



**Actividad 10:** Calcula:

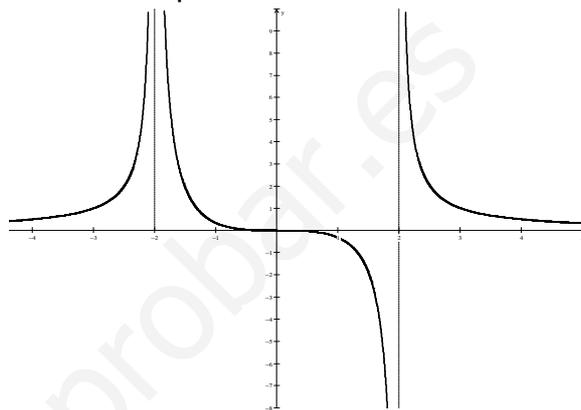
a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-5}{3}$       b)  $\lim_{x \rightarrow -3} (x^3 - 2)$       c)  $\lim_{x \rightarrow -2} |-x^2 + x + 3|$       d)  $\lim_{x \rightarrow 1/2} e^{1-x}$

**Actividad 11:** Calcula los límites laterales de las funciones en los puntos indicados:

a)  $f(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{si } x < 3 \\ 2x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$  en  $x=3$       b)  $g(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x+2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$  en  $x=1$

**Actividad 12:** Determina los límites siguientes de la función representada a continuación:

a)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$       b)  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$       c)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$



d)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$       e)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$       f)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

**Actividad 13:** Determina razonadamente el valor de los límites siguientes:

a)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x}{(x+2)^3}$       b)  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x}{(x+2)^3}$       c)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x}{(x+2)^3}$       d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^4}$       e)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x^2}{(x-3)^2}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-7x}{x-1}$       g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^5 - \sqrt{x} + 1)$       h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0,5^x$       i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x$       j)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4^x)$

k)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3 + 1}$       l)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$       m)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} e^{\frac{1}{x-2}}$       n)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} e^{\frac{1}{x-2}}$       ñ)  $\lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{1}{x-2}}$

**Actividad 14:** Determina razonadamente el valor de los límites siguientes:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{x^2 + 2x - 3}$       b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 2}$       c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$       d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{4x^2-x}}$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-2} - \sqrt{x+1})$       f)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2}$       g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 5} - (2x - 3))$       h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + x}$

**Actividad 15:** Calcula los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x-2}{3x}\right)^{2x-1}$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x)^{1-3x}$       c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{3x+2}\right)^{\frac{x-1}{2}}$       d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}$

**Actividad 16:** Calcula  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  en los siguientes casos:

a)  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 5}$       b)  $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$       c)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

**Actividad 17:** Determina el valor de  $a$  para el cual:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{4x^2 + ax + 1}) = 1$

**Actividad 18:** Calcula el valor de  $k$ , de modo que sean ciertas las siguientes igualdades:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2kx^2 - 7x + 5}{7x^2 - 3} = -1$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{kx^2 - k}{x^2 + 3x + 2} = 4$

**Actividad 19:** Determina razonadamente las asíntotas de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$

b)  $g(x) = \frac{2x^3 + x}{x^2 - 3x}$

**Actividad 20:** Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \frac{2x^3 + 5x}{x^3 + 1}$

b)  $g(x) = x^2 - \sqrt{x^4 - x^3}$

**Actividad 21:** Estudia las asíntotas verticales de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

b)  $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$

**Actividad 22:** Obtén las asíntotas de la función  $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ .

**Actividad 23:** Calcula  $a$  y  $b$  para que la función:  $f(x) = \frac{ax - 3}{x + b}$  tenga como asíntotas:  
 $y = 2$  y  $x = -2$

**Actividad 24:** (S) Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b)  $g(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

**Actividad 25:** Calcula el valor de  $a$  y  $b$  para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq -1 \\ b & \text{si } -1 < x < 3 \\ 2x + 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

**Actividad 26:** Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 1 \\ 1/2 & \text{si } x = 1 \\ -(x-1)^2 + 1 & \text{si } 1 < x \end{cases} \quad \text{b) } g(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$$

**Actividad 27:** Estudia la continuidad y halla los límites en el infinito de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 4x & \text{si } x > 2 \end{cases} . \text{ Representa, después, la función } y = f(x)$$

**Actividad 28:** Estudia la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0 \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{|x+2|}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ -2 & \text{si } x = -2 \end{cases} \quad \text{en } x = -2$$

