UNIDAD 11.- APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

1. MONOTONÍA: CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

Estudiando el signo de la derivada primera podemos saber cuándo una función es creciente o decreciente. Esto se llama también el estudio de la **monotonía** de la función.

Propiedad:

- Si $f'(x) > 0$, entonces la función f es estrictamente creciente en x

- Si $f'(x) < 0$, entonces la función f es estrictamente decreciente en x

Ejemplo: Estudiar la monotonía (intervalos de crecimiento y decrecimiento) de la función $f(x) = -x^2 + 5x - 1$

Lo primero es fijarnos que su dominio es todo $\mathbb{R}$, $Dom(f) = \mathbb{R}$

Calculamos su función derivada, que resulta $f'(x) = -2x + 5$. Que como vemos también tiene sentido en todo $\mathbb{R}$, o lo que es lo mismo, su **dominio de derivabilidad** es todo $\mathbb{R}$

Vamos a estudiar ahora el signo de f'. Primero veamos dónde se anula.

$f'(x) = 0 \rightarrow -2x + 5 = 0 \rightarrow x = 5/2$. Con este punto construimos una tabla de signos para f'

	$(-\infty, \frac{5}{2})$	$(\frac{5}{2}, +\infty)$
$f'(x) = -2x + 5$	**+**	**-**
	$\uparrow$	$\downarrow$

Los signos los obtenemos de igual forma a como hacíamos en los dominios (sustituyendo por un valor del intervalo)

De la tabla de signos podemos concluir que:

f es estrictamente creciente en $(-\infty, \frac{5}{2})$

f es estrictamente decreciente en $(\frac{5}{2}, +\infty)$

Ejemplo: Estudiar la monotonía de $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

Tenemos que $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

Calculamos la función derivada, $f'(x) = \dfrac{2x\cdot(x-1) - x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$. Como vemos, la función es derivable (tiene por dominio de derivabilidad) en $\mathbb{R} - \{1\}$

Vemos ahora dónde se anulan el numerador y el denominador, para poder construir la tabla de signos de la derivada.

Del numerador: $x^2 - 2x = 0 \rightarrow x\cdot(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Del denominador: $(x-1)^2 = 0 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

Ya pasamos a construir la tabla de signos:

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
x^2-2x	**+**	**-**	**-**	**+**
	↑	↓	↓	↑

<u>NOTA</u>: Como podéis observar en la tabla no hemos puesto el factor del numerador pues al ser $(x-1)^2$, éste siempre será positivo demos el valor que le demos y por tanto no influye en el signo de f'. Si el exponente hubiese sido impar, entonces si teníamos que haberlo puesto.

Podemos concluir que:

f es creciente en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

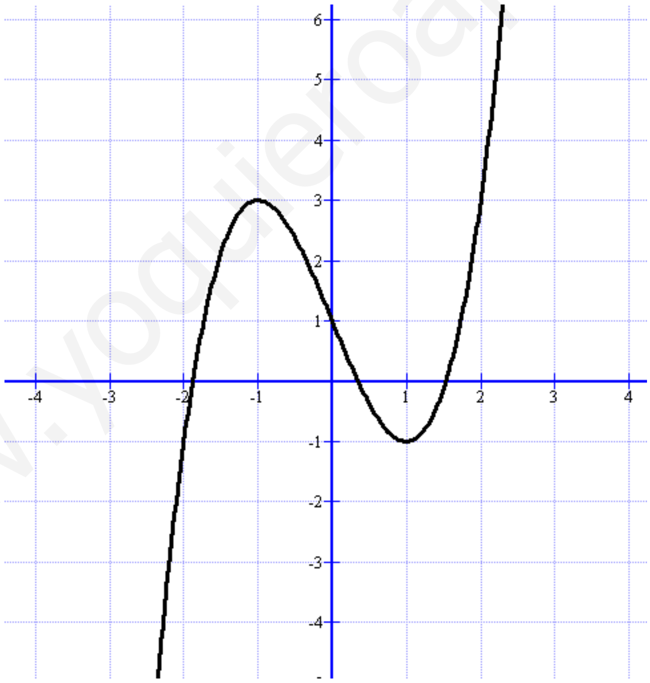
f es decreciente en $(0,1)\cup(1,2)$

2. **<u>EXTREMOS RELATIVOS</u>**

Una función $y=f(x)$ tiene un **<u>máximo relativo</u>** en un punto de abscisa x_0 (o en el punto $(x_0, f(x_0))$) si $f(x_0)$ es el mayor valor que alcanza f en un entorno de x_0.

Una función $y=f(x)$ tiene un **<u>mínimo relativo</u>** en un punto de abscisa x_0 (o en el punto $(x_0, f(x_0))$) si $f(x_0)$ es el menor valor que alcanza f en un entorno de x_0.

<u>Ejemplo</u>: Tenemos la función $y=f(x)$ cuya gráfica es la siguiente:

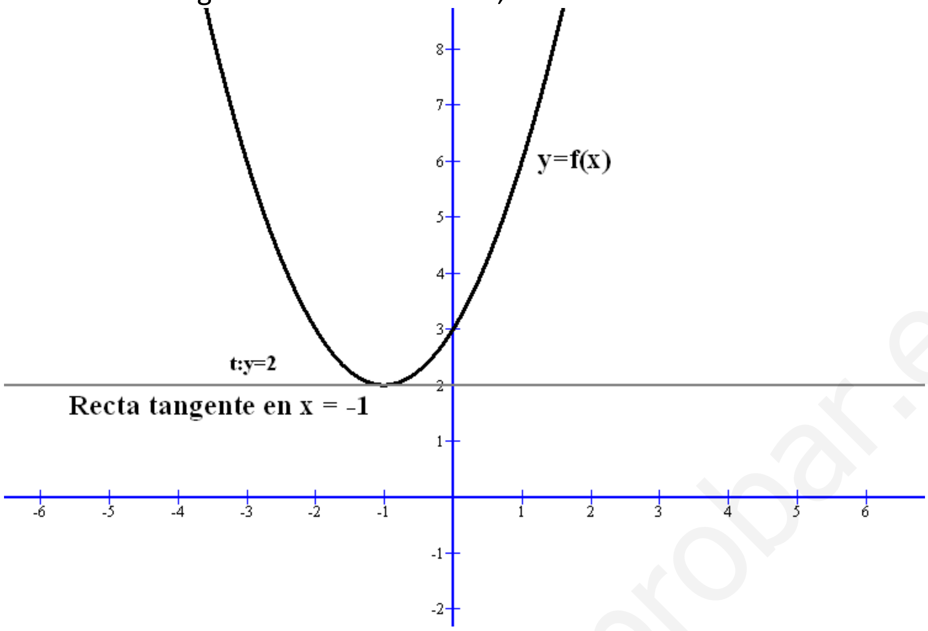


Podemos observar que en el punto de abscisa $x_0=-1$, la función tiene un máximo relativo, que como vemos no es absoluto. También se suele decir que la función tiene un máximo relativo en (-1,3).

