MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II:

EJERCICIOS RESUELTOS

TEMA 1. MATRICES.

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, calcula $A - 2B + 3C$

2. Halla la matriz A que satisface la igualdad: $3\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 7 & 3 \end{pmatrix} + A$

3. Determina las matrices X e Y tales que: $2X + Y = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ y

$3X + 2Y = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}$

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ calcula A^{1999} y B^{50}.

5. Encuentra todas las matrices que conmuten con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

6. Comprueba que la matriz $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -6 \\ -9 & 8 & 11 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ es inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. ¿Cuál es la inversa de B?

7. Halla las inversas, por el método de Gauss, de:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

8. Dadas las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelve $BX + 3C = C(B + 3I)$

9. Expresa el siguiente sistema en forma matricial y resuélvelo: $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 5y + 3z = 5 \\ 3x - y - 2z = 12 \end{cases}$

EJERCICIOS P.A.U.

1. Explica qué condiciones deben verificar dos matrices A y B para que se pueda realizar el producto A•B. Efectúa, si es posible, la siguiente operación matricial:

$\begin{bmatrix} -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. Dadas dos matrices A y B de orden 3×3, decir si el siguiente razonamiento es correcto o incorrecto. Si es correcto, indicar en cada paso la propiedad utilizada y si es incorrecto señalar el error cometido:

$$(A+B)\cdot(A-B) = A\cdot A - A\cdot B + B\cdot A - B\cdot B = A^2 - A\cdot B + B\cdot A - B^2 = A^2 - B^2$$

3. ¿Existe algún valor de x que verifique la igualdad $\begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & x \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & x \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$?

4. Siendo A y B dos matrices 2×2, resolver el sistema matricial:

$3A - 5B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$; $-A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

5. Calcular una matriz X que verifique $X - B^2 = A\cdot B$, siendo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. De una matriz $A_{n\times n}$ se sabe que es idempotente (es decir, que se cumple $A^2 = A$). Se define $B = 2A - I$, donde I es la matriz unidad $n\times n$. Calcula el producto $A^pB^qA^r$, donde p,q y r son números enteros positivos.

7. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide: **a)** Demostrar que $A^2 = 2A - I$, donde I es la matriz identidad 2×2.

b) Expresar A^3 y A^4 en función de A. **c)** Calcular A^{100}.

8. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de A. **b)** Encontrar una matriz X tal que: $A\cdot X - B = 2C$.

9. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: **a)** Halla sus inversas **b)** Comprueba que $(A+I)^2 = A^2 + 2A + I$.

10. Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcular, si es posible, las matrices:

$A\cdot B$; $(B\cdot A)^T$; $B - 2A^T$

11. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular $(A^T\cdot A^{-1})^2\cdot A$.

12. Hallar la matriz X, sabiendo que satisface la ecuación matricial $3AX = B$, siendo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

54026

13. Determinar aquellos valores de y para los cuales la matriz $Z = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifique la ecuación matricial $X^2 - \frac{5}{2}X + I = O$, siendo I la matriz identidad de orden dos y O la matriz nula de orden dos. Expresar Z^{-1} en función de Z.

14. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

a) Expresarlo en la forma matricial ($AX = B$) y calcular la matriz inversa A^{-1}. **b)** Resolverlo.

15. Las relaciones de equilibrio de dos mercados X e Y vienen dadas, en función de sus precios de equilibrio P_x y P_y , por las ecuaciones $\begin{cases} 2P_x - P_y = 3 \\ P_x + 2P_y = 4 \end{cases}$. Escribe esta información en notación matricial y determina el precio de cada mercado.

16. Una empresa produce dos tipos de televisores, A y B. Todos ellos se fabrican en tres terminaciones: N, L y S, a los siguientes precios, en euros, cada unidad:

	N	L	S
Televisor A	60	120	180
Televisor B	180	270	360

El nº de unidades producidas por año figuran en la siguiente tabla:

	A	B
Terminación N	9000	3000
Terminación L	6000	2000
Terminación S	3000	1000

a) Dar la información anterior en dos matrices, P y Q. P será una matriz, con menor nº de filas que de columnas, que suministrará la producción por año y Q una matriz, con mayor nº de filas que de columnas, que suministrará información sobre los precios.

b) Calcular $P \cdot Q$ y $Q \cdot P$.

c) ¿Qué información suministra la diagonal principal de $P \cdot Q$ y de $Q \cdot P$?

17. En Massafarina hay dos fábricas de bicicletas. La fábrica Rosinger S.A. produce 3 de carreras y 2 de montaña en una hora. La fábrica Inmurain S.L. produce 4 de carreras y 1 de montaña en una hora. La jornada de trabajo en Rosinger S.A. es de 7 horas mientras que en Inmurain S.L. se trabajan 8 horas diarias. Esta información puede mostrarse en forma matricial según: $P = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

a) Obtén la matriz producto $P \cdot H$ e interpreta sus elementos.

b) La matriz P expresa el nº de bicicletas de carreras y de montaña que en una hora se fabrican en las dos empresas. Expresa en forma matricial la producción diaria de bicicletas de carreras y de montaña de ambas fábricas.

18. Hallar la matriz X sabiendo que $B(A-I) = AXA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

19. Una empresa fabrica tres tipos de artículos: A, B y C. Los precios de coste de cada unidad son 60, 92 y 143 € respectivamente. Los correspondientes precios de venta de una unidad de cada artículo son 180, 280 y 400 €. El nº de unidades vendidas anualmente es de 2240, 1625 y 842, respectivamente. Sabiendo que las matrices de costes e ingresos, C e I, son diagonales y que la matriz de ventas, V, es una matriz fila:

a) Determina las matrices C, I y V. **b)** Obtén, a partir de las matrices anteriores, la matriz de ingresos anuales correspondiente a los tres artículos, la matriz de gastos anuales y la matriz de beneficios anuales.

20. Tres escritores presentan a un editor, al acabar una enciclopedia, la minuta siguiente:

	Horas de trabajo	Conferencias dadas	Viajes
Escritor A	40	10	5
Escritor B	80	15	8
Escritor C	100	25	10

El editor paga la hora de trabajo a 30 €, la conferencia a 12 € y el viaje a 20 €. Si de momento sólo piensa pagar, respectivamente, el 30%, el 20% y el 10% de lo que le corresponda a cada escritor, ¿qué gasto tendría el editor?

21. Una empresa de carpintería dispone de dos naves A y B donde se fabrican sillas y mesas en tres tipos de acabados: calidad extra E, calidad media M, y calidad inferior I. Ambas naves tienen la misma producción mensual. La cantidad de sillas producidas mensualmente, en cada una de las naves, es de 100 del tipo E, 150 del M y 200 del tipo I; la producción mensual de mesas es de 100 de clase E, 50 de clase M y 300 de clase I. Se sabe que el porcentaje de sillas y mesas defectuosas es, en la nave A, de 0,01 para los muebles de calidad E, de 0,02 para los de calidad M y de 0,03 para los de calidad I, mientras que en la nave B los porcentajes son 0,02 para la clase E, 0,04 para la M y 0,01 para la clase I. Se pide:

a) Obtener la matriz que representa la producción de sillas y mesas, de calidad extra, media o inferior en cada una de las dos naves.

b) Obtener la matriz que representa el nº de sillas y mesas defectuosas, en las calidades E, M, I, procedentes de cada una de las naves y la matriz que da el nº total de sillas y de mesas defectuosas para cada calidad.

22. Una fábrica decide distribuir tres productos A, B y C a cuatro países de África P_1, P_2, P_3, P_4, según se describe en la matriz M_1 (cantidades en toneladas). Esta fábrica ha recibido presupuestos de dos empresas para el transporte de los productos a los países de destino, como indica la matriz M_2 (en euros por tonelada).

$$M_1 = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 200 & 100 & 120 \\ 110 & 130 & 200 \\ 220 & 200 & 100 \\ 150 & 160 & 150 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M_2 = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 500 & 450 & 375 & 350 \\ 510 & 400 & 400 & 350 \end{pmatrix} \end{array}$$

Efectúa el producto de las matrices y responde a las cuestiones:

a. ¿Qué representa el elemento a_{11} de la matriz producto?

b. ¿Qué elemento de la matriz producto nos indica lo que cuesta transportar el producto C con la empresa E_2?

c. Indica qué elementos de la matriz producto permiten averiguar cuál es la empresa que transporta más barato el producto B a todos los países.

23. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, explica si hay alguna matriz de 2º orden, X, tal que $A \cdot X = B \cdot X$

24. Calcula los valores de x para que la matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ verifique la ecuación matricial $A^2 - 6A + 9I = O,$ donde I y O son las matrices identidad y nula de orden dos.

25. Resuelve la ecuación $AX = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & -2 \\ 2 & 10 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

26. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Halla las matrices B que conmuten con A, es decir, $A \cdot B = B \cdot A$.

27. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, halla la matriz X que verifica la igualdad $A \cdot B - 2X = A + 3B$.

28. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 1 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz $A + A^2$.

b) Resuelve el sistema $A^5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

SOLUCIONES:

1. 1. $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 2 & 15 & 14 \\ 8 & 17 & 9 \end{pmatrix}$ **3.** $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 14 \\ -12 & -6 & -21 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} 7 & 14 & -21 \\ 28 & 14 & 49 \end{pmatrix}$ **4.** $A^{1999} = \begin{pmatrix} 2^{1999} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B^{50} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 50 & 1 & 0 \\ 50 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **5.** $B = \begin{pmatrix} a & -2c \\ c & a+c \end{pmatrix}$ **6.** A **7.** $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $M^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -4 \\ -3/2 & 1/2 & -1/5 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} -16/6 & 7/3 & -1 \\ 13/3 & -11/3 & 2 \\ -11/6 & 5/3 & -1 \end{pmatrix}$ **8.** $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & 6 & 10 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ **PAU: 1.** 7 **2.** $AB \neq BA$ **3.**

$\left\{ \begin{array}{l} \text{No, sale x=1 e x=-1,} \\ \text{que es imposible.} \end{array} \right.$ **4.** $A = \begin{pmatrix} 13/4 & 14/4 \\ 39/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7/4 & 5/2 \\ 17/4 & 1/4 \end{pmatrix}$ **5.** $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **6.**

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hay que distinguir} \\ \text{entre q par (q=2n)} \\ \text{y q impar (q=2n+1)} \end{array} \right.$ En ambos casos: $A^p B^q A^r = A$ **7.** $\begin{array}{l} A^3 = 3A - 2I \\ A^4 = 4A - 3I \end{array}$ $A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -100 & 1 \end{pmatrix}$ **8.**

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **9.** $\left\{ \begin{array}{l} A^{-1} = A \\ I^{-1} = I \end{array} \right.$ **10.** 5 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ **11.**

$\begin{pmatrix} 3/2 & 11/2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ **12.** $X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **13.** $\left\{ \begin{array}{l} y_1 = 2 \quad y_2 = \frac{1}{2} \\ Z^{-1} = -Z + \frac{5}{2} I \end{array} \right.$ **14.** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -1/3 \\ -1/6 & 1/2 & 2/3 \\ -1/6 & 1/2 & -1/3 \end{pmatrix}$