**Actividad 29:** Estudia la continuidad de cada una de las siguientes funciones para los distintos valores del parámetro  $a$ .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq 2 \\ a - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \leq 0 \\ x + 2a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

**Actividad 30:** Halla los valores de  $a$  y  $b$  para que sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^3 - 1 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

**Actividad 31:** Halla los valores de los parámetros para que las siguientes funciones sean continuas:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2(x-3)^a}{x^2 - 6x + 9} & \text{si } x \neq 3 \\ 9 & \text{si } x = 3 \end{cases} \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 9 & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x < 2 \text{ ó } x > 5 \end{cases}$$

**Actividad 32:** El número de individuos, en millones, de una población, viene dado por la

función:  $P(t) = \frac{15 + t^2}{(t+1)^2}$ , donde  $t$  se mide en años transcurridos desde  $t = 0$ . Calcula:

- La población inicial.
- El tamaño de la población a largo plazo.

**Actividad 33:** Se ha investigado el tiempo (T, en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento de los deportistas (x, en

$$T(x) = \begin{cases} \frac{300}{x+30} & \text{si } 0 \leq x \leq 30 \\ \frac{1125}{(x-5)(x-15)} + 2 & \text{si } x > 30 \end{cases}$$

- a) Justifica que la función T es continua en todo su dominio.  
 b) Por mucho que se entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 1 minuto? ¿Y en menos de 2?

**Actividad 34:** (2003) Calcula  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(1+x) - \operatorname{sen}x}{x \cdot \operatorname{sen}x} \right)$ , siendo  $\ln(1+x)$  la función logaritmo neperiano de  $1+x$ .

**Actividad 35:** (2003) Considera la función definida para  $x \neq -2$  por  $f(x) = \frac{2x^2 + 2}{x+2}$

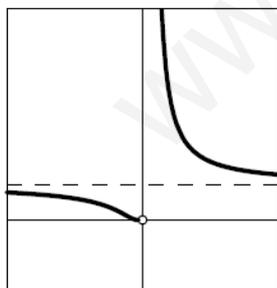
- a) Halla las asíntotas de la gráfica de  $f$ .  
 b) Estudia la posición relativa de la gráfica de  $f$  respecto de sus asíntotas.

**Actividad 36:** (2004) Se sabe que  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{e^x - 1} - \frac{a}{2x} \right)$  es finito. Determina el valor de  $a$  y calcula el límite.

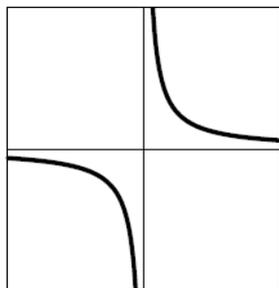
**Actividad 37:** (2005) Se sabe que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \alpha \operatorname{sen}x}{x^2}$  es finito. Determina el valor de  $\alpha$  y calcula el límite.

**Actividad 38:** (2005) Considera las tres funciones cuyas expresiones respectivas vienen dadas, para  $x \neq 0$ , por  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ ,  $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$  y  $h(x) = \ln|x|$ .

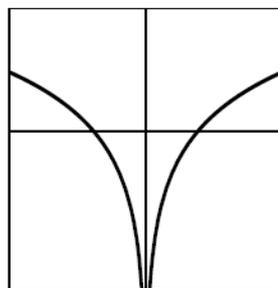
- a) Halla las ecuaciones de las asíntotas de las gráficas de  $f$ ,  $g$  y  $h$ .  
 b) Identifica, entre las que siguen, la gráfica de cada función, justificando la respuesta.



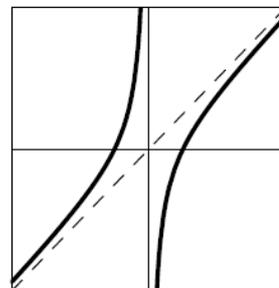
Gráfica 1



Gráfica 2



Gráfica 3



Gráfica 4

**Actividad 39:** (2006) Calcula  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$ , siendo  $\ln$  la función logaritmo neperiano.

**Actividad 40:** (2006) Sea  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por:  $f(x) = \frac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2}$ , siendo

ln la función logaritmo neperiano. Estudia la existencia de asíntota horizontal para la gráfica de esta función. En caso de que exista, hállala.