Podemos observar que en el punto de abscisa $x_0=1$, la función tiene un mínimo relativo, que como vemos no es absoluto. También se suele decir que la función tiene un mínimo relativo en (1,-1).

¿Cómo calcular los extremos relativos de una función dada por su criterio o fórmula? Si observamos la gráfica del ejemplo anterior nos damos cuenta que las rectas tangentes tanto en el máximo como en el mínimo relativo son horizontales. Esto quiere decir que su pendiente es 0, o sea, $f'(-1)=0$ y $f'(1)=0$

Efectivamente, en los extremos relativos, si una función es derivable, su derivada tiene que valer 0.
Lo vemos gráficamente de nuevo, con otra función diferente:



Como se ve la recta tangente en el mínimo tiene por pendiente 0 (es una recta horizontal), y como sabemos la pendiente de la recta tangente en el punto coincide con el valor de la derivada. Por tanto, $f'(-1)=0$

Propiedad: Si una función $y=f(x)$ tiene un extremo relativo en un punto de abscisa x_0 y es derivable en x_0, entonces $f'(x_0)=0$

Vamos a tener dos maneras de hacerlo:

1ª forma: Usando el estudio del crecimiento y decrecimiento.

Si vemos que a la izquierda de un punto x_0 (que sea del dominio de la función y derivable en él) la función es creciente $\uparrow$ y a la derecha es decreciente $\downarrow$, podemos concluir que la función presenta un máximo relativo en el punto de abscisa x_0.

Si vemos que a la izquierda de un punto x_0 (que sea del dominio de la función y derivable en él) la función es decreciente $\downarrow$ y a la derecha es creciente $\uparrow$, podemos concluir que la función presenta un mínimo relativo en el punto de abscisa x_0.

Este método es cómodo de usar pues normalmente nos van a pedir en el problema que estudiemos la monotonía, y de paso podemos calcular los extremos relativos.

Ejemplo: Dada la función $f(x)=x^3-3x+1$, calcular sus extremos relativos
Como vemos se trata de una función polinómica, y por tanto, su dominio es todo $\mathbb{R}$ y es derivable en todo $\mathbb{R}$.

Calculamos la función derivada $f'(x)=3x^2-3$, y vemos dónde se anula (estos puntos serán los posibles extremos y además nos determinan los intervalos de monotonía)

$$f'(x)=3x^2-3=0 \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$$

Ahora hacemos nuestra tabla de signos de la derivada

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$3x^2-3$	**+**	**-**	**+**
	↑	↓	↑

En $x_0=-1$, la función pasa de ser creciente a decreciente, luego presenta un máximo relativo (también se dice que la función presenta un máximo relativo en (-1,3))

En $x_0=1$, la función pasa de ser decreciente a creciente, luego presenta un mínimo relativo (también se dice que la función presenta un mínimo relativo en (1,-1))

<u>*NOTA*</u>: Esta función es la correspondiente a la gráfica del ejemplo 3. Podéis comprobar como el estudio analítico corresponde con el gráfico.

<u>*2ª forma*</u>: <u>Usando el criterio de la derivada segunda</u>.

Aquí se utiliza la siguiente propiedad:
<u>*Propiedad*</u>: Dada una función $y=f(x)$ tal que $f'(x_0)=0$, entonces si existe la derivada 2ª en x_0 (si $\exists f''(x_0)$)

a) Si $f''(x_0)>0$, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0
b) Si $f''(x_0)<0$, entonces f tiene un máximo relativo en x_0
c) Si $f''(x_0)=0$, entonces no podemos afirmar nada.

<u>*Ejemplo*</u>: Dada la función $f(x)=x^3-3x+1$, calcular sus extremos relativos. (es igual al ejemplo anterior)

Vemos donde se anula su derivada 1ª: $f'(x)=3x^2-3=0 \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$

Calculamos la derivada 2ª: $f''(x)=6x$
Y por último vemos el valor de la derivada 2ª en los puntos donde se anula la derivada 1ª

$f''(-1)=6\cdot(-1)=-6<0 \rightarrow$ En $x_0=-1$, la función tiene un máximo relativo

$f''(1)=6\cdot 1=6> \rightarrow$ En $x_0=1$, la función tiene un mínimo relativo

Como observamos este método es mucho más corto que el anterior en este caso , pero si nos piden también estudiar la monotonía, entonces es más conveniente usar la 1ª forma. Muchas veces la derivada 2ª es compleja de calcular, por eso quizás sea más conveniente la 1ª forma, pero se deja a gusto del alumno su uso.

<u>*Ejemplo*</u>: Estudiar los extremos relativos de $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$. (es la misma función de un ejemplo anterior)

Vamos a hacerlo de las dos formas.
<u>*1ª forma*</u>: <u>Usando el estudio del crecimiento y decrecimiento</u>.

Por el estudio realizado anteriormente en otro ejemplo, ya tenemos el estudio de la monotonía. Ponemos aquí sólo la tabla de signos de la derivada 1ª

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
x^2-2x	**+**	**-**	**-**	**+**
	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$

De aquí deducimos que:

En $x_0=0$, la función tiene un máximo relativo
En $x_0=2$, la función tiene un mínimo relativo

¡**OJO**! En $x_0=1$, la función no puede tener extremos pues no es del dominio
<u>*2ª forma*</u>: <u>Usando el criterio de la derivada segunda</u>.

Por el ejemplo del principio tenemos ya calculada la derivada: $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ y dónde se anula que es en los puntos $\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$. Derivamos otra vez para la derivada 2ª:

$f''(x)=\dfrac{(2x-2)\cdot(x-1)^2-(x^2-2x)\cdot 2\cdot(x-1)}{(x-1)^4}$=(sacamos facto común $x-1$) =
$\dfrac{(x-1)\cdot[(2x-2)\cdot(x-1)-(x^2-2x)\cdot 2]}{(x-1)^4}$=(simplificamos y operamos)=$\dfrac{2}{(x-1)^3}$

Vemos ahora los valores que toma la segunda derivada en $\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

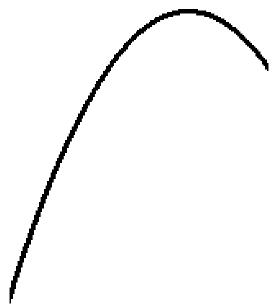
$f''(0)=\dfrac{2}{(0-1)^3}=\dfrac{2}{-1}=-2<0\rightarrow$ En $x_0=0$, la función tiene un máximo relativo
$f''(2)=\dfrac{2}{(2-1)^3}=\dfrac{2}{1}=2>0\rightarrow$ En $x_0=2$, la función tiene un mínimo relativo

3. <u>CURVATURA O CONCAVIDAD DE UNA FUNCIÓN</u>

No vamos a entrar en profundidad en el significado de cóncavo o convexo en una función, sólo mediante unas gráficas veremos su significado.

