a, **a es un extremo relativo o local** si:

1. Si f'(a) = 0.

2. Si f''(a) ≠ 0.

Máximos locales

Si f y f' son derivables en a, **a** es un **máximo relativo o local** si se cumple:

1. f'(a) = 0

2. f''(a) < 0

Mínimos locales

Si f y f' son derivables en a, **a** es un **mínimo relativo o local** si se cumple:

1. f'(a) = 0

2. f''(a) > 0

Cálculo de máximos y mínimos

Estudiar los máximos y mínimos de:

$f(x) = x^3 - 3x + 2$

Para hallar sus extremos locales, seguiremos los siguientes pasos:

1. Hallamos la derivada primera y calculamos sus raíces.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$

$x = -1$ $x = 1$.

2. Realizamos la 2ª derivada, y calculamos el signo que toman en ella los ceros de derivada primera y si:

$f''(x) > 0$ Tenemos un mínimo.

$f''(x) < 0$ Tenemos un máximo.

$f''(x) = 6x$

$f''(-1) = -6$ Máximo

$f''(1) = 6$ Mínimo

3. Calculamos la imagen (en la función) de los extremos relativos.

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$

$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$

Máximo(−1, 4) Mínimo(−1, 0)

Concavidad y convexidad

Si f y f' son derivables en a

$$\begin{cases} f''(a) > 0 \Rightarrow f \text{ es cóncava en } a \\ f''(a) < 0 \Rightarrow f \text{ es convexa en } a \end{cases}$$

Hemos tomado el criterio que el valle tiene forma cóncava y la montaña forma convexa.

Intervalos de concavidad y convexidad

Estudiar los intervalos la concavidad y la convexidad de la función:

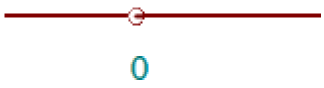
$f(x) = x^3 - 3x + 2$

Para estudiar la concavidad y la convexidad, efectuaremos los siguientes pasos:

1. Hallamos la derivada segunda y calculamos sus raíces.

$f''(x) = 6x$ $6x = 0$ $x = 0$.

2. Formamos intervalos abiertos con los ceros (raíces) de la derivada segunda y los puntos de discontinuidad (si los hubiese).



3. Tomamos un valor de cada intervalo, y hallamos el signo que tiene en la derivada segunda.

Si $f''(x) > 0$ es cóncava.

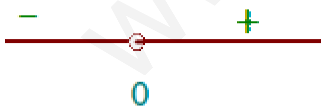
Si $f''(x) < 0$ es convexa.

Del intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$, por ejemplo.

$f''(-1) = 6(-1) < 0$ Convexa.

Del intervalo $(0, \infty)$ tomamos $x = 1$, por ejemplo.

$f''(1) = 6\ (1) > 0$ Cóncava.



4. Escribimos los intervalos:

Concavidad: $(0, \infty)$

Convexidad: $(-\infty, 0)$

Ejemplo de intervalos de concavidad y convexidad

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$$

Dominio

$(x-1)^2=0$ $\quad x=1$ $\quad D=\mathbb{R}-\{1\}$

$$f'(x)=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3} \qquad \frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=0$$

$$f''(x)=\frac{6x}{(x-1)^4} \qquad \frac{6x}{(x-1)^4}=0$$

$x=0$

x	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$
	$\cap$	$\cup$	$\cup$

Cóncava

$(0,1)\cup(1,\infty)$

Convexa

$(-\infty,0)$

Puntos de inflexión de una función

En ellos la función no es cóncava ni convexa sino que hay cambio de concavidad a convexidad o viceversa.

Si f y f' son derivables en a

a es un punto de inflexión $\Rightarrow f''(a)=0$

$f'''(a)\neq 0$

Estudio de los puntos de inflexión

Calcular los puntos de inflexión de:

$f(x) = x^3 - 3x + 2$

Para hallar los puntos de inflexión, seguiremos los siguientes pasos:

1. Hallamos la derivada segunda y calculamos sus raíces.

$f''(x) = 6x$ $6x = 0$ $x = 0$.