$\left\{ \begin{array}{l} x = -1/3 \\ y = 2/3 \\ z = -1/3 \end{array} \right.$ **15.** $\begin{array}{l} P_x = 2 \\ P_y = 1 \end{array}$

16. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Diag. princ. de PQ: dinero generado por los telev. A y los telev. B (1 800 000€ y 1 440 000€)} \\ \text{Diag. princ. de QP: dinero generado por la term. N, la L y la S. (1 080 000€, 1 260 000€ y 900 000)} \end{array} \right.$ **17.**

b) es $PH = \begin{pmatrix} 53 \\ 22 \end{pmatrix}$ **18.** $X = \begin{pmatrix} 22 & 46 & 73 \\ 50 & 106 & 168 \\ -40 & -84 & -133 \end{pmatrix}$

19. $\left\{ \begin{array}{l} \text{M. de ingresos: } VI = (403200 \quad 455000 \quad 336800) \\ \text{M. de gastos: } VC = (134400 \quad 149500 \quad 120406) \\ \text{M. beneficios: } VI - VC = (268800 \quad 305500 \quad 216394) \end{array} \right.$ **20.** 1326´23€ **21.**

$\begin{pmatrix} \text{nº total de} \\ \text{sillas y mesas} \\ \text{defectuosas} \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 3 & 9 & 8 \\ 3 & 3 & 12 \end{pmatrix}$ **22.** $M_2 M_1 = \begin{pmatrix} 284500 & 239500 & 240000 \\ 286500 & 239000 & 233700 \end{pmatrix}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) Los costes de la E1 para enviar el producto A.} \\ \text{b) } a_{23} \\ \text{c) Los de la 2ª columna (es + barata la E2).} \end{array} \right.$ **23.** $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}$ **24.** $x = 3$ **25.** $X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

26. $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ **27.** $X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -11 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3/10 & 2 & 0 \\ -3/10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\left\{ \begin{array}{l} x = 20 \\ y = -5 \\ z = -9 \end{array} \right.$

54026

TEMA 2. DETERMINANTES.

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES.

P1 **El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta:**

$\boxed{|A| = |A^t|}$ (comprobada en clase para matrices 3×3).

Observación: Dado que las filas de una matriz son las columnas de su matriz traspuesta, las propiedades válidas para las filas también serán válidas para las columnas y viceversa. Por eso, en las siguientes propiedades nos referiremos a líneas, donde una línea puede ser tanto una fila como una columna.

P2 **Si una matriz tiene una línea (fila o columna) de ceros, su determinante vale 0.**

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} 4 \cdot \mathbf{0} \cdot 5 + 1 \cdot \mathbf{0} \cdot (-3) + \mathbf{0} \cdot 2 \cdot (-2) \\ -(-3) \cdot \mathbf{0} \cdot (-2) - 1 \cdot \mathbf{0} \cdot 5 - 2 \cdot \mathbf{0} \cdot 4 = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = \mathbf{0} \end{array}$$

Podemos observar que todos los términos tienen un factor que es 0.

P3 **Si se intercambian 2 líneas paralelas de la matriz, el determinante cambia de signo:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

Ejercicio: Comprueba la igualdad anterior.

P4 **Si una matriz tiene dos líneas paralelas iguales, su determinante vale 0.**

Ejemplo-demostración: Sea $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. Si intercambiamos la 1ª y la 3ª fila, según la propiedad 3, el determinante debería cambiar de signo. Ahora bien, al intercambiar las filas, la matriz no cambia, luego el valor de su determinante tampoco. Por eso, el valor de su determinante ha de ser 0 (ya que el 0 es el único número tal que $0 = -0$)

P5 **Si multiplicamos todos los elementos de una línea por un mismo número, el determinante queda multiplicado por ese número.**

Comprobación:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7k \\ 2 & 4 & 8k \\ 5 & 6 & 9k \end{vmatrix} = \begin{array}{l} 3 \cdot 4 \cdot 9k + 1 \cdot 8k \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 7k - 7k \cdot 4 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 9k - 8k \cdot 6 \cdot 3 = \\ k(3 \cdot 4 \cdot 9 + 1 \cdot 8 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 7 - 7 \cdot 4 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 9 - 8 \cdot 6 \cdot 3) = \end{array} =$$

Esta propiedad permite sacar fuera del determinante el factor común que tengan los elementos de una línea.

P6 Si una matriz tiene 2 líneas paralelas proporcionales su determinante vale 0.

Ejemplo-demostración: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -6 & -12 & 3 \end{vmatrix}$ =(Sacamos factor común de (–3) en la última fila) $= (-3)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ = (y ahora ésta matriz tiene 2 filas iguales, luego su determinante vale 0) $= (-3)\cdot 0 = 0$.

P7 Si los elementos de una línea se pueden descomponer en 2 sumandos, el determinante es igual a la suma de los determinantes que muestra el ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a & x+\alpha & d \\ b & y+\beta & e \\ c & z+\gamma & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x & d \\ b & y & e \\ c & z & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & \alpha & d \\ b & \beta & e \\ c & \gamma & f \end{vmatrix}$$

P8 Si a una línea le sumamos otra línea multiplicada por un número (transformación elemental tipo II) el determinante <u>no varía.</u>

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} F_2 \to F_2 + F_1 \\ F_3 \to F_3 + (-2)\cdot F_1 \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$

Consecuencia: Si una línea es combinación lineal de las demás, entonces su determinante es 0. (Se entiende por combinación lineal la suma de varias líneas donde cada una puede estar multiplicada por un número)

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ = (Éste determinante valdrá 0 porque $(Fila3) = (Fila1) + 2\cdot(Fila2)$ Comprobémoslo realizando transformaciones elementales tipo II)

$$= \{F_3 \to F_3 + (-1)\cdot F_1\} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \{F_3 \to F_3 + (-2)\cdot F_2\} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(ya que tiene una fila de ceros)

P9 El determinante del producto es igual al producto de los determinantes:

$$\boxed{|A\cdot B| = |A|\cdot|B|}$$

EJERCICIOS:

1. Justifica, sin desarrollar, éstas igualdades:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ -8 & -2 & -14 \end{vmatrix} = 0$ **c)** $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 27 & 94 & 71 \end{vmatrix} = 0$ **d)** $\begin{vmatrix} 45 & 11 & 10 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

2. Teniendo en cuenta el resultado del determiante que se da, calcula el resto sin desarrollar:

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ **a)** $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

3. Si $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 8$, halla **a)** $|2A|$ **b)** $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -2d & -2e & -2f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$

4. Conociendo el valor del determinante de la matriz A, calcula el de B y el de C.

$|A| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ m & p & q \\ t & u & s \end{vmatrix} = 4$ $|B| = \begin{vmatrix} p & 2m & q \\ u & 2t & s \\ y & 2x & z \end{vmatrix}$ $|C| = \begin{vmatrix} x+3t & y+3u & z+3s \\ t & u & s \\ -m & -p & -q \end{vmatrix}$

5. Calcula los siguientes determinantes desarrollándolos por adjuntos:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & 13 \end{vmatrix}$ $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $|C| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ $|D| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Soluciones:

1. a) Tiene una fila de ceros (P2). b) $F_3 = (-2)F_1$ (P6) c) $F_3 = 10F_2 + F_1$ (Cons de P8) d) $F_1 = 10F_2 + F_3$ (Cons de P8)
2. a) 3 b) 1 c) 1 **3.** a) $|2A| = 64$ b) 8 c) -240 d) -8 **4.** $|B| = -8$ $|C| = 4$ **5.** $|A| = 0$ $|B| = -2$ $|C| = -35$ $|D| = 0$

EJERCICIOS P.A.U.

1. Encuentra el valor positivo de x que verifica la ecuación: $\begin{vmatrix} 3 & -1 & x \\ 5 & 2x & 7 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} = 5x + 6$

2. El determinante $\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$ vale 0 para $a = 3$. Comprueba esta afirmación sin desarrollarlo e indica las propiedades de los determinantes que aplicas.

3. Calcula el valor de $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$, sabiendo que $\begin{vmatrix} -d & -e & -f \\ -a & -b & -c \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} = 100$.

4. De una matriz cuadrada de orden 3 se sabe que su determinante vale -1. ¿Cuánto valdrá el determinante de la matriz 2A?

5. Sabiendo que $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 3$, calcula, sin desarrollar $\det\begin{pmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ 3c & 3a & 3b \end{pmatrix}$.

6. Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix}$

7. Resuelve la ecuación $\det(A - xI) = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, I la matriz unidad, y $x \in \mathbb{R}$ la incógnita.

8. Determina los valores de m que anulan el determinante $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & m+1 & m \\ 2m & 2m+1 & 2m+1 \end{vmatrix}$

9. Determina, según los valores de a, el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -4 & a \end{pmatrix}$

10. Halla el valor que debe tener x para que la matriz $A - xI$ sea la inversa de $\frac{1}{x}(A - I)$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Calcula el valor de los determinantes siguientes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$

12. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Halla A^2.

b) Resuelve la ecuación $A^2 \cdot X + A \cdot B = B$

13. ¿Cómo es la matriz inversa de una matriz diagonal regular? ¿Y su potencia de exponente 15?

14. Halla el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ según sea el valor del parámetro a. Encuentra, si existe, la matriz inversa de A en los casos $a = 0$ y $a = 1$.

15. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula la inversa de A y de A^n.

16. Se considera la matriz $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t & 2 & t^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Determina los valores del número real t para los que el determinante de A(t) sea 0.

b. Halla la inversa de la matriz A(t) para $t = -1$.

17. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ t & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ halla los valores de t para los cuales A no tiene inversa.

18. Sea

$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ -1 & x & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **a)** Determina para qué valores de x no existe la inversa de la matriz A. **b)** Calcula la inversa de A cuando $x = 1$.

19. Sea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$. Hallar el valor o valores de a para los cuales la matriz A no tiene inversa. Hallar A^{-1} para $a = 2$.

20. **a)** Define el concepto de matriz inversible. Da un criterio para asegurar que una matriz es inversible.

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$, determina para qué valores del parámetro m existe A^{-1}.

c) Para $m = -1$, resuelve det $|A^{-1} - xI| = 0$ (I es la matriz unidad).

21. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **a)** Calcula la matriz inversa de AB.

b) Halla el producto de la inversa de B por la inversa de A. ¿Qué relación existe entre la matriz del apartado anterior y esta matriz? Justifica tu respuesta.

22. Siendo las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

54026

¿es cierto que det $(AB) = $ det (BA) ?
Calcula, si es posible, la inversa de AB.

23. a) De las siguientes operaciones con determinantes de orden 2×2, señala las que son correctas y, en su caso, enuncia las propiedades que se utilizan: $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0$;

$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

b) Dadas las matrices A y B de orden 4×4 con $|A| = 3$ y $|B| = 2$, calcula $|A^{-1}|$, $|B^t A|$ y $\left|(AB^{-1})^t\right|$, justificando la respuesta.