Una función es **<u>cónvexa</u>** en un intervalo si su gráfica en ese intervalo es similar al siguiente dibujo

Una función es **<u>cóncava</u>** en un intervalo si su gráfica en ese intervalo es similar al siguiente dibujo



Estudiar la curvatura de una función es ver dónde es cóncava o convexa.
La caracterización de dónde una función es cóncava o convexa viene dada por el signo de la derivada segunda.

<u>Propiedad</u>:

Si $f''<0$, entonces la función es cóncava

Si $f''>0$, entonces la función es convexa

<u>Ejemplo</u>: Estudiar la curvatura de $f(x)=x^3-6x^2$

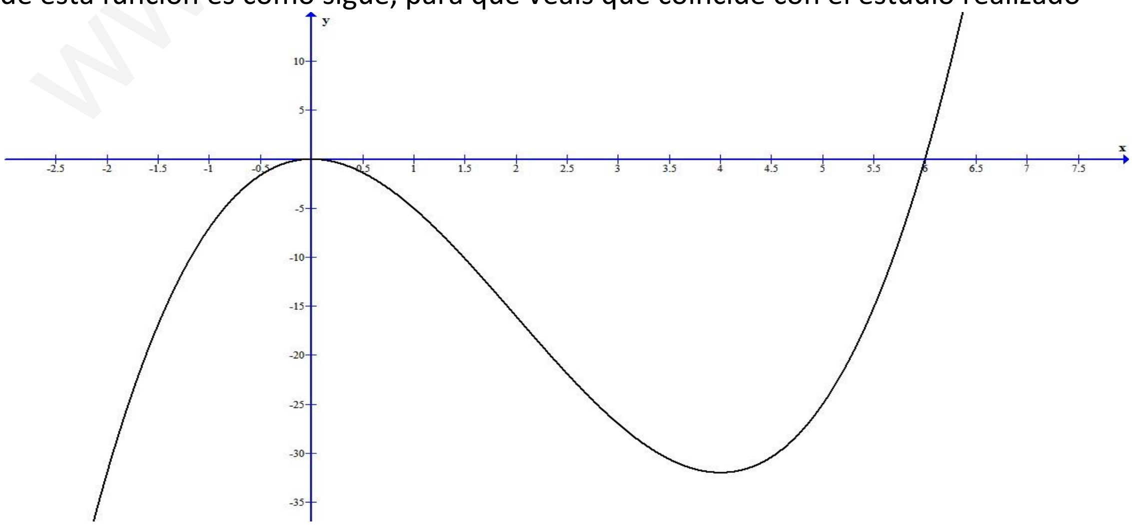
Como es una función polinómica, su dominio es todo $\mathbb{R}$, y es derivable infinitamente en todo $\mathbb{R}$.

Derivamos hasta la 2ª derivada: $f'(x)=3x^2-12x \rightarrow f''(x)=6x-12$
Vamos a estudiar el signo de f''. La igualamos a 0: $6x-12=0 \rightarrow x=2$
Construimos la tabla de signos:

	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
$6x-12$	**-**	**+**
	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$

En $(-\infty,2)$, la función es cóncava.
En $(2,+\infty)$, la función es convexa.

La gráfica de esta función es como sigue, para que veáis que coincide con el estudio realizado



En x = 2, se produce el cambio de concavidad o curvatura

NOTA: Como siempre, se puede decir que en (2, -16) es donde se produce el cambio de curvatura, en lugar de decir x = 2.

4. PUNTOS DE INFLEXIÓN

Definición: Diremos que una función y = f(x) tiene un punto de inflexión en x_0, cuando la función cambia de curvatura en ese punto.
Si pasa de convexa a cóncava, se llama punto de inflexión convexo-cóncavo.
Si pasa de cóncava a convexa, se llama punto de inflexión cóncavo-convexo.

Para calcularlos hay también dos formas, aunque la más fácil es estudiando la curvatura como hemos hecho en el punto anterior. La otra forma se basa en la siguiente propiedad:
Propiedad: Si la función y = f(x) tiene derivada segunda nula en un punto x_0, y su derivada tercera es distinta de 0, entonces x_0 es un punto de inflexión.

NOTA IMPORTANTE: Si x_0 es un punto de inflexión y $y = f(x)$ es derivable dos veces en x_0, entonces $f''(x_0) = 0$

Ejemplo: Calcular los puntos de inflexión de $f(x) = x^3 - 6x^2$
Esta función es la de un ejemplo de la curvatura , aprovechamos lo ya hecho:

	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
$6x-12$	**-**	**+**
	Convexa $\bigcap$	Cóncava $\bigcup$

Como vemos, en $x_0 = 2$, la función tiene un punto de inflexión convexo-cóncavo.

Vamos a hacerlo de la otra forma.
Hacemos la 2 ª derivada e igualamos a 0, resultando los posibles puntos de inflexión.
$f''(x) = 6x - 12 \rightarrow 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$
Hacemos la 3ª derivada y vemos el valor en $x = 2$
$f'''(x) = 6 \rightarrow f'''(2) = 6 \neq 0 \rightarrow$ En $x = 2$, hay un punto de inflexión. De esta forma se obtiene menos información de la curva (no sabemos si es convexo-cóncavo o viceversa), pero puede resultar a veces más rápido.

Ejemplo: Estudiar la curvatura y los puntos de inflexión de la función $y = \dfrac{2}{x-3}$
Siempre primero tengamos en cuenta el dominio: $Dom(y) = \mathbb{R} - \{3\}$. En su dominio esta función es derivable pues es racional y no se anula el denominador

Calculamos la 2 ª derivada: $y' = \dfrac{-2}{(x-3)^2} \rightarrow y'' = \dfrac{4}{(x-3)^3}$. Veamos dónde se anula que serán los posibles puntos de inflexión y nos permite hacer la tabla de signos: $y'' = \dfrac{4}{(x-3)^3} = 0 \rightarrow 4 = 0$ No hay solución.

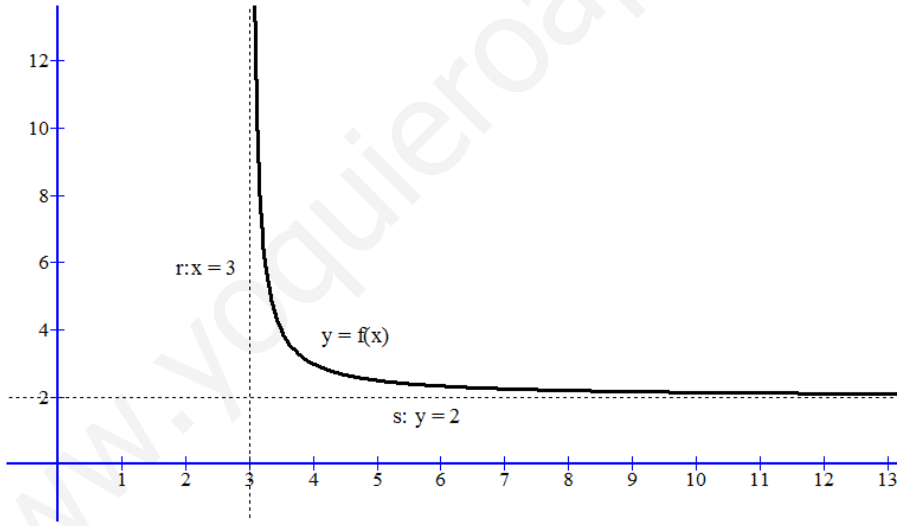
Hacemos la tabla de signos y ¡¡OJO!!! hay que tener en cuenta también los que anulan al denominador que no son del dominio.