2. Realizamos la derivada tercera, y calculamos el signo que toman en ella los ceros de derivada segunda y si:

$f'''(x) \neq 0$ Tenemos un punto de inflexión.

$f'''(x) = 6$ Será un punto de inflexión.

3. Calculamos la imagen (en la función) del punto de inflexión.

$f(0) = (0)^3 - 3(0) + 2 = 2$

Punto de inflexión: (0, 2)

Máximos, mínimos y puntos de inflexión

$f'(a) > 0 : f \textit{ creciente}$ en a

$f'(a) < 0 : f \textit{ decreciente}$ en a

$$f'(a)=0\begin{cases} f''(a)>0 : a\ \textit{mínimo} \\ f''(a)<0 : a\ \textit{máximo} \\ f''(a)=0 \begin{cases} f'''(a)>0 : f\ \textit{creciente}\text{ en a} \\ f'''(a)<0 : f\ \textit{creciente}\text{ en a} \\ f'''(a)=0 \begin{cases} f^{IV}(a)>0 : a\ \textit{mínimo} \\ f^{IV}(a)<0 : a\ \textit{máximo} \\ f^{IV}(a)=0\ \{etc\ldots \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$f''(a)>0$: f *cóncava* en a

$f''(a)<0$: f *convexa* en a

$$f''(a)=0\begin{cases} f'''(a)\neq 0 : a\ \textit{punto de inflexión} \\ f'''(a)=0 \begin{cases} f^{IV}(a)>0 : f\ \textit{cóncava en a} \\ f^{IV}(a)<0 : f\ \textit{convexa en a} \\ f^{IV}(a)=0 \quad \{etc\ldots \end{cases} \end{cases}$$

Representación gráfica de funciones

Para representar una función calcularemos aquellos puntos o intervalos donde la función tiene un comportamiento especial, que determinaremos mediante el estudio de los siguientes apartados:

1. ***Dominio de una función.***
2. ***Simetría.***
3. ***Periodicidad.***
4. ***Puntos de corte con los ejes.***
5. ***Asíntotas.***
6. ***Ramas parabólicas.***
7. ***Crecimiento y Decrecimiento.***
8. ***Máximos y mínimos.***
9. ***Concavidad y convexidad.***
10. ***Puntos de inflexión.***

Ejemplo de representación de una función

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$$

Dominio

$1+x^2=0$ $\qquad\qquad$ $D=\mathbb{R}$

Simetría

$$f(-x)=\frac{-x}{1+(-x)^2}=-f(x)$$

Simetría respecto al origen.

Puntos de corte con los ejes

Punto de corte con OY:

$$\frac{x}{1+x^2}=0 \qquad (0,0)$$

Puntos de corte con el eje OY

$(0,0)$

Asíntotas

Asíntota horizontal

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=0 \qquad y=0$$

No tiene asíntotas verticales ni oblicuas.

Crecimiento y decrecimiento

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} \qquad \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=0 \qquad x=\pm 1$$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Creciente : $(-1,1)$

Decreciente : $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

Mínimos

Mínimo $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$

Máximos

$$\text{Máximo}\left(1,\frac{1}{2}\right)$$

Concavidad y convexidad

$$f''(x)=\frac{2x^3-6x}{\left(1+x^2\right)^3} \qquad \frac{2x^3-6x}{\left(1+x^2\right)^3}=0 \qquad x=0 \qquad x=\pm\sqrt{3}$$

x	$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3},0\right)$	$\left(0,\sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3},\infty\right)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

$$\text{Cóncava}:\left(-\sqrt{3},0\right)\cup\left(\sqrt{3},\infty\right)$$

$$\text{Convexa}:\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(0,\sqrt{3}\right)$$

Puntos de inflexión

$$\text{Puntos de inflexión}:\left(-\sqrt{3},\frac{-\sqrt{3}}{4}\right)(0,0) \qquad \left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

Representación gráfica