SOLUCIONES:

1. -31/8, 2 **2.** Consec. de P8 (C3=C1+C2) **3.** 100 **4.** -8 **5.** 9 **6.** 4a+1 **7.** x=0,1,4 **8.** m=-1/3 **9.** a) Si a≠1 rg(A)=3. Si a=1 rg(A)=2 b) Si a≠1 rg(B)=3. Si a=1 rg(B)=2 **10.** x=2 **11.** a) $-3(x+1)(x-3)^3$ b) -2 c) 0 d) (a+b+c)(c-b-a)(b-c-a)(a-b-c) **12.** $A^2=I$, X=2I **13.** Es diagonal regular. Cada elemento de la diagonal queda elevado a 15

14. Si a≠1 y a≠-1 rg(A)=3. Si a=1 rg(a)=1. Si a=-1 rg(A)=2 **15.** $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(A^n)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **16.**

t=0
t=1
, $(A(-1))^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ **17.** $t = \pm\sqrt{5}$ **18.** Siempre $\exists A^{-1}, \forall x \in \mathbb{R}$

$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **19.** a=1
a=-1
$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ **20.**

a) $\begin{cases} \text{A es inversible si } \exists A^{-1} \text{ tal que } AA^{-1} = A^{-1}A = I \\ \text{Criterio: A es inversible cuando } |A| \neq 0 \end{cases}$ b) Siempre $\exists A^{-1}, \forall m \in \mathbb{R}$ c) x=-1(doble)
x=1
21.

$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \text{Son iguales porque la inversa de A}\bullet\text{B es } B^{-1}A^{-1}. \text{ Veámoslo:} \\ (AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = i \\ B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I \end{cases}$ **22.** No es cierto, dado que $|AB| = 23$, $|BA| = 0$.

$(AB)^{-1} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -10 & 9 \end{pmatrix}$ **23.** a) P6;P5;Falso (mal aplicada la P5) b) $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{3}$ $|B^T A|=|B^T|$

TEMA 3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

1. Resuelve los siguientes sistemas, el 1º por la regla de Cramer y el 2º por el método de Gauss: (2 ejercicios PAU)

a) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - 3y - z = -9 \\ 3x + 2y - 5z = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 8 \\ x + y + 2z = 1 \\ 7x - 8y + 8z = 22 \end{cases}$

2. Sea el siguiente sistema de ecuaciones, en función del parámetro m:

$$\left.\begin{aligned} 3x + (2m+3)y &= 1 \\ -3mx + y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

a) Exprésalo en forma matricial, siendo los elementos de una de las matrices que intervienen las variables x e y.

b) Discútelo según los valores del parámetro m.

c) Determina su solución para $m = 5$.

3. Discute los siguientes sistemas en función de los valores del parámetro a: (2 ejercicios PAU)

a) $\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$ y resuélvelo para $a = 0$. **b)** $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ -x - y + (a-4)z = 7 \\ x + y + 2z = 11 \end{cases}$ y resuélvelo para $a = 4$.

4. Discute y resuelve, si es compatible, el siguiente sistema: $\begin{cases} 4x - 4z = 0 \\ x - y + az = 0 \\ -x - ay - z = 0 \end{cases}$

5. En una confitería envasan bombones en cajas de 250 g, 500 g y 1 kg. Cierto día se envasaron 60 cajas en total, habiendo 5 cajas más de tamaño pequeño (250 g) que de tamaño mediano (500 g). Sabiendo que el precio del kilogramo de bombones es de 40 € y que el importe total de los bombones envasados asciende a 1250 €:

a. Plantea un sistema para determinar cuántas cajas se han envasado de cada tipo.

b. Resuelve el problema.

6. Discute, según los valores del parámetro correspondiente en cada apartado, los sistemas: (3 ejercicios PAU)

a) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + \lambda z = \lambda \\ x + y - \lambda z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - my - 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 2y = a \\ -x + (a+1)y = a \end{cases}$

54026

y resuelve **b)** y **c)**
cuando sea posible.

7. Clasifica y resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - 2y - 2z + t = 4 \\ x + y + z - t = 5 \\ x - y - z + t = 6 \\ 6x - 3y - 3z + 2t = 32 \end{cases}$$

8. Una multinacional de seguros tiene delegaciones en Madrid, Barcelona y Valencia. El nº total de ejecutivos de las tres delegaciones asciende a 31. Para que el nº de ejecutivos de la delegación de Barcelona fuese igual al de Madrid, tendrían que trasladarse tres de ellos de Madrid a Barcelona. Además, el nº de ejecutivos de Madrid excede en uno a la suma de los destinados en las otras dos ciudades. ¿Cuántos ejecutivos están destinados en cada ciudad?

9. Los gastos diarios de tres estudiantes, Marta, Raúl y Pedro, suman 15,45 €. Si a lo que gasta Marta se le suma el triple de la diferencia entre los gastos de Raúl y Pedro obtenemos lo que gasta Pedro. Además, ocho veces la diferencia entre el gasto de Raúl y el de Marta es igual al gasto de Marta. Averigua cuál es la cantidad que gasta cada uno.

10. a) Resuelve $x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** Dado $x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ Expresa el sistema anterior en la forma matricial $AX = B$, calcula la matriz inversa A^{-1} y resuélvelo.

11. En una acería se fabrican tres tipos de productos: acero en láminas, en rollos o aceros especiales. Estos productos requieren chatarra, carbón y aleaciones en las cantidades que se indican en la tabla siguiente, por cada unidad de producto fabricado:

	A. en láminas	A. en rollos	A. especiales
Chatarra	8	6	6
Carbón	6	6	4
Aleaciones	2	1	3

a. Si durante el próximo mes se desea fabricar 6 unidades de acero en láminas, 4 unidades de acero en rollos y 3 unidades de aceros especiales, obtén una matriz que indique las cantidaes de chatarra, carbón y aleaciones que serán necesarias. (Obténla mediante un producto de la matriz de la tabla anterior por una matriz columna).

b. Si se dispone de 34 unidades de chatarra, 28 de carbón y 9 aleaciones, ¿cuántas unidades de cada tipo de acero se podrán fabricar con estos materiales?

12. Discute y resuelve, cuando sea posible, los siguientes sistemas: (3 ejercicios PAU)

a) $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+y=1 \\ 4x-y=n \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2y-z=a \\ 3x-2z=11 \\ y+z=6 \\ 2x+y-4z=a \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \lambda x+y=1 \\ \lambda y+z=1 \\ \lambda x+2y+z=1 \end{cases}$

13. Halla el valor del parámetro k para que las tres rectas del plano, definidas por las siguientes ecuaciones, sean concurrentes en un punto.

$$\left.\begin{array}{l} y=2x+4 \\ 2y+3x+k=0 \\ x+y=10 \end{array}\right\}$$

14. Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & m \end{pmatrix}$, siendo m un parámetro real. Se pide:

a. Calcula el rango de A según los valores del parámetro m.

b. Considera el sistema de ecuaciones lineales $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Discute si existe solución según los valores del parámetro m. En caso afirmativo, resuelve el sistema.

c. Para $m=7$, considera el sistema de ecuaciones lineales $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Discute si existe solución.

15. Un grifo tarda 3 horas en llenar un depósito, mientras que otro sólo tarda 2 horas en llenarlo. ¿Cuánto tardarán en llenar el depósito los dos grifos a la vez? Razona la respuesta.

16. Una ama de casa adquirió en el mercado ciertas cantidades de patatas, manzanas y naranjas a un precio de 0,5; 0,75 y 1 €/kg, respectivamente. El importe total de la compra fue de 7,25 €. El peso total de la misma es 9 kg y, además, compró 1 kg más de naranjas que de manzanas. ¿Cuántos kg compró de cada uno de los productos?

17. Si a un nº de dos cifras se le suma 18, se obtiene el nº con las cifras intercambiadas. Sabiendo que la suma de las cifras del nº es 16, encuentra dicho nº.

18. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Resuelve por el método de Gauss:

a. El sistema de ecuaciones homogéneo cuya matriz de coeficientes es $A\cdot A^t$.

b. El sistema de ecuaciones no homogéneo cuya matriz ampliada es $A^t\cdot A$, siendo la última columna los términos independientes.

19. Un cine proyecta una película sólo tres días: lunes, martes y miércoles. Se sabe que el nº de espectadores del martes se incrementó un 12 % respecto al del lunes, el miércoles ese nº disminuyó un 12 % respecto al martes y el l:unes ese nº superó en 36 espectadores el del miércoles. ¿Cuántos espectadores vieron la película cada uno de los días?

20. En cierta heladería, por una copa de la casa, dos horchatas y cuatro batidos te cobran 34 € un día. Otro día, por cuatro copas de la casa y 4 horchatas te cobran 44 €, y un tercer día, te piden 26 € por una horchata y 4 batidos. ¿Tienes motivos para pensar que alguno de los tres días te han presentado una cuenta incorrecta?

21. Dos amigos invierten 20000 € cada uno. El primero coloca una cantidad A al 4% de interés, una cantidad B al 5 % y el resto al 6%. El otro invierte la misma cantidad A al 5%, la B al 6% y el resto al 4%. Determina las cantidades A,B y C sabiendo que el primero obtiene unos intereses de 1050€ y el segundo de 950€.

22. Una tienda ha vendido 600 ejemplares de un videojuego por un total de 6384€. El precio original era de 12€, pero también ha vendido copias defectuosas con un descuento del 30% y del 40%. Sabiendo que el número de copias defectuosas vendidas fue la mitad del de copias en buen estado, calcula a cuántas copias se le aplicó el 30% de descuento.

23. Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 € y un total de 2000€. Si el nº de billetes de 10€ es el doble que el nº de billetes de 20€, averigua cuántos billetes hay de cada tipo.

24. Antonio tiene un año más que Juan, y Luis, uno más que Ángel. Determina la edad de los cuatro sabiendo que la de Luis es la suma de la tercera parte más la séptima parte de la de Antonio y que la de Ángel es la suma de la cuarta parte más la quinta parte de la de Juan.

25. Tres amigos acuerdan jugar tres partidas de dados de forma que, cuando uno pierda, entregará a cada uno de los otros dos una cantidad igual a la que cada uno posea en ese momento. Cada uno perdió una partida y al final cada uno tenía 24€. ¿Cuánto tenía cada jugador al comenzar?

26. Un joyero tiene tres clases de monedas: A, B y C. Las monedas de tipo A tienen 2 gramos de oro, 4 gr de plata y 14 gr de cobre; las de tipo B tienen 6 gr de oro, 4 gr de plata y 10 gr de cobre y las de tipo C tienen 8 gr de oro, 6 gr de plata y 6 gr de cobre. ¿Cuántas monedas de cada tipo debe fundir para obtener 44 gr de oro, 44 gr de plata y 112 gr de cobre?

27. Un fabricante produce 42 electrodomésticos. La fábrica abastece a 3 tiendas, que demandan toda la producción. En una cierta semana, la primera tienda solicitó tantas unidades como la segunda y la tercera juntas, mientras que la segunda pidió un 20% más que la suma de la mitad de lo pedido por la primera más la tercera parte de lo pedido por la tercera. ¿Qué cantidad solicitó cada una?