	$(-\infty,3)$	$(3,+\infty)$
$\frac{4}{(x-3)^3}$	**-**	**+**
	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$

Podemos concluir que:
En $(-\infty,3)$, la función es convexa.
En $(3,+\infty)$, la función es cóncava.
Y no tiene puntos de inflexión, pues en x = 3 no tiene sentido pues no es del dominio.

5. ASÍNTOTAS DE UNA FUNCIÓN

Las asíntotas son rectas a las cuales la función se va aproximando indefinidamente, cuando por lo menos una de las variables (x o y) tienden al infinito.
Una definición más formal es:
Definición: Si un punto (x,y) se desplaza continuamente por una función y = f(x) de tal forma que, por lo menos, una de sus coordenadas tienda al infinito, mientras que la distancia entre ese punto y una recta determinada tiende a cero, esta recta recibe el nombre de asíntota de la función.
Veamos una gráfica:



Como vemos en esta gráfica la recta r se aproxima todo lo que queramos a la función (aunque no llega a cortarla o tocarla). A r se le llama asíntota vertical de f en x = 3 . Vemos que $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$

De manera análoga, vemos que tiene una asíntota horizontal en $+\infty$, que es la recta s: y = 2. Se observa que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$

Las asíntotas se clasifican en 3 tipos:

a. *Asíntotas verticales*

Son paralelas al eje OY. Son de la forma $r \equiv x = a$, donde a es un nº que cumple que el $\lim_{x\to a} f(x)$ es algún tipo de infinito: También vale cuando tendemos a a por la izquierda o por la derecha.
Estos números a suelen ser los puntos extremos de los intervalos del dominio.

Ejemplo: Calcula las AV (asíntotas verticales) de la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

Primero el dominio de la función: $Dom(f)=\mathbb{R}-\{1,-1\}$. Las posibles asíntotas verticales son x = 1 ó x = -1

Veamos que pasa con la función alrededor de esos puntos, calculando los límites:

En **x = 1**, hacemos los laterales pues aparece 0 en el denominador y nos interesa conocer el signo de la aproximación a 0.

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$ → Al acercarnos por la derecha al 1, la función tiende a $+\infty$. Ya tenemos que la función tiene una asíntota vertical por la derecha en x = 1

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$ → Al acercarnos por la izquierda al 1, la función tiende a $-\infty$. Ya tenemos que la función tiene una asíntota vertical por la izquierda en x = 1.

De manera general, decimos que la recta r: x = 1 es una asíntota vertical.

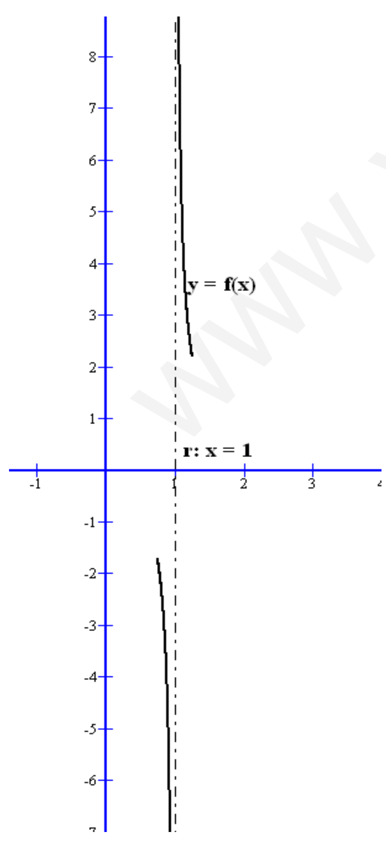
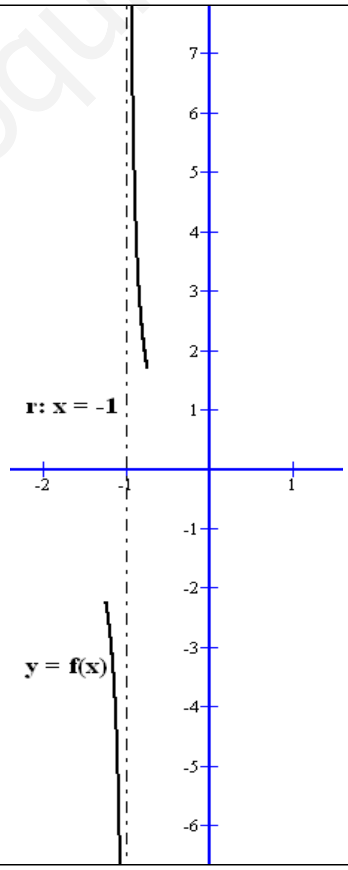
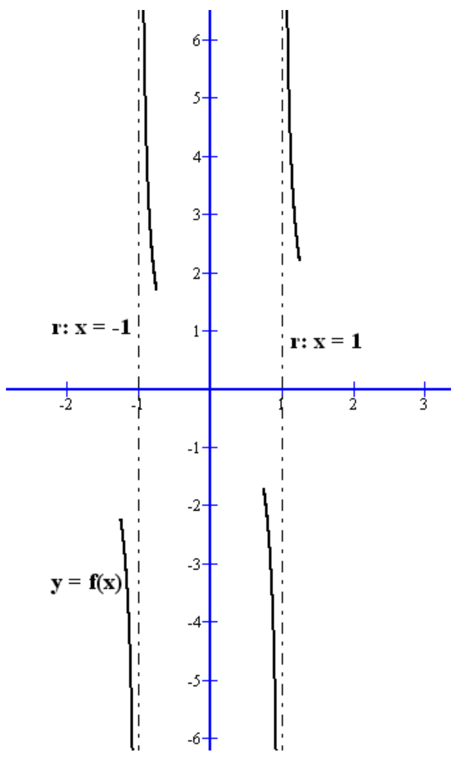
En **x = -1**, hacemos los laterales pues aparece 0 en el denominador y nos interesa conocer el signo de la aproximación a 0.

$\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty$ → Al acercarnos por la derecha al -1, la función tiende a $+\infty$. Ya tenemos que la función tiene una asíntota vertical por la derecha en x = -1

$\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$ → Al acercarnos por la izquierda al 1, la función tiende a $-\infty$. Ya tenemos que la función tiene una asíntota vertical por la izquierda en x = -1.

De manera general, decimos que la recta r: x = -1 es una asíntota vertical.