**Actividad 41:** (2008) Sea  $f$  la función definida para  $x \neq 0$  por  $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ . Determina las asíntotas de la gráfica de  $f$ .

**Actividad 42:** (2008) Dada la función definida para  $x \neq 0$  por  $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ , determina las asíntotas de su gráfica.

**Actividad 43:** (2009) Calcula  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x^2 - 1} \right)$ , siendo  $\ln$  la función logaritmo neperiano.

**Actividad 44:** (2009) Se considera la función  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$ . Determina la asíntota de la gráfica de  $f$ .

**Actividad 45:** (2009) Sea  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} -\frac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2} & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$ .

a) Sabiendo que  $f$  es continua, calcula  $a$  (ln denota logaritmo neperiano).

b) Estudia la existencia de asíntota horizontal para la gráfica de esta función. En caso de que exista, determina su ecuación.

**Actividad 46:** (2010) Calcula  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^2}$

# SOLUCIONES

**Actividad 1:**  $a = 5$

**Actividad 2:** a)  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$       b)  $g^{-1}(x) = \frac{-x+4}{5}$

**Actividad 3:**  $A(x) = x\sqrt{400-x^2}$ , siendo  $Dom(A) = [0,20]$

**Actividad 4:** a)  $(f \circ g)(x) = \frac{2x+2}{2x-3}$       b)  $f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{x-1}$       c)  $g^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

**Actividad 5:**

a)  $Dom(f) = \mathbb{R} - \{2,3\}$       b)  $Dom(g) = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$       c)  $Dom(h) = \left(-2, \frac{1}{3}\right]$   
d)  $Dom(j) = \left[\frac{3}{2}, 4\right) \cup (4, +\infty)$       e)  $Dom(k) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

**Actividad 6:**

a)

1) Dominio y recorrido:  $Dom(i) = \mathbb{R}$  e  $Im(i) = [-3,3]$ .

2) Puntos de corte con los ejes y signo: El único punto de corte con los ejes es  $(0,0)$ .

$$i(x) > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

$$i(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0)$$

3) Continuidad:  $i$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ .

4) Asíntotas:  $i$  tiene una asíntota horizontal en  $y = 0$ .

5) Simetrías:  $i$  es impar.

6) Periodicidad:  $i$  no es periódica.

7) Monotonía:

$i$  es estrictamente creciente en:  $(-1,1)$

$i$  es estrictamente decreciente en:  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

8) Extremos relativos:  $i$  presenta un máximo relativo en  $(1,3)$  y un mínimo relativo en  $(-1,-3)$ .

9) Acotación y extremos absolutos:  $i$  está acotada, presentando un máximo absoluto en  $(1,3)$  y un mínimo absoluto en  $(-1,-3)$ .

10) Curvatura:

$i$  es convexa en:  $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

$i$  es cóncava en:  $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

11) Puntos de inflexión:  $i$  tiene tres puntos de inflexión en  $\left(-\sqrt{3}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  $(0,0)$  y  $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ .

b)

1) Dominio y recorrido:  $Dom(p) = \mathbb{R} - \{-1,1\}$  e  $Im(p) = \mathbb{R}$ .

2) Puntos de corte con los ejes y signo: El único punto de corte con los ejes es  $(0,0)$ .

$$p(x) > 0 \quad \forall x \in (-1,0) \cup (1, +\infty)$$

$$p(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (0,1)$$

3) Continuidad:  $p$  es continua en  $\mathbb{R} - \{-1,1\}$ , presentando discontinuidades de salto infinito para  $x = -1$  y  $x = 1$

4) Asíntotas:  $p$  tiene dos asíntotas verticales en  $x = -1$  y  $x = 1$ , y una oblicua en  $y = x$ .

5) Simetrías:  $p$  es impar.

6) Periodicidad:  $p$  no es periódica.

7) Monotonía:

$p$  es estrictamente creciente en:  $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

$p$  es estrictamente decreciente en:  $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

8) Extremos relativos:  $p$  presenta un mínimo relativo en  $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$  y un máximo

relativo en  $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ .

9) Acotación y extremos absolutos:  $p$  no está acotada inferior ni superiormente.