28. Se mezclan 60 l de vino blanco con 20 l de vino tinto y se obtiene un vino de 10 grados (10% de alcohol). Si, por el contrario, se mezclan 20 l de blanco con 60 l de tinto, se obtiene un vino de 11 grados. ¿Qué graduación tendrá una mezcla de 40 l de vino blanco y 40 l de vino tinto?

29. Dadas las ecuaciones $\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$. Añade una ecuación para que el sistema sea:

a) Incompatible. **b)** Compatible Determinado.

30. Encuentra razonadamente dos valores del parámetro *a* para los cuales el siguiente sistema sea incompatible:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + 2z = 1 \\ x \quad\; + 3z = 2 \\ 2x \quad\; + az = 3 \end{cases}$$

31. Sean S y S´ dos sistemas equivalentes con solución única que tienen iguales los términos independientes. ¿Podemos asegurar que tienen iguales los coeficientes de las incógnitas?

32. En el trayecto que hay entre su casa y el trabajo, un individuo puede repostar gasolina en 3 estaciones de servicio (A, B y C). El individuo recuerda que este mes el precio de la gasolina en A ha sido de 1,2 €/litro y el precio en B, de 1,18 €/litro, pero ha olvidado el precio en C (supongamos que son m €/litro, con m desconocido). También, recuerda que la suma del gasto en litros de gasolina de las estaciones A y B superó en 46,80 € al gasto en C; el nº de litros consumidos en B fue el mismo que en C, y que el gasto en litros en A superó al de B en 12,60 €.

a. Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) para determinar los litros consumidos en cada gasolinera.

b. Estudia la compatibilidad del sistema en función de m. ¿Puedes dar algún precio al que sea imposible haber vendido la gasolina en C?

SOLUCIONES:

1. a) (1,3,2) b) $\left(\frac{10-8\lambda}{5}, -\frac{2\lambda+5}{5}, \lambda\right)$ **2.** $\begin{cases} m \neq -1 \text{ y } m \neq -1/2 \to SCD \\ m=-1 \to SCI \\ m=-1/2 \to SI \end{cases}$ m=5 → $\left(-\frac{2}{33}, \frac{1}{11}\right)$ **3.** a) $\begin{cases} \text{Si } a \neq 1/5 \to SCD \\ \text{Si } a=1/5 \to SI \end{cases}$ a=0 → $(-9,4,3)$ b) $\begin{cases} \text{Si } a \neq 2 \to SCD \\ \text{Si } a=2 \to SI \end{cases}$ a=4 → $(-5,-2,9)$ **4.** SCD $\forall a \in \mathbb{R}$. sol: (0,0,0) **5.** $\begin{cases} x+y+z=60 \\ x=y+5 \\ 10x+20y+40z=1250 \end{cases}$ sol: (25,20,15) **6.** a) $\begin{cases} |A| = 1-5\lambda \\ \text{Si } \lambda \neq 1/5 \to SCD \\ \text{Si } \lambda = 1/5 \to SI \end{cases}$ b) $\begin{cases} |A| = 7m+56 \\ \text{Si } m \neq -8 \to SCD \\ \text{Si } m = -8 \to SCI \end{cases}$ sol: $\left(\frac{\lambda}{19}, \frac{7\lambda}{19}, \lambda\right)$ c)

54026

$\begin{cases} |A^*| = 1 - a^2 \\ \text{Si } a \neq 1 \text{ y } a \neq -1 \ \to \text{SI} \\ \text{Si } a = 1 \text{ o } a = -1 \ \to \text{SCD} \end{cases}$ a=1 sol: (3,2). a=-1 sol: (1,0) **7.** SI **8.** $\begin{cases} x+y+z=31 \\ x-3=y+3 \\ x=y+z+1 \end{cases}$ sol: (16,10,5) **9.**

$\begin{cases} x+y+z=15'45 \\ x+3(y-z)=z \\ 8(y-x)=x \end{cases}$ sol: (4´8, 5´4, 5´25) **10.** a) (2,-3,2) b) $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ sol: (1´5, 0´5, 0) **11.** a)

$\begin{pmatrix} 90 \\ 72 \\ 25 \end{pmatrix}$ b) $\begin{cases} 8x+6y+6z=34 \\ 6x+6y+4z=28 \\ 2x+y+3z=9 \end{cases}$ sol: (2,2,1) **12.** a) $\begin{cases} n \neq 2 \ \to \text{SI} \\ n=2 \ \to \text{SCD } (7/3,\ 2/3) \end{cases}$ b) $\begin{cases} a \neq 6 \to \text{SI} \\ a=6 \to \text{SCD } (5,4,2) \end{cases}$ c)

$\begin{cases} \text{Si } \lambda \neq 0 \text{ y } \lambda \neq 1 \ \to \text{SCD Sol: } \left(\frac{\lambda-2}{\lambda(\lambda-1)}, \frac{1}{\lambda-1}, \frac{1}{\lambda-1}\right) \\ \text{Si } \lambda = 0 \text{ SCI sol: } (x,1,1) \text{ con } x \in \mathbb{R} \\ \text{Si } \lambda = 1 \text{ SI} \end{cases}$ **13.** k=-22 **14.** a) $\begin{cases} \text{Si } m \neq 7 \ \ rg(A)=3 \\ \text{Si } m=7 \ \ rg(A)=2 \end{cases}$ b)

$\begin{cases} \text{Si } m \neq 7 \ \text{ SCD sol: } (0,0,0) \\ \text{Si } m=7 \ \text{ SCI sol: } (-5\lambda, 2\lambda, \lambda) \end{cases}$ c) SI **15.** 1h y 12 min **16.** $\begin{cases} 0'5x+0'75y+z=7'25 \\ x+y+z=9 \\ z=y+1 \end{cases}$ sol: (2,3,4) **17.**

$\begin{cases} 10x+y+18=10y+x \\ x+y=16 \end{cases}$ sol: el 79 **18.** a) (0,0) b) (-1,3) **19.** $\begin{cases} 1'12x=y \\ 0'88y=z \\ x+36=z \end{cases}$ (2500, 2800, 2464) **20.** $\begin{cases} x+2y+4z=34 \\ 4x+4y=44 \\ y+4z=26 \end{cases}$ Sí pq

es SI **21.** $\begin{cases} x+y+z=20000 \\ 0'04x+0'05y+0'06z=1050 \\ 0'05x+0'06y+0'04z=950 \end{cases}$ (5000, 5000, 10000) **22.** $\begin{cases} x+y+z=600 \\ 12x+8'4y+7'2z=6384 \\ 2y+2z=x \end{cases}$ (400, 120, 80) A 120

copias **23.** $\begin{cases} x+y+z=95 \\ 10x+20y+50z=2000 \\ x=2y \end{cases}$ (50, 25, 20) **24.** $\begin{cases} x=y+1 \\ z=t+1 \\ z=x/3 + x/7 \\ t=y/4 + y/5 \end{cases}$ (21,20,10,) **25.** (39,21,12) **26.**

$\begin{cases} 2x+6y+8z=44 \text{ (oro)} \\ 4x+4y+6z=44 \text{ (plata)} \\ 14x+10y+6z=112 \text{ (cobre)} \end{cases}$ (5,3,2) **27.** $\begin{cases} x+y+z=42 \\ x=y+z \\ y=1'2(x/2 + z/3) \end{cases}$ (21,15,6) **28.** $\begin{cases} 60x+20y=8 \\ 20x+60y=8'8 \end{cases}$ (0´095, 0´115) →

$40 \cdot 0'095 + 40 \cdot 0,115 = 8'4$ litros de alcohol (en 80 l) → $80z = 8'4$ → z=0´105 → sol: 10´5 grados **30.**
$|A^*| = 2a^2 - 12a + 16 = 0$ cuando a=2 o a=4. Por tanto cualquier valor de a distinto de 2 y de 4 vale. **31.** No, si son homogéneos podrían tener los coeficientes proporcionales (y no tedrían por qué ser iguales. **32.**

$\begin{cases} 1'2x+1'18y=mz+46'80 \\ y=z \\ 1'2x=1,18y+12'60 \end{cases}$ Si m≠ 2´36 SCD
Si m=2´36 SI
Sí, sería imposible al precio de 2´36€

54026

TEMA 4. PROGRAMACIÓN LINEAL.

MÉTODO DE LOS VÉRTICES:

1º Obtenemos todos los vértices de la región factible.

2º Sustituimos cada vértice en la función objetivo hasta encontrar el máximo o el mínimo.

MÉTODO DE LAS RECTAS DE NIVEL:

1º Escogemos un punto cualquiera de la región factible y dibujamos la recta de nivel que pasa por él.
2º Dibujamos el vector gradiente ∇f.
3º Trasladamos la recta de nivel de forma paralela en la dirección y sentido que indica el vector gradiente. El último punto de contacto con la región factible es el máximo. Si hemos de encontrar el mínimo la recta de nivel se traslada en el sentido contrario al vector gradiente.

PROBLEMAS

1. En un taller de carpintería se fabrican mesas de cocina de formica y de madera. Las de formica se venden a 210 € y las de madera a 280 €. La maquinaria del taller condiciona la producción, por lo que no se pueden fabricar al día más de 40 mesas de formica , ni más de 30 de madera, ni tampoco más de 50 mesas en total. Si se vende todo lo que se fabrica, ¿cuántas mesas de cada tipo les convendría fabricar para ingresar por su venta la máxima cantidad de dinero posible?

2. Una empresa fabrica y vende dos artículos A y B. En su producción se utilizan tres tipos de máquinas M_1, M_2 y M_3. La tabla que se adjunta indica el tiempo, en horas, que necesita cada máquina para fabricar cada uno de los modelos. Cada máquina trabaja un máximo de 60 h semanales. Si por la venta de cada uno de los artículos del tipo A obtiene un beneficio de 10000 €, y por cada uno del tipo B, un beneficio de 15000 €, ¿cuántos artículos se deben fabricar de cada tipo para maximizar el beneficio?

	M_1	M_2	M_3
A	2	3	1
B	4	1	5

3. Un granjero tiene que suministrar al día un mínimo de 30 mg de vitamina A, 20 mg de vitamina B y 30 mg de vitamina C por kilogramo de pienso a sus animales. Dispone de dos compuestos de pienso P_1 y P_2, cuyos contenidos en miligramos de vitaminas A, B y C por kilogramo de pienso vienen dados en la tabla que se adjunta. El kilogramo de pienso P_1 vale 1 € y el de P_2 vale 1´2 €. ¿Cuántos kg de cada tipo de pienso debe mezclar para que el coste sea mínimo?

	A	B	C
P_1	3	4	5
P_2	4	2	6

4. Dos fábricas F_1 y F_2 producen 40 y 50 unidades respectivamente de un determinado producto. Deben abastecer a tres centros C_1, C_2 y C_3, que necesitan 20, 45 y 25 unidades respectivamente. El coste del transporte de cada fábrica a cada centro de

consumo, en euros por unidad, viene dado en la siguiente tabla

	C_1	C_2	C_3
F_1	5	10	15
F_2	10	7	14

.

¿Cómo han de distribuirse las unidades del producto para que el transporte sea lo más económico posible?