Veamos gráficamente la información que nos ha aportado este estudio. Nos da una buena idea de la gráfica de la función

En x = 1	En x = -1	Las dos a la vez
		

Ejemplo: Calcula las AV (asíntotas verticales) de la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

En este caso, el dominio de la función $Dom(f)=\mathbb{R}$, con lo cual no tiene A.V. y no hay que hacer nada más

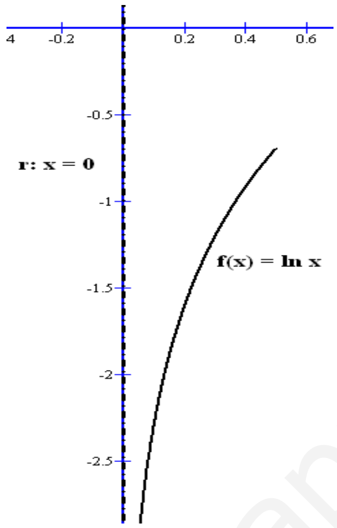
Ejemplo: Calcula las asíntotas verticales de $f(x)=\ln x$

Como sabemos, $Dom(\ln)=(0,+\infty)$. Por tanto puede presentar una A.V. en x = 0. Veamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x=-\infty$, como sabemos, luego r: x = 0 es una A.V. por la derecha

El límite lateral izquierdo en 0 no se puede calcular pues por ahí la función ln no está definida

Gráficamente tenemos algo así:



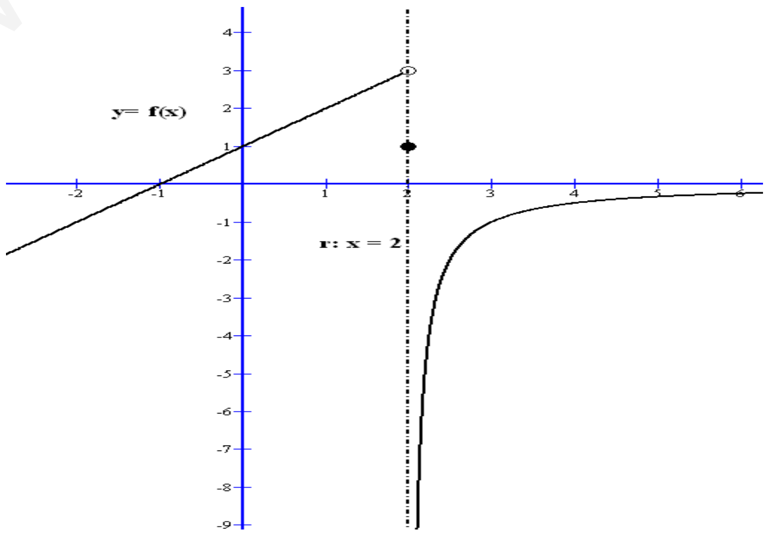
Ejemplo: Calcular las asíntotas verticales de $f(x)=\begin{cases} x+1 & si \quad x<2 \\ 1 & sis \quad x=2 \\ \dfrac{-1}{x-2} & si \quad x>2 \end{cases}$

En este caso, también tenemos que $Dom(f)=\mathbb{R}$, pero al ser definidas por partes, puede que tenga A.V. en los puntos que cambia de definición o en los puntos donde la función no este definida. Aquí sólo se plantea en x = 2, y vamos a calcular los límites laterales.

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-1}{x-2}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$. Por la derecha hay A.V., que es r : x = 2

$\lim\limits_{x\to 2^-} x+1=3$ →NO hay A.V. por la izquierda

Gráficamente esta función es así:



b. *Asíntotas horizontales*

Son rectas paralelas al eje OX, o sea, de la forma $r \equiv y = a$. Ese nº a se calcula mediante los límites en el $+\infty$ y en el $-\infty$. Es decir, calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Como máximo una función sólo puede tener dos A.H.

Veamos ejemplos:

Ejemplo: Calcular las asíntotas horizontales de la función $f(x) = \dfrac{-4x^2 - 1}{2x^2 + x}$

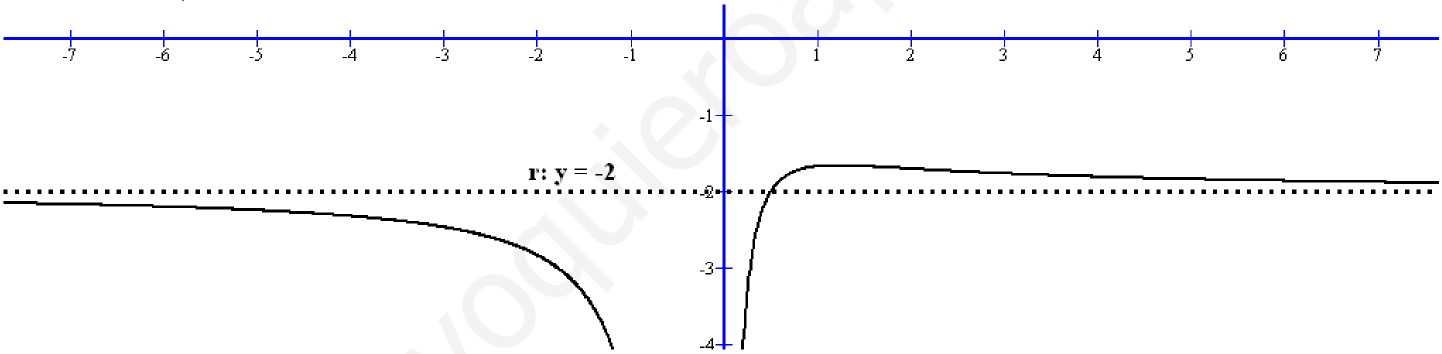
En esta función su dominio es $Dom(f) = \mathbb{R} - \left\{0, -\dfrac{1}{2}\right\}$, que no influye para nada pues vamos a hacer límites en el infinito

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4x^2 - 1}{2x^2 + x} = \dfrac{-4}{2} = -2$ → Como el límite existe, tenemos que la recta $r \equiv y = -2$ es una asíntota horizontal en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-4x^2 - 1}{2x^2 + x} = \dfrac{-4}{2} = -2$ → Como el límite existe, tenemos que la recta $r \equiv y = -2$ es una asíntota horizontal en $-\infty$.