10) Curvatura:

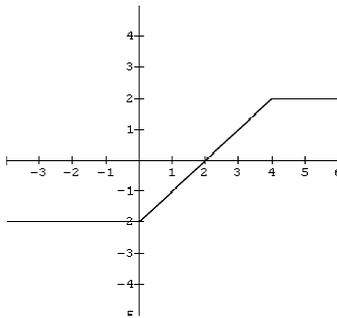
$p$  es convexa en:  $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

$p$  es cóncava en:  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

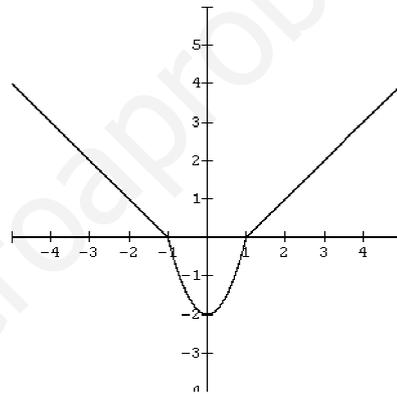
11) Puntos de inflexión:  $p$  tiene un punto de inflexión en  $(0, 0)$ .

### Actividad 7:

a)

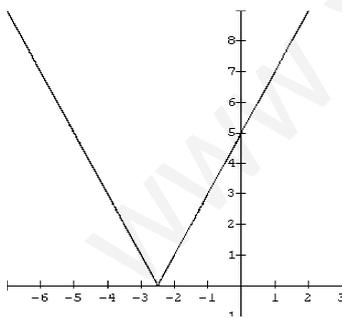


b)

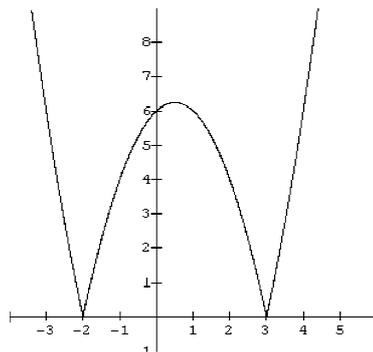


### Actividad 8:

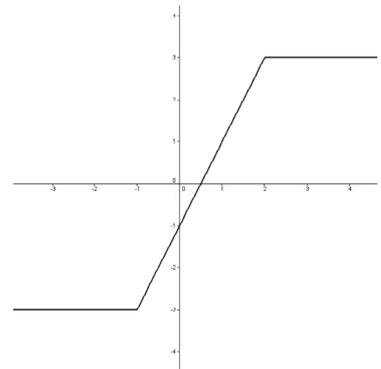
a)



b)



c)



### Actividad 9:

a) -3

b)  $3/2$

c) 0

d) 0

e) 1

f)  $\neq$

g) 2

h) 1

i)  $\neq$

### Actividad 10:

a)  $-4/3$

b) -29

c) -3

d)  $\sqrt{e}$

**Actividad 11:**

a)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 4$  ;  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$  ;  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$

**Actividad 12:**

a)  $+\infty$       b)  $+\infty$       c)  $+\infty$       d)  $-\infty$       e)  $+\infty$       f)  $\nexists$

**Actividad 13:**

a)  $+\infty$       b)  $-\infty$       c)  $\exists$       d)  $+\infty$       e)  $+\infty$

f)  $\nexists$       g)  $+\infty$       h)  $+\infty$       i)  $+\infty$       j) 0

k) 0      l)  $+\infty$       k) 0      l)  $+\infty$       m)  $\nexists$

**Actividad 14:**

a)  $\frac{1}{4}$       b)  $\frac{2}{3}$       c) 0      d)  $\frac{3}{2}$       e) 0      f) 32      g) 3      h) 0

**Actividad 15:**

a)  $+\infty$       b) 0      c) 0      d)  $\frac{3}{2}$

**Actividad 16:**

a) 0      b) 1      c) 0

**Actividad 17:**  $a = -4$

**Actividad 18:**

a)  $k = \frac{-7}{2}$       b)  $k = -2$

**Actividad 19:**

a)  $x = -2$  ,  $x = 2$  ,  $y = 1$

b)  $x = 3$  ,  $y = 2x + 6$

**Actividad 20:**

a)  $x = -1$  ;  $y = 2$

b)  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}$

**Actividad 21:**

a)  $x = 2$  ;  $x = -2$

b)  $x = 0$

**Actividad 22:**  $x=1$  ,  $x=-1$  ,  $y=x$

**Actividad 23:**  $a=2$  y  $b=2$

**Actividad 24:**

- a)  $f$  es continua en  $\mathbb{R} - \{1\}$ , presentando en  $x=1$  un salto finito
- b)  $f$  es continua en  $\mathbb{R} - \{0\}$ , presentando en  $x=0$  un salto infinito