5. Dibuja la región definida por las siguientes desigualdades y determina en ella el punto en que la función $f(x,y) = 6x + y$ toma el valor máximo:

$$5x + y \leq 47$$
$$9y - 2x \geq 0$$
$$x + 2y \leq 22$$
$$x \geq 0$$

6. Se considera la región del primer cuadrante determinada por las inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 8 \\ x + y \geq 4 \\ x + 2y \geq 6 \end{array}\right\}$$

a) Dibuja la región y determina sus vértices.

b) Dada la función objetivo $f(x,y) = 3x + 2y$, halla dónde alcanza dicha función su valor mínimo y calcúlalo.

7. Una fábrica textil elabora prendas de punto de calidades A y B. Las prendas de calidad A se fabrican con 1 unidad de lana y 2 unidades de fibra sintética, y las de calidad B con 2 unidades de lana y 1 de fibra sintética. Los beneficios obtenidos en la venta de las prendas son de 15 € para las de calidad A y 10 € para las de calidad B. Sabiendo que sólo se dispone de 180 unidades de lana y 240 de fibra sintética, se pide:

a. Determina cuántas prendas de cada tipo debe elaborarse para obtener un beneficio máximo si la producción no puede ser superior a 1000 prendas.

b. ¿A cuánto ascenderá dicho beneficio? Justifica las respuestas.

8. Un pastelero tiene 150 kg de harina, 22 kg de azúcar y 27,5 kg de mantequilla para hacer 2 tipos de pasteles, P y P´. Para elaborar una docena de pasteles del tipo P necesita 3 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla, y para hacer una docena del tipo P´ necesita 6 kg de harina, 0,5 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla.

El beneficio que obtiene por una docena del tipo P es 20 € y por una docena del tipo P´ es 30 €. Halla, utilizando las técnicas de programación lineal, el número de docenas que tiene que hacer de cada clase para que el beneficio sea máximo.

9. Una granja de aves cría pollos y patos con un coste por cada pollo de 1 € y de 2 € por cada pato. Los precios de venta son 1,80 € el pollo y 2,30 € el pato. Sabiendo que la capacidad máxima de la granja es de 2000 animales y que sólo dispone de 3000 € para invertir en pollos y patos, se pide:

a. Determina el número de pollos y patos que se pueden criar para obtener un beneficio máximo.

b. ¿Cuál será dicho beneficio máximo? Justifica las respuestas.

10. Se necesita una dieta que proporcione a un animal 3000 calorias y 80 unidades de proteínas diarias. En el mercado hay dos alimentos básicos que pueden usarse para preparar la dieta. El alimento A cuesta 20 céntimos/kg, y contiene 600 calorías y 2 unidades de proteínas. Y el alimento B cuesta 10 céntimos/kg, y contiene 50 calorías y 8 unidades de proteínas. Determina la combinación de alimentos más económica quesatisfaga las necesidades de la dieta.

11. Me ofrecen la posibilidad de vender hasta un máximo de 24 toneladas de dos productos A y B, dándome una comisión de 150 € por tonelada vendida de A y 100 € por tonelada vendida de B. Averigua cuántas toneladas debo vender de A y de B para maximizar la ganancia.

12. Los alumnos y alumnas de primero de Bachillerato, con el objetivo de recaudar fondos para el viaje de fin de curso, deciden vender paquetes de dulces navideños. Disponen de 10 kg de polvorones y 8 kg de mantecados. Acuerdan hacer 2 tipos de paquetes: uno, a un precio de 3 euros, formado por 100 g de polvorones y 150 g de mantecados, y otro, a un precio de 4 €, que contiene 200 g de polvorones y 100 g de mantecados. ¿Cuántos paquetes de cada tipo les interesa vender?

13. Una fábrica de adornos produce broches sencillos y broches de fiesta. Se obtiene un beneficio de 4 € por cada broche sencillo y 6 € por cada broche de fiesta. En un día no se pueden fabricar más de 400 broches sencillos ni más de 300 de fiesta, y tampoco pueden producirse más de 500 broches en total. Suponiendo que se logra vender toda la producción de un día, ¿cuál es el número de broches de cada clase que conviene fabricar para obtener el máximo beneficio? Calcula la producción necesaria para conseguir el máximo beneficio si se obtienen 6 euros por cada broche sencillo y 4,50 euros por cada broche de fiesta.

14. Doscientas personas quieren organizar una excursión con una empresa que dispone de cuatro autobuses de 40 plazas cada uno y cinco autobuses de 50 plazas cada uno. El alquiler de un autobús grande es de 180 €, y el alquiler de uno pequeño es de 120 €. ¿Qué combinación de autobuses minimiza el coste de la excursión si la empresa dispone de cinco conductores?

15. Una empresa constructora dispone de un total de 93000 m^2 de terreno urbanizable. Decide construir dos tipos de viviendas unifamiliares: unas, en parcelas de 400 m^2, que albergarán a familias de una media de 5 miembros, y cuyo precio de venta será de 400000 €; y otras, en parcelas de 300 m^2, en donde vivirán familias de una media de 4 miembros, y costarán 320000 €. Las autoridades del municipio le imponen dos condiciones: (1) el nº de casas no puede superar las 275; (2) el nº de habitantes esperado no puede ser superior a 1200 personas. ¿Cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para maximizar los ingresos por ventas?

16. Se va a organizar una planta de un taller de automóviles donde van a trabajar electricistas y mecánicos; por necesidades del mercado, esnecesario que haya mayor o igual nº de mecánicos que de electricistas, y que el nº de mecánicos no supere al doble del nº de electricistas. En total, hay disponoibles 20 electricistas y 30 mecánicos. El beneficio de la empresa por jornada es 250 € por electricista y 200 € por mecánico.

¿Cuántos trabajadoresde cada clase deben elegirse para obtener el máximo beneficio?

Soluciones:

5. (9,2) **6.** (0,4) f(0,4)=8 **7.** x: nº prendas A; y: nº prendas B

$$\begin{cases} x + 2y \leq 180 \text{ (lana)} \\ 2x + y \leq 240 \text{ (fibra)} \\ x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \end{cases}$$

$f(x,y) = 15x + 10y$

Sol: 100 prendas A y 40 prendas B. 1900 €

8. x: nº pasteles P; y: nº pasteles P´

$$\begin{cases} 3x + 6y \leq 150 \text{ (harina)} \\ x + 0´5y \leq 22 \text{ (azúcar)} \\ x + y \leq 27´5 \text{ (mantequilla)} \\ x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \end{cases}$$

$f(x,y) = 20x + 30y$

Sol: 5 docenas de P y 22´5 docenas de P´

9. x: nº pollos; y: nº patos

$$\begin{cases} x + y \leq 2000 \text{ (cap. granja)} \\ x + 2y \leq 3000 \text{ (dinero inv.)} \\ x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \end{cases}$$

$f(x,y) = 0´8x + 0´3y$

Sol: 2000 pollos y ningún pato. Beneficio 1600 €.

10. x: kg de A; y: kg de B

$$\begin{cases} 600x + 50y \geq 3000 \text{ (cal.)} \\ 2x + 8y \geq 80 \text{ (prot.)} \\ x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \end{cases}$$

$f(x,y) = 20x + 10y$ (Min.)

Sol: 8´936 kg de A y 4´255 kg de B

11. x: ton. de A; y: ton. de B

$$\begin{cases} x + y \leq 24 \\ x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \end{cases}$$

$f(x,y) = 150x + 100y$ (Max.)

Sol: 24 ton. de A

12. x: nº paq a 3 €; y: nº paq a 4 €

$$\begin{cases} 0´1x + 0´2y \leq 10 \\ 0´15x + 0´1y \leq 8 \\ x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \end{cases}$$

$f(x,y) = 3x + 4y$ (Max.)

Sol: 30 paq. de 3 € y 35 paq. de 4 €.

13. x: nº broches senc.; y: nº broches fiesta

$$\begin{cases} x \leq 400 \\ y \leq 300 \\ x + y \leq 500 \\ x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \end{cases}$$

$f(x,y) = 4x + 6y$ (Max.) $g(x) = 6x + 4´5y$ (Max)

Sol1: 200 senc. y 300 de fiesta.

Sol2: 400 senc. y 100 de fiesta.

14. x: nº autob. peq.; y: nº autob. gran.

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ 40x + 50y \geq 200 \\ x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \end{cases}$$

$f(x,y) = 120x + 180y$ (Mín.)

Sol: 5 autob. peq.

15. x: nº viv. de 5.; y: nº viv. de 4.

$$\begin{cases} 400x + 300y \leq 93000 \\ x + y \leq 275 \\ 5x + 4y \leq 1200 \\ x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \end{cases}$$

$f(x,y) = 400\,000x + 320\,000y$ (Max.)

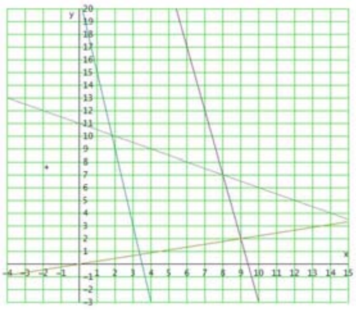
Sol: Todos los puntos de la recta 5x+4y=1200 comprendidos entre (100,175) y (120,150).

16. x: nº elect.; y: nº mecán.

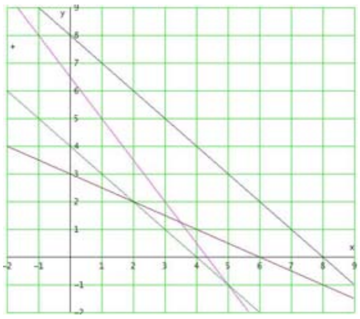
$$\begin{cases} x \leq y \\ 2x \geq y \\ x \leq 20 \\ y \leq 30 \\ x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \end{cases}$$

$f(x,y) = 250x + 200y$ (Max.)

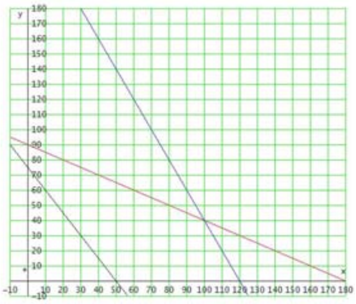
Sol: 20 elect. y 30 mecán.