Como es la misma, podemos decir que la recta $r \equiv y = -2$ es la asíntota horizontal

Gráficamente,



Ejemplo: Calcular las asíntotas horizontales de la función $f(x) = e^{-5x}$

El dominio es todo R. Vamos calcular los límites en infinito:

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-5x} = 0$ → La recta $r \equiv y = 0$ es A.H. en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-5x} = +\infty$ → No tiene A.H. en $-\infty$ Observamos que tiene por un lado y por otro no

Ejemplo: Calcular las asíntotas horizontales de la función $f(x) = \dfrac{x^3 - x + 1}{x^2 - 5x}$

Os dejo a vosotros comprobar que no tiene asíntotas horizontales.

c. *Asíntotas oblicuas*

Son aquellas que son inclinadas (pendiente distinta de 0). Serán rectas de la forma $r \equiv y = m \cdot x + n$

Hay que hacer límites también en $+\infty$ y en $-\infty$ para calcular los valores de m y n y son los siguientes:

En $+\infty$	En $-\infty$
$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$	$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$
$n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]$	$n=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]$

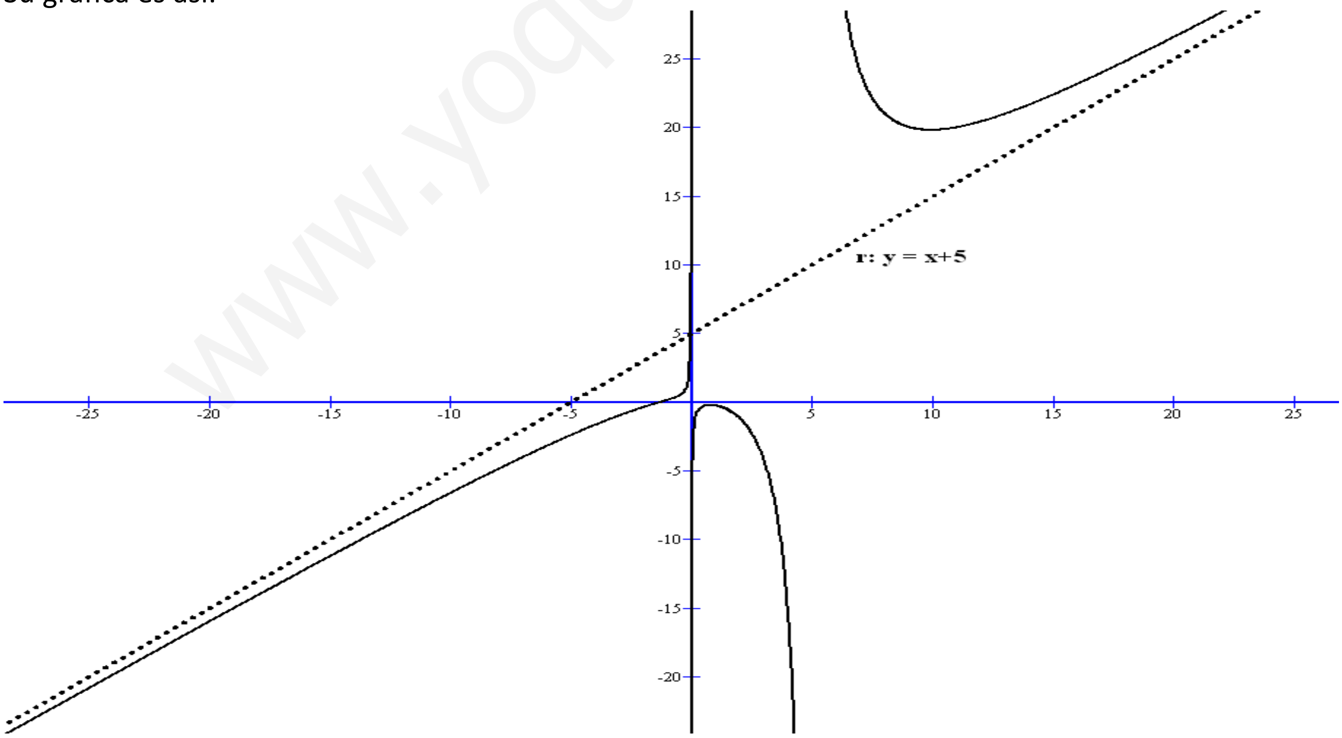
__Propiedad__: Si una función y = f(x) tiene asíntotas horizontales no puede tener asíntotas oblicuas en el correspondiente infinito.

__Ejemplo__: Calcular las asíntotas oblicuas de la función $f(x)=\dfrac{x^3-x+1}{x^2-5x}$

Tenemos que $Dom(f)=\mathbb{R}-\{0,5\}$, que no nos influye en el cálculo de las A. Oblicuas.

En $+\infty$	En $-\infty$ (todo es análogo a $+\infty$)
$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^3-x+1}{x^2-5x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x+1}{x\cdot(x^2-5x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x+1}{x^3-5x^2}=1$	$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$=1 Hacedlo vosotros
$n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3-x+1}{x^2-5x}-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^3-x+1-(x^3-5x^2)}{x^2-5x}\right]=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{5x^2-x+1}{x^2-5x}\right]=5$	$n=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]$=5 Hacedlo vosotros
La A.O. en $+\infty$ es: $r: y=x+5$	La A.O. en $-\infty$ es: $r: y=x+5$

Su gráfica es así:



Ejemplo: Sea la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x^2+1}{x+3} & si \quad x<0 \\ \dfrac{3x-1}{2x-3} & si \quad x>0 \end{cases}$. Calcular sus A. Oblicuas

El dominio de esta función es: $Dom(f)=\mathbb{R}-\left\{0,-3,\frac{3}{2}\right\}$ En los reales que no son del dominio es donde puede presentar asíntotas verticales. Podéis comprobar que $r\equiv x=-3$ y $s\equiv x=\frac{3}{2}$ son sus asíntotas verticales.

Pasamos a estudiar las oblicuas.

En $+\infty$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x-1}{2x-3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{x\cdot(2x-3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{2x^2-3x}=0$$

→ La pendiente es 0, luego no puede ser una asíntota oblicua, en todo caso será horizontal. Veamos si tiene horizontal: $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{2x-3}=\frac{3}{2}$ → $r\equiv y=\frac{3}{2}$ es asíntota horizontal en $+\infty$ (esto no era necesario, pues no lo pedía el problema)

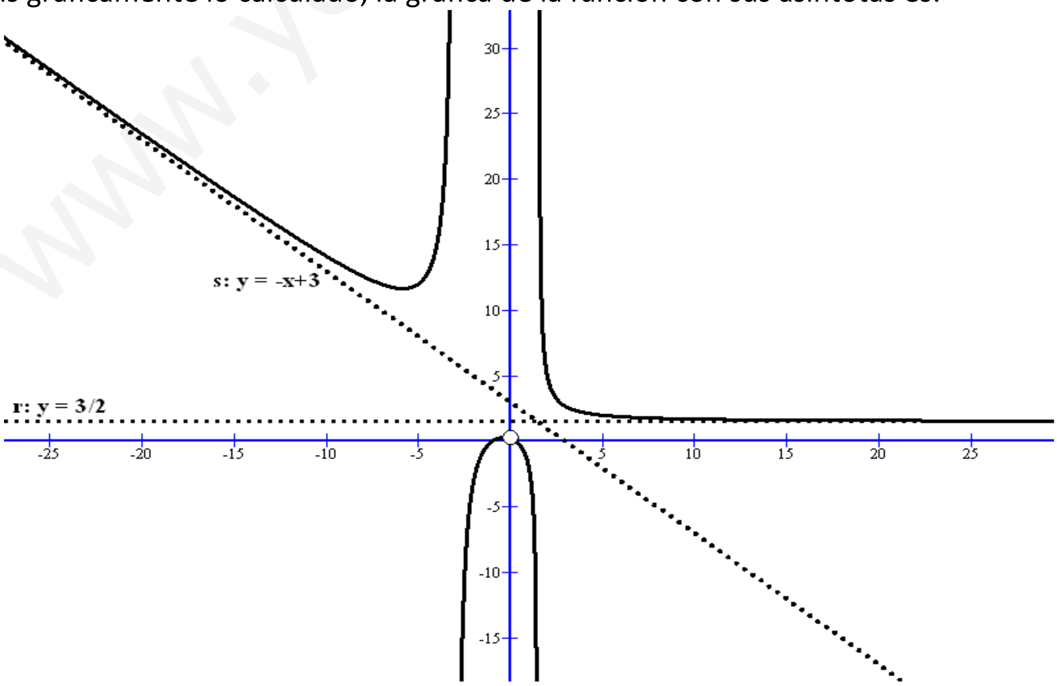
En $-\infty$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-x^2+1}{x+3}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+1}{x\cdot(x+3)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+1}{x^2+3x}=-1$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-x^2+1}{x+3}-(-x)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-x^2+1+x^2+3x}{x+3}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3x+1}{x+3}\right]=3$$