**Actividad 25:** Debe ser  $a=-9$  y  $b=10$

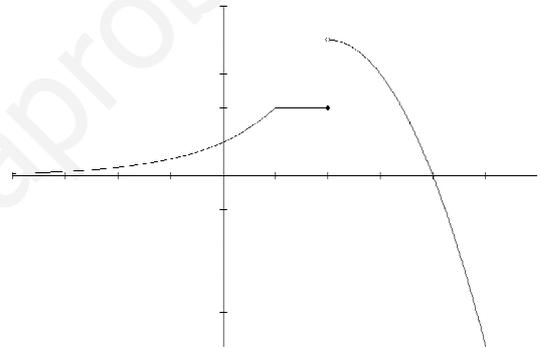
**Actividad 26:**

- a)  $f$  es continua en  $\mathbb{R} - \{1\}$ , presentando una discontinuidad de salto finito en  $x=1$ .
- b)  $g$  es continua en  $\mathbb{R} - \{-1,2\}$ , presentando una discontinuidad de salto infinito en  $x=-1$  y una evitable en  $x=2$

**Actividad 27:** La función es continua en  $\mathbb{R} - \{2\}$ , presentando una discontinuidad de salto finito para  $x=2$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$



**Actividad 28:**

- a) Salto finito en  $x=0$
- b) Salto finito en  $x=-2$

**Actividad 29:**

a)

Caso 1: si  $a=-8$  , es continua en  $\mathbb{R}$

Caso 2: si  $a \neq -8$  , es continua en  $\mathbb{R} - \{2\}$  , presentando en  $x=2$  una discontinuidad de salto finito.

b)

Caso 1: si  $a=1/2$  , es continua en  $\mathbb{R}$

Caso 2: si  $a \neq 1/2$  , es continua en  $\mathbb{R} - \{0\}$  , presentando en  $x=0$  una discontinuidad de salto finito.

**Actividad 30:**  $a=2$  y  $b=3$

**Actividad 31:**

- a)  $a=2$
- b)  $a=8$  ,  $b=-11$

**Actividad 32:**

- a) 15 millones de individuos.
- b) 1 millón de individuos.

**Actividad 33:**

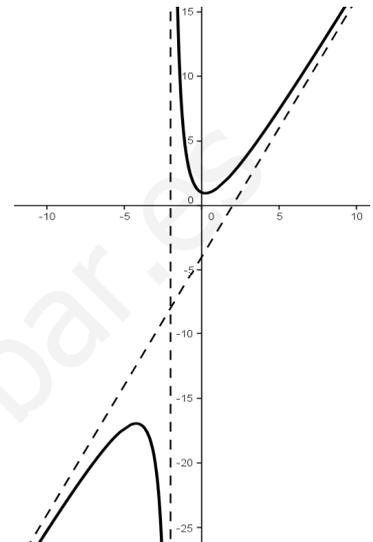
- a) Basta hacer los límites.
- b) No. Tampoco

**Actividad 34:**  $-1/2$

**Actividad 35:**

a)  $x = -2$  ;  $y = 2x - 4$

b) En la asíntota vertical: la gráfica tiende a  $-\infty$  por la izquierda y a  $+\infty$  por la derecha. En la asíntota oblicua la gráfica está por encima de la asíntota en  $-\infty$  y por debajo en  $+\infty$ .



**Actividad 36:**  $a = 2$  y el límite es  $-1/2$

**Actividad 37:**  $\alpha = 1$  y el límite es  $0$

**Actividad 38:**

La gráfica de  $f$  tiene asíntotas  $x = 0$  e  $y = x$  y se corresponde con la gráfica 4.

La gráfica de  $g$  tiene  $x = 0$  e  $y = 1$  y se corresponde con la gráfica 1.

La gráfica de  $h$  tiene  $x = 0$  y se corresponde con la gráfica 3.

**Actividad 39:**  $1/2$

**Actividad 40:**  $y = 0$

**Actividad 41:**  $x = 0$  e  $y = x$

**Actividad 42:**  $x = 0$  ;  $y = 1$  e  $y = -1$

**Actividad 43:**  $1$

**Actividad 44:**  $y = 2x - \frac{1}{2}$

**Actividad 45:**

- a)  $a = -1$
- b)  $y = 0$

**Actividad 46:**  $0$