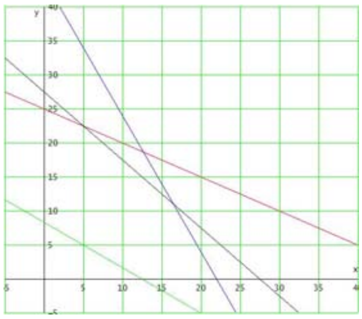
5



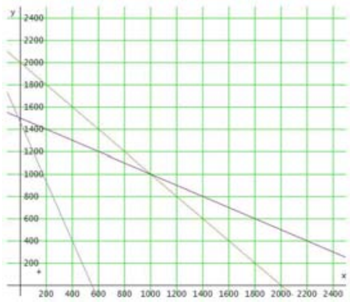
6



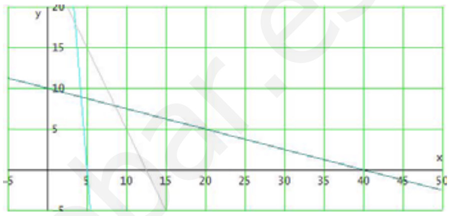
7



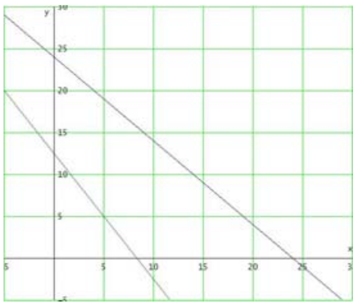
8



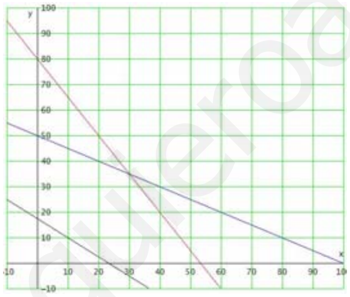
9



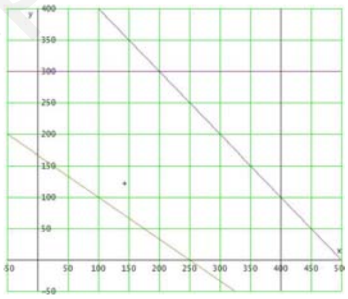
10



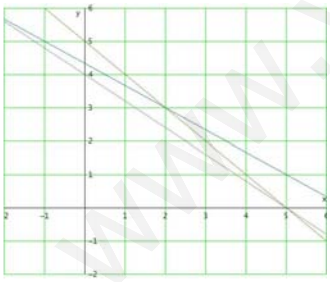
11



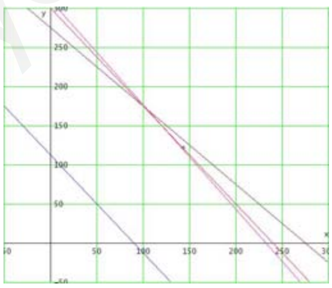
12



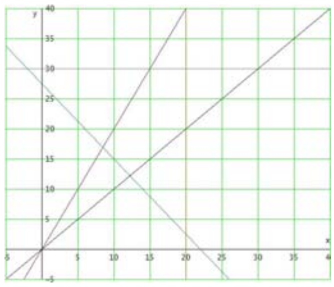
13



14



15



16

PROBLEMAS AÑADIDOS. (Problemas de transporte: 1→ 5, de tanto por uno: 6,7)

1. Dos yacimientos de oro, A y B, producen al año 2000 kg y 3000 kg de mineral de oro, respectivamente, que deben distribuirse a tres puntos de elaboración: C, D y E, que admiten 500 kg, 3500 kg y 1000 kg de mineral, respectivamente, al año. El coste del

transporte, en euros por kilogramo, es el que vemos en la tabla:

Coste	C	D	E
A	10	20	30
B	15	17,5	20

.

¿Cómo ha de distribuirse el mineral para que el transporte sea lo más económico posible? Sol: (500,1500)

2. Una empresa compra 26 locomotoras a tres fábricas: 9 a A, 10 a B y 7 a C. Las locomotoras deben prestar servicio en dos estaciones distintas: 11 de ellas en la estación N y 15 en la S. Los costes de traslado son, por cada una, los que se indican en la tabla (en miles de euros):

	A	B	C
N	6	15	3
S	4	20	5

. Averigua cómo conviene hacer el reparto para que el coste sea mínimo.

3. Dos almacenes A y B distribuyen fruta a tres mercados. El almacén A dispone de 15 toneladas de fruta diarias y el B de 20 toneladas, que reparten en su totalidad. Los tres mercados necesitan diariamente 12, 13 y 10 toneladas de fruta, respectivamente. Si el coste del transporte desde cada almacén a los mercados está representado en la tabla

Almacén	Mercado 1º	Mercado 2º	Mercado 3º
A	5	10	20
B	8	15	10

, ¿cómo planificarías el transporte de forma que el coste sea mínimo?

4. Una empresa posee dos fábricas, F_1 y F_2, que producen 80 y 100 unidades respectivamente de un determinado producto. Deben abastecer a tres centros C_1, C_2 y C_3, que necesitan a su vez 50, 70 y 60 unidades. El coste del transporte de cada fábrica a cada centro, en euros por unidad, viene dado por la siguiente tabla:

	C_1	C_2	C_3
F_1	50	100	90
F_2	100	75	120

. ¿Cómo ha de organizarse el transporte para que sea lo más económico posible? Sol: (50,0)

5. Dos fábricas de motocicletas F_1 y F_2 producen, respectivamente, 5000 y 8000 motocicletas, que deben distribuirse a tres centros de ventas C_1, C_2 y C_3, en cantidades de 4500, 3000 y 5500, respectivamente. El coste del transporte, en euros, a los puntos de venta viene dado en la tabla:

	C_1	C_2	C_3
F_1	300	250	400
F_2	350	300	350

. Calcula las motocicletas que habrá que transportar desde cada fábrica a cada centro para que el transporte resulte lo más económico posible.

6. Para abonar una parcela de huerta se necesitan por lo menos 8 kg de nitrógeno y 12 kg de fósforo. Se dispone de un producto A cuyo precio es 30 céntimos/kg y que contiene un 10 % de nitrógeno y un 30 % de fósforo. Existe en el mercado otro producto B que contiene un 20 % de nitrógeno y otro 20 % de fósforo, y cuyo precio es 40 céntimos/kg. ¿Qué cantidades se deben tomar de A y B para abonar la parcela con el menor gasto posible? Sol: (20,30)

7. Don Elpidio decide emplear hasta 30 000 € de su patrimonio en la adquisición de acciones de dos sociedades de inversión: BLL e ISSA. El precio de cada acción es de 10 € cada una, y en ambos casos.

BLL dedica el 35 % de su actividad al sector seguros, el 45% al sector inmobiliario y el 20 % al sector industrial. ISSA dedica el 30% de sus recursos al sector seguros, el 25 % al inmobiliario y el 45 % al industrial.

D. Elpidio no quiere invertir más del 40 % de su capital en el sector industrial ni más del 35 % en el inmobiliario. ¿Cuántas acciones debe adquirir de cada sociedad si BLL prevé entregar un dividendo de 1´2 €/acción e ISSA de 1€/acción?

54026

TEMA 5: LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES.

INTRODUCCIÓN: Requisitos previos.

Función:

Es una relación entre 2 variables, de forma que a un valor de la 1ª variable (x: variable independiente) le asocia **un único valor** de la 2ª variable (y: variable dependiente).

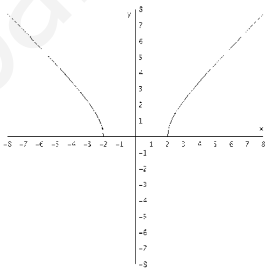
La relación entre las dos variables (la función) se puede expresar de 3 formas diferentes:

Formas de expresar una función:

Fórmula **Tabla de valores** **Gráfica**

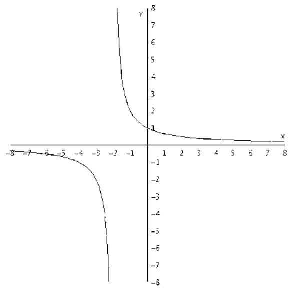
$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	3.46...	2.23...	0	∄	∄	∄	0	2.23...	3.46...



$g(x) = \dfrac{2}{x+2}$

x	-8	-4	-3	-2.2	-2	-1.8	-1	0	4
y	$-0.\widehat{3}$	-1	-2	-10	∄	10	2	1	$0.\widehat{3}$



Dominio de una función:

Es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente (x).

Recorrido o conjunto imagen de una función:

Es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente (y)

.

Monotonía (Crecimiento y decrecimiento):

Una función es **creciente** en un intervalo cuando a un aumento de la x le corresponde un aumento de la y.

Una función es **decreciente** en un intervalo cuando a un aumento de la x le corrsponde una disminución de la y.

Extremos (Máximos y mínimos):

Un **máximo relativo** es un punto más alto que los que hay a su alrededor. Es decir, a su

54026

izquierda la función es creciente y a su derecha la función es decreciente.
Un **máximo absoluto** es el punto más alto de toda la gráfica (si lo hay).

Asíntotas (Verticales, horizontales y oblicuas):
Una asíntota es una recta imaginaria (no tiene por qué estar dibujada) a la cual la gráfica de la función se "acerca infinitamente".
Una asíntota vertical se escribe $x = k$ (nº fijo), una horizontal será $y = k$ y una oblicua $y = mx + n$

1. **a)** Observando las gráficas de las dos funciones anteriores (f, g), señala el dominio y recorrido de cada una.

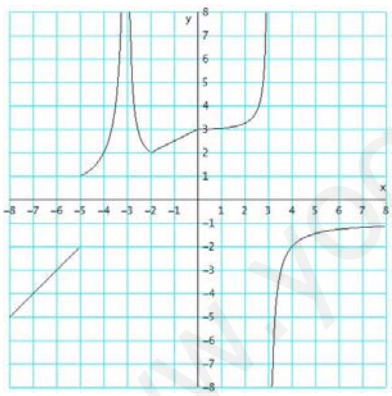
   b) Vuelve a obtener el dominio, pero esta vez a partir de sus fórmulas.

   c) En la construcción de la gráfica, explica cómo se han unido los puntos y como continuarían las ramas inacabadas.

   d) Analiza la monotonía e indica todas las asíntotas.

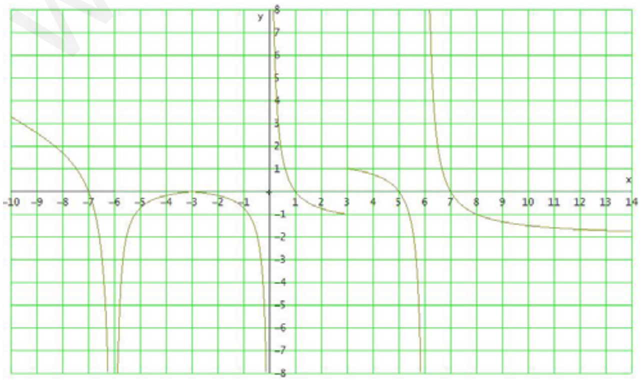
   e) Calcula estos límites para cada una de las funciones: $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ $\lim_{x \to -2} f(x)$ $\lim_{x \to 2} f(x)$

2. A partir de la siguiente gráfica, responde a las cuestiones planteadas:



a) Calcula $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
b) Calcula los límites laterales en x=-5;x=-3;x=0;x=3 y x=4,
c) Determina $f(-5), f(-3), f(0), f(3)$ y $f(4)$
d) Determina el dominio, el recorrido, la monotonía, los extremos, las asíntotas.y la continuidad.

3. La siguiente gráfica pertenece a una cierta función $g(x)$. Responde a las cuestiones:



Calcula los siguientes límites:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ $\lim_{x \to 0^-} f(x) =$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) =$ $\lim_{x \to 3^-} f(x) =$ $\lim_{x \to 3^+} f(x) =$

$\lim_{x \to 6^+} f(x) =$ $\lim_{x \to -6^-} f(x) =$ $\lim_{x \to -6^+} f(x) =$

Determina el dominio, el recorrido, la monotonía, los extremos, las asíntotas y la continuidad.