La recta $s\equiv y=-x+3$ es A. Oblicua en $-\infty$

Para que veáis gráficamente lo calculado, la gráfica de la función con sus asíntotas es:



6. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Vamos a intentar con los conocimientos que tenemos representar de forma aproximada de funciones y básicamente nos vamos a apoyar en el estudio de: dominio, cortes con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, extremos locales, intervalos de concavidad (f''(x)>0) y de convexidad (f''(x)<0), puntos de inflexión y una tabla de valores para afinar.
Vamos a hacerlo mediante ejemplos:

Ejemplo: Representa gráficamente la función $f(x)=\dfrac{x^3}{4}-3x^2+9x$

- *Dominio*

Como vemos se trata de una función polinómica de grado 3, por tanto, su dominio son todos los números reales, $Dom(f)=\mathbb{R}$

- *Cortes con los ejes*
  - *Cortes eje OX*

Resolvemos el sistema $\begin{cases} y=\dfrac{x^3}{4}-3x^2+9x \\ y=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{4}-3x^2+9x=0 \Rightarrow x\cdot\left(\frac{x^2}{4}-3x+9\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \dfrac{x^2}{4}-3x+9=0 \Rightarrow x=6 \end{cases}$$

Los puntos de corte son: $(0,0)$ y $(6,0)$

  - *Corte eje OY*

Resolvemos el sistema $\begin{cases} y=\dfrac{x^3}{4}-3x^2+9x \Rightarrow y=0 \\ x=0 \end{cases}$ nos sale, como era de esperar el punto $(0,0)$

- *Asíntotas*
  - *A. Verticales*

No tiene puesto que su dominio es $Dom(f)=\mathbb{R}$

  - *A. Horizontales*

Veamos los límites en $+\infty$ y en $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{4}-3x^2+9x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{4}\right)=+\infty \Rightarrow \text{No tiene en } +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{4}-3x^2+9x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{4}\right)=-\infty \Rightarrow \text{No tiene en } -\infty$$

  - *A. Oblicuas*

Veamos en $+\infty$,

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{4}-3x^2+9x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{4}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{4}=+\infty \Rightarrow \text{No tiene oblicuas en } +\infty$$

Análogamente en $-\infty$

- *Monotonía y extremos relativos*

Derivamos la función $f'(x)=\frac{3x^2}{4}-6x+9$. Igualamos a 0 y hacemos la tabla de signos de la derivada.

$$f'(x)=\frac{3x^2}{4}-6x+9=0 \Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{36-27}}{\frac{6}{4}} \Rightarrow x=\frac{6\pm 3}{\frac{3}{2}} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=2 \end{cases}$$

	$(-\infty,2)$	$(2,6)$	$(6,+\infty)$
$f'(x)=\frac{3x^2}{4}-6x+9$	+	-	+
	f creciente $\nearrow$	f decreciente $\searrow$	f creciente $\nearrow$

A partir de la tabla también obtenemos los extremos relativos, que son:
$x=2$ es un máximo relativo. Calculamos $f(2)=8$, y por tanto el punto $(2,8)$ es máximo relativo
$x=6$ es un máximo relativo. Calculamos $f(6)=0$, y por tanto el punto $(6,0)$ es máximo relativo

- *Curvatura y puntos de inflexión*

Calculamos la derivada segunda, $f''(x)=\frac{6x}{4}-6 \Rightarrow f''(x)=\frac{3x}{2}-6$ La igualamos a 0 y hacemos el estudio de su signo mediante una tabla

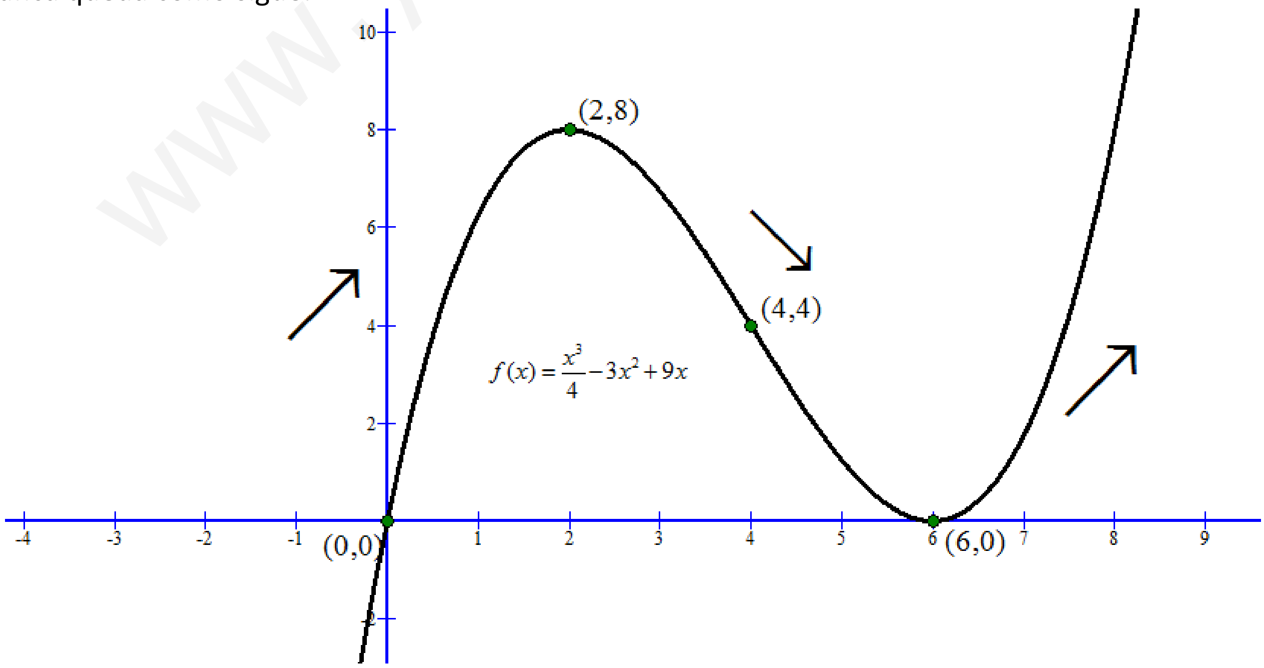
$$f''(x)=\frac{3x}{2}-6=0 \Rightarrow x=4$$

	$(-\infty,4)$	$(4,+\infty)$
$f''(x)=\frac{3x}{2}-6$	-	+
	f cóncava $\cap$	f convexa $\cup$

Como podemos observar en el punto $x=4$ presenta un punto de inflexión cóncavo-convexo. Calculamos $f(4)=4$, y se trata del punto $(4,4)$

- *Tabla de valores:* No es necesario realizar tabla de valores, pues con los datos ya podemos dibujar la función. Podéis hacer algunos valores si queréis.