CÁLCULO DE LÍMITES.

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, entonces:

1. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = L + M$

2. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x) = L - M$

3. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = L \cdot M$

4. Si $M \neq 0$, $\lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$

5. Si k es una constante, $\lim\limits_{x \to a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$

(donde "a" puede ser un número real, $+\infty$ o $-\infty$)

4. Calcula los siguientes límites cuando $x \to +\infty$:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 6x + 1}{5x^3 + 3x^2} =$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 6x + 1}{-5x^3 + 3x^2} =$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^2 - 3x}{x^3 + 1} =$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4 - 6x + 2}{3x^4 + x - 1} =$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x+1)^2(x-1)x}{x^3 - (x+3)^3}$ **f)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x+1)^2 x}{x^3 - 10x}$ **g)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^3 - 5x + 3}{x^2 - 2x}}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^3 - 5x}}{3x}$

5. Y ahora éstos:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} - 2x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2}$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{2x^2 + 1} - \dfrac{x}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 2})$ **e)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 4x + 5})$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x+5}{2} - \dfrac{x^2-2}{x}$

6. Resuelve éstos límites cuando $x \to -\infty$:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^4 - 6x + 2}{3x^4 + x - 1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^3 - 5x + 3}}{x^2 - 2x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^3+5}{x+2} - \dfrac{4x^3 - x}{x-2}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 3}}{3x - 2}$

7. Calcula los siguientes límites en un punto:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{5x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+2}{x^2-4}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7}$

e) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right)$

g) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x+2}{x^2-1} \right)$

h) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ **g)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, donde

$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

CONTINUIDAD (P.A.U.)

8. Representa gráficamente las siguientes funciónes y estudia su continuidad:

a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5x & \text{si } 0 \leq x < 5 \\ x - 5 & \text{si } 5 \leq x \leq 10 \end{cases}$ **b)** $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 8x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

9. Representa la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x - 1 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$. ¿Es continua? ¿En qué puntos?

10. Estudia razonadamente la continuidad de las funciónes:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 1 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 5 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$ **b)** $g(x) = \begin{cases} |x + 2| & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

11. Representa y estudia la continuidad de:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{2} & \text{si } x < -2 \\ -x & \text{si } -2 \le x < 1 \\ x^2 - 3 & \text{si } 1 \le x \end{cases}$ **b)** $h(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

12. Estudia la continuidad de cada una de las siguientes funciones para los distintos valores del parámetro a:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \le 2 \\ a - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \le 0 \\ x + 2a & \text{si } x > 0 \end{cases}$

13. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + b & \text{si } x \le -1 \\ 3x^2 + 4 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -x^3 + 8 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

Calcula el valor de b para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$. ¿Es continua en $x = 1$?

14. Representa, estudia la continuidad y halla los límites para $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 4x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

15. Representa gráficamente y estudia la continuidad de:

a) $f(x) = \dfrac{|x-2|}{|x-1|} - 1$ **b)** $g(x) = |x| + |x-1|$

16. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } 2 < x \le 4 \\ a & \text{si } 4 < x \end{cases}$$

a) Obtén la gráfica de la misma.
b) Estudia su continuidad y halla "a" para que sea continua en $x = 4$.
c) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

17. La calificación obtenida por un estudiante en un examen depende de las horas de preparación (x) a través de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{5} & \text{si } 0 \le x \le 15 \\ \dfrac{2x}{0,2x + 3} & \text{si } 15 < x \end{cases}$$

a. Estudia el conjunto de valores positivos de x para los que $f(x)$ es creciente. ¿Tiene sentido afirmar que a mayor tiempo de preparación corresponde mayor calificación?

b. Contesta razonadamente si hay algún punto en que estudiar un poco más puede ser muy rentable.

c. ¿Se puede obtener la calificación 10? Jusifica la respuesta.

18. Se ha investigado el tiempo (T, en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento de los deportistas (x, en días), obteniéndose que:

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{300}{x+30} & \text{si } 0 \le x \le 30 \\ \dfrac{1125}{(x-5)(x-15)} + 2 & \text{si } x > 30 \end{cases}$$

a. Justifica que la función $T(x)$ es continua en todo su dominio.

b. ¿Se puede afirmar que cuánto más se entrene un deportista, menor será el tiempo empleado en realizar la prueba? ¿Algún deportista tardará más de 10 minutos en finalizar la prueba?

c. Por mucho que se entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 1 minuto? ¿Y de 2 minutos?

19. Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ para las siguientes funciones: **a)** $f(x) = \dfrac{2x+3}{4x-5}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+5}$ **c)** $f(x) = \dfrac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}$

20. En cierto colectivo de familias españolas, el gasto mensual en ocio en el año 2000, G(x), estuvo relacionado con sus ingresos mensuales, x, ambos en miles de unidades monetarias (u.m.), a través de la siguiente expresión:

$$G(x) = \begin{cases} 0,02x - 1 & \text{si } 0 \le x \le 100 \\ \dfrac{30x}{2x+2300} & \text{si } 100 < x \end{cases}$$

a. Estudia la discontinuidad del gasto. ¿El gasto en ocio de una familia es sensiblemente distinto si sus ingresos son "ligeramente" inferiores o superiores a 100 000 u.m.?

b. Justifica que el gasto en ocio es siempre creciente con los ingresos.

c. Justifica que ninguna familia realiza un gasto en ocio superior a 15 000 u.m.

21. El número de individuos, en millones, de una población, viene dado por la función: $P(t) = \dfrac{15+t^2}{(t+1)^2}$, donde t se mide en años transcurridos desde $t = 0$. Calcula la población inicial y el tamaño de la población a largo plazo.

22. Una empresa ha establecido para sus empleados un incentivo (en cientos de euros) en relación con el valor x (en cientos de euros) de lo vendido por cada uno. Dicho incentivo sigue la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0,01x & \text{si } 0 \le x \le 100 \\ \dfrac{30x}{2x+2300} & \text{si } x > 100 \end{cases}$$

a. Estudiar la continuidad de $f(x)$. Indicar si el incentivo recibido por un empleado es sensiblemente distinto si el valor de las ventas es ligeramente superior o inferior a 10 000 €.

b. ¿Cuál es la cantidad máxima que un empleado podría recibir como incentivo si sus ventas fueran muy grandes? Justifica tu respuesta.

23. Las conclusiones de un estudio establecen que el número de individuos de una determinada población de una especie protegida vendrá dado, durante los próximos años, por la función $f(t) = \dfrac{15000t + 10000}{2t+2}$, siendo t el número de años transcurridos. Se pide:

a. Tamaño actual de la población.

b. ¿Cómo evolucionará el tamaño de la población entre los años 4 y 9?

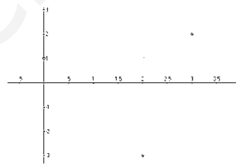
c. Si esta función fuese válida indefinidamente, ¿se estabilizaría el tamaño de la población? Justifica la respuesta.

SOLUCIONES:

4. $+\infty; +\infty; 0; \frac{5}{3}; +\infty; 3; +\infty; \frac{2}{3}$ **5.** $0; -\infty; 0; 0; 2; +\infty$ **6.** $\frac{5}{3}; 0; -\infty; \frac{-1}{3}$ **7.** $+\infty; (-\infty \ y \ +\infty); \frac{1}{4}; \frac{-9}{8}; \frac{45}{84}; -5; (+\infty \ y \ -\infty); 2; (-1 \ y \ +\infty)$

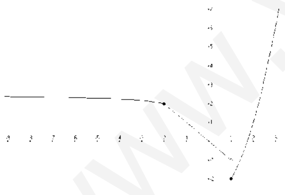
8.

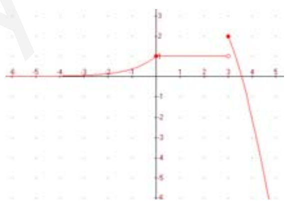
9.



10. a) En x=2 y en x=4 hay disc. inev. de salto fin. (-2 unid) b) Es cont. en x=-1 y en x=1 disc. inev salto fin. (2 unid).

11.

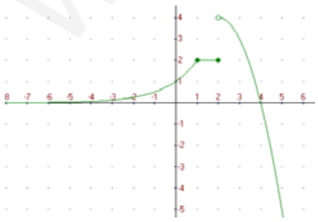




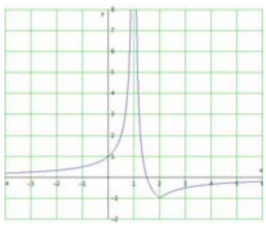
12. a) f cont. en x=2 cuando a=-8
b) f cont en x=0 cuando a=1/2

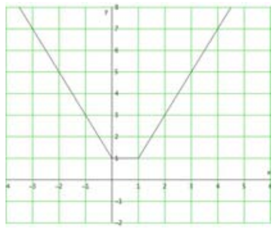
13. f cont. en x=-1 cuando b=6
f cont. en x=1

14.

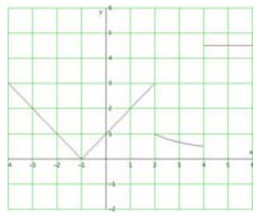


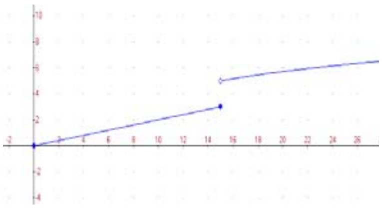
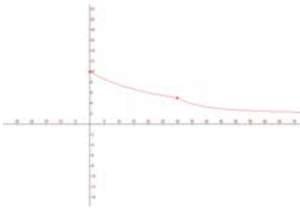
15.





16.



17.  **18.** 

TEMA 6. DERIVADAS.

1. TASA DE VARIACIÓN MEDIA.

1. Una piscina se vacía según la función $V = t^2 + 10t$ donde V es el volumen expresado en m^3 y t el tiempo en minutos. Halla la velocidad media de vaciado de la piscina en el intervalo de tiempo $[2, 10]$. (sol: 22 m^3/min)

2. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

1. Encuentra, utilizando la definición de derivada, la de la función $f(x) = \sqrt[4]{x}$ en x=2. (sol: $f'(2) = \frac{1}{4\sqrt[4]{2^3}}$)

2. Estudia la derivabilidad de $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ -x+1 & \text{si } x \in [0,2] \\ x^2 - 4x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

(Sol: No es derivable ni en x=0 ni en x=2
(ni siquiera es continua en esos puntos)
Sí es derivable en $\mathbb{R} - \{0, 2\}$)

3. Dada la función:

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{5}{2} & \text{si } x < -2 \\ -x & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ x^2 - 3 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$ estudia su derivabilidad.

(Sol: No es derivable en x=-2 y en x=1 tampoco pq
no es continua.)

4. Estudia la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 1 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

Sol: En x=0 es cont. y deriv., y en x=3 es cont. pero no deriv.