La gráfica queda como sigue:



Ejemplo: Representa gráficamente la función $y=1-\dfrac{2}{x+2}$

Operamos efectuando la sustracción $y=\dfrac{x}{x+2}$, que nos queda de manera más simple.

- *Dominio*

Como vemos se trata de una función raciona, por tanto, su dominio son todos los números reales que no anulen el denominador. En este caso, es obvio que $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-2\}$

- *Cortes con los ejes*
  - *Cortes eje OX*

Resolvemos el sistema $\begin{cases} y=\dfrac{x}{x+2} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x}{x+2}=0 \Rightarrow x=0$

Solo hay un punto de corte: $(0,0)$

  - *Corte eje OY*

Obviamente es el punto $(0,0)$

- *Asíntotas*
  - *A. Verticales*

En $x=-2$ puede presentar asíntotas verticales. Veamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x}{x+2}=\frac{-2}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x}{x+2}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

Luego $x=-2$ es asíntota vertical

  - *A. Horizontales*

Veamos los límites en $+\infty$ y en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x+2}=1 \Rightarrow$ La recta $y=1$ es asíntota horizontal en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{x+2}=1 \Rightarrow$ La recta $y=1$ es asíntota horizontal en $-\infty$

  - *A. Oblicuas*

No tiene puesto que tiene oblicuas

- *Monotonía y extremos relativos*

Derivamos la función $y'=\dfrac{1\cdot(x+2)-x\cdot 1}{(x+2)^2} \Rightarrow y'=\dfrac{2}{(x+2)^2}$. Igualamos a 0

$\dfrac{2}{(x+2)^2}=0$, que como vemos no se anula nunca. Hacemos la tabla de signos de la derivada sólo con el punto que no es del dominio

	$(-\infty,-2)$	$(-2,+\infty)$
$y'=\dfrac{2}{(x+2)^2}$	$+$	$+$
	f creciente $\nearrow$	f creciente $\nearrow$

Como podemos observar no tiene extremos relativos.

- *Curvatura y puntos de inflexión*

Calculamos la derivada segunda, $y''=\frac{0\cdot(x+2)^2-2\cdot 2(x+2)}{(x+2)^4}\Rightarrow y''=\frac{-4\cdot(x+2)}{(x+2)^4}\Rightarrow y''=\frac{-4}{(x+2)^3}$

La igualamos a 0 y es obvio que tampoco se anula. . Hacemos la tabla de signos de la derivada segunda sólo con el punto que no es del dominio

	$(-\infty,-2)$	$(-2,+\infty)$
$y''=\frac{-4}{(x+2)^3}$	$+$	-
	f convexa $\cup$	f cóncava $\cap$

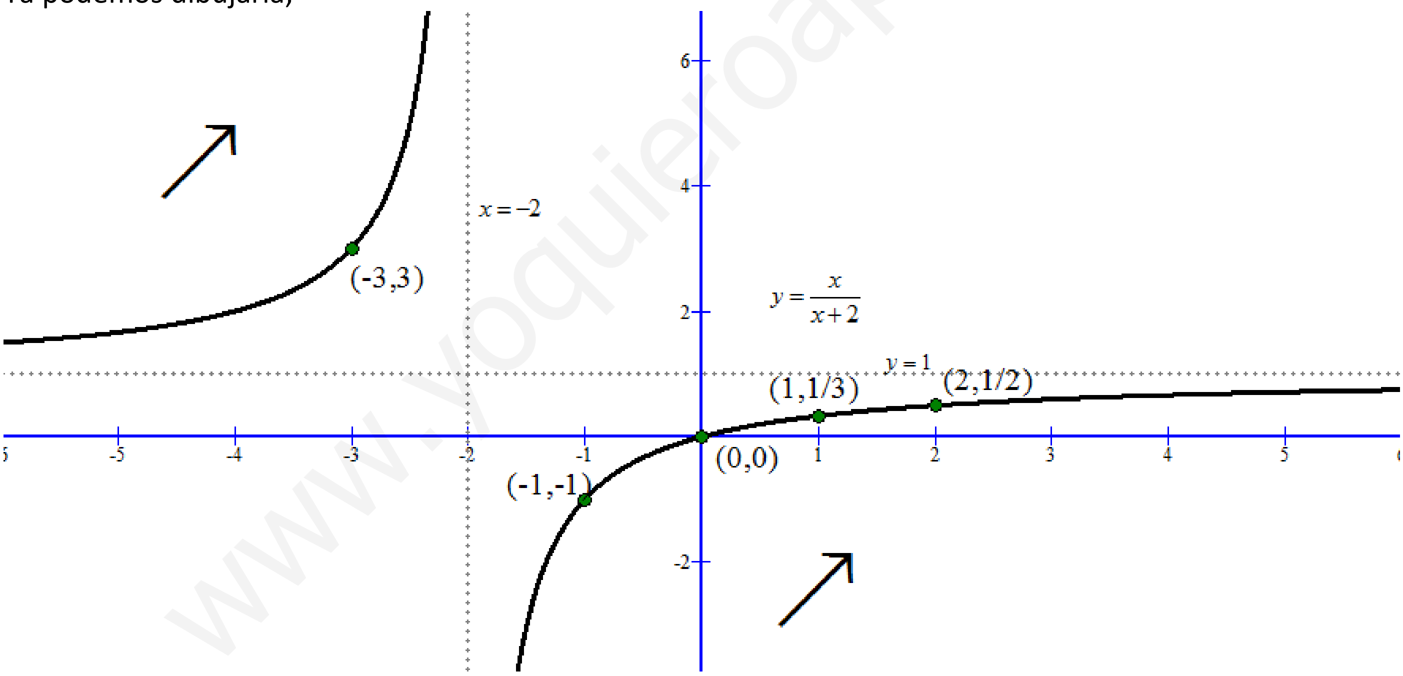
No tiene ningún punto de inflexión, pues donde cambia de curvatura, no es del dominio de definición

- *Tabla de valores*

Hacemos una pequeña tabla de valores para la función $y=\frac{x}{x+2}$

x	-1	-3	1	2
y	-1	3	1/3	1/2

Ya podemos dibujarla,



NOTA: Esta función la podíamos haber representado con los conocimientos adquiridos el año pasado para representar hipérbolas, y hubiese sido más rápido