5. Aplicando la definición de derivada, calcula la derivada de la función $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ (sol: $y = 4x - 5$)

3. FUNCIÓN DERIVADA (Tablas y operaciones).

1. Calcula las siguientes derivadas potenciales (las raíces pásalas primero a forma de potencia):

a) $y = 5x^3$ **b)** $y = \frac{2}{x}$ **c)** $y = \frac{5}{x^3}$ **d)** $y = x^{\frac{2}{3}}$ **e)** $y = \sqrt{x}$ **f)** $y = 3\sqrt{x^5}$ **g)** $y = 7\sqrt[3]{x^7}$

 54026

h)$y = 4x^{\frac{-3}{4}}$ **i)**$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ **j)**$y = \frac{8}{\sqrt[5]{x^2}}$ **k)**$y = \frac{2}{\sqrt{x^3}}$ Soluciónes: $y' = 15x^2$;
$y' = -\frac{2}{x^2}$; $y' = -\frac{15}{x^4}$; $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $y' = \frac{15}{2}\sqrt{x^3}$; $y' = \frac{49}{3}\sqrt[3]{x^4}$;
$y' = -\frac{3}{x^{\frac{7}{4}}}$; $y' = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$; $y' = -\frac{16}{5\sqrt[5]{x^5}}$; $y' = \frac{-3}{\sqrt{x^5}}$

2. Calcula las derivadas de las siguientes funciones polinómicas, simplificando al máximo:

a)$y = 4x^3 - 11x^2 + 3x + 5$ **b)**$y = 5x^4 + 6x$ **c)**$y = -x^5 + 8x^2 - 2$
d)$y = (2x^2+1)(4x-6)$ **e)**$y = \frac{x^2+2x}{x^2-1}$ **f)**$y = \frac{4x^3}{x+2}$ Soluciones:
$y' = 12x^2 - 22x + 3$; $y' = 20x^3 + 6$; $y' = -5x^4 + 16x$; $y' = 24x^2 - 24x + 4$;
$y' = \frac{-2x^2-2x-2}{(x^2-1)^2}$; $y' = \frac{8x^3+24x^2}{(x+2)^2}$

3. Aplica la regla de la cadena para derivar las siguientes funciones:

a)$y = (x+3)^2$ **b)**$y = \frac{1}{(4x^2+1)^2}$ **c)**$y = \frac{3}{(2x^3+x)}$ **d)**$y = e^{x^2}$ **e)**$y = \sin(2x+1)$
f)$y = \cos^2 x$ **g)**$y = \sin(e^x)$ **h)**$y = \ln(2x^3+x)$ **i)**$y = \cos^2(4x^3+2x)$ **j)**$y = \frac{2}{\sin(x)}$
k) $y = 6e^{3x^2-x}$ Soluciones: $y' = 2x + 6$; $y' = \frac{-16x}{(4x^2+1)^3}$; $y' = \frac{-18x^2-3}{(2x^3+x)^2}$;
$y' = 2xe^{x^2}$; $y' = 2\cos(2x+1)$; $y' = -2\cos x \sin x$; $y' = e^x\cos(e^x)$; $y' = \frac{6x^2+1}{2x^3+x}$;
$y' = (-24x^2-4)\cos(2x+4x^3)\sin(2x+4x^3)$; $y' = -2\frac{\cos x}{\sin^2 x}$; $y' = (36x-6)e^{3x^2-x}$

4. Calcula las siguientes derivadas, simplificando al máximo:

a)$y = x^2e^x$ **b)**$y = (3x^4+6x)\ln x$ **c)**$y = \frac{\sin x}{\cos x}$ **d)**$y = \frac{\ln x}{x}$ **e)**$y = \sqrt{x^3+4x^2}$
f)$y = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ **g)**$y = e^{\sin x}$ **h)**$y = \sin\sqrt{x}$ **i)**$y = \frac{x^2}{\cos x}$ **j)**$y = \sin^2 x + \cos^2 x$
k)$y = \sqrt{\ln x}$ **l)**$y = (\sin x)\cdot(\cos x)$ Soluciones: $y' = 2xe^x + x^2e^x$;
$y' = (\ln x)(12x^3+6) + 6 + 3x^3$; $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $y' = \frac{1-\ln x}{x^2}$; $y' = \frac{3x^2+8x}{2\sqrt{4x^2+x^3}}$;
$y' = \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$; $y' = (\cos x)e^{\sin x}$; $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$; $y' = \frac{2x\cos x + x^2\sin x}{\cos^2 x}$;
$y' = 0$; $y' = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$; $y' = \cos^2 x - \sin^2 x$

5. Calcula y simplifica las siguientes derivadas:

a) $y = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ **b)** $y = \ln(arctg\, x^2)$ **c)** $y = \tan(x + \frac{1}{x})$ **d)** $y = \ln(\cos \frac{x^2}{2})$
e) $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2-a^2})$ Soluciones:

$y' = \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}\cdot(1-\sin x)^{\frac{3}{2}}}$; $y' = \frac{2x}{(1+x^4)\cdot\arctan x^2}$;

$y' = \frac{(1-\frac{1}{x^2})}{\cos^2(x+\frac{1}{x})} = [1+\tan^2(x+\frac{1}{x})]\cdot(1-\frac{1}{x^2})$; $y' = -x\tan\frac{x^2}{2}$; $y' = \sqrt{x^2-a^2}$

6. Ahora éstas:

a) $f(x) = \ln\left[\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right]$ **b)** $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x+1}}$ **c)** $f(x) = \dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$

d) $f(x) = \ln\sqrt{e^{\tan x}} =$ Soluciones: $y' = \dfrac{2}{\cos x}$; $y' = \dfrac{(3x+2)}{4\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x\sqrt{x+1}}}$;

$y' = \dfrac{-2(1+\tan^2 x)}{(1+\tan x)^2} = \dfrac{-2}{(\cos x+\sin x)^2}$; $y' = \dfrac{1+\tan^2 x}{2} = \dfrac{1}{2\cos^2 x}$

7. Calcula b para que la tasa de variación media de la función $f(x) = \ln(x+b)$ en el intervalo [0,2] valga $\ln 2$. Calcula a continuación la tasa de variación instantánea en los extremos de dicho intervalo. (Sol: b=$\frac{2}{e^4-1}$, $f'(0) = \frac{1}{b}$, $f'(2) = \frac{1}{2+b}$)

8. Calcula el valor de m para que la derivada de la función $y = \dfrac{mx^2+1}{2x+m}$ en $x = \dfrac{1}{2}$ valga 1.(Sol: m=-2)

9. Calcula a y b para que la siguiente función sea derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2-bx-4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$ (sol: a=2, b=-7)

10. Calcula las funciones derivadas de las siguientes funciones, simplificando su expresión cuando sea posible:

a) $f(x) = \dfrac{1-3x}{x^3}$ para $x \neq 0$ **b)** $g(x) = \dfrac{1}{3}\ln(4x)$ para x>0 **c)** $h(x) = \cos x \cdot sen\, x$ para $x \in \mathbb{R}$ (sol: $f'(x) = \frac{6x-3}{x^4}$; $g'(x) = \frac{1}{3x}$; $h'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$)

11. Calcula las funciones derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2x^3}{\cos x}$ **b)** $g(x) = \dfrac{2}{3}\ln(5x)$ **c)** $h(x) = \dfrac{1}{2}e^{5x-3}$ **d)** $i(x) = \ln[3tg^2(x)]$ (sol: $f'(x) = \frac{2x^2(3+x\cdot\tan x)}{\cos x}$; $g'(x) = \frac{2}{3x}$; $h'(x) = \frac{5}{2}e^{5x-3}$; $i'(x) = \frac{2(1+tg^2 x)}{tg\, x} = \frac{2}{\cos x\cdot\sin x}$)

$\boxed{4}$. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA. RECTA TANGENTE.

1. Halla un punto de la gráfica de $y = x^2+x+5$ en el cual la recta tangente sea paralela a la recta $y = 3x-8$ (sol: x=1)

2. Dada la parábola de ecuación $y = x^2-2x+5$ y la recta secante a ella por los puntos de abcisas $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$, halla la ecuación de la recta tangente a la parábola que sea paralela a la recta secante dada.(sol: $y = 2x+1$, (recta tg en el pto x=2))

3. Dada la función $f(x) = 1-x+x^2$

a. Mediante límites, calcula $f'(2)$. (sol: $f'(2) = 3$)

b. ¿Qué significado tiene $f'(2)$? Deduce el punto de corte de la recta tangente a la curva en x=2, con el eje OX.(sol: (1,0), (la recta es $y = 3x-3$))

4. Halla la ecuación de la recta tangente a $y = \frac{x+1}{x^2}$ en $x = 1$.(Sol: $y = -3x + 5$)

5. Considérese la curva de ecuación $y = kx^3 + 6x^2 - kx - 18$

a. ¿Cuánto debe valer k si las tangentes en los puntos $A = (1, y(1))$ y $B = (-2, y(-2))$ son paralelas? (sol: k=4)

b. Determina las ecuaciones de ambas tangentes.(sol: $y = 20x - 32$ (en x=1), $y = 20x + 22$ (x=-2))

6. Para la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 1 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 5 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$

halla la ecuación de la recta tangente cuando $x = -2$.
(sol: $y = -4x - 3$)

7. Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto $A(2, 1)$ y que pasa por el punto $B(5, -2)$. (sol: $y = -x^2 + 6x - 7$)

8. Escribe las ecuaciones de las tangentes a la función $y = 4x - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abcisas.(sol: $y = 4x$ (en x=0), $y = -4x + 16$ (en x=4))

9. Dada la curva de ecuación $y = -x^3 + 26x$, calcula las rectas tangentes a la misma que sean paralelas a la recta de ecuación $y = -x$. (sol: $y = -x + 54$ (en x=3), $y = -x - 54$ (en x=-3))

10. Calcula los puntos en los que la tangente a la curva $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$ es paralela a la recta $y = 5x + 3$.(sol: (-2, $\frac{1}{3}$) y (4, $\frac{-17}{3}$))

11. Dada la función $f(x) = a + ax - \frac{x}{b-x}$, determina las constantes a y b para que la recta de ecuación $y - x - 2 = 0$ sea tangente a la gráfica de la función en el punto $(0, f(0))$. (sol: a=b=2)

5. MÁS EJERCICIOS PAU

1. Se ha lanzado verticalmente hacia arriba una piedra. La altura en metros alcanzada al cabo de t segundos viene dado por la expresión: $f(t) = 20t - 2t^2$

a. Halla la velocidad media en el intervalo de tiempo comprendido entre $t = 0$ y $t = 5$. (Sol: 10m/s)

b. ¿En algún momento la velocidad de la piedra ha sido de 15 m/s? Si es así, ¿a qué altura sucedió? (Sol: sí, a los 1´25 s, siendo la altura de 21´875m)

2. De un polinomio de tercer grado $P_3(x)$ se sabe que $P_3(1) = 0, P_3'(1) = 2, P_3''(1) = 2, P'''(1) = 12$. Calcula $P_3(2)$. (Sol: $P_3(2) = 6$, donde $P_3(x) = 2x^3 - 4x^2 + 4x - 2$

3. En un laboratorio depositamos en un producto una colonia inicial de 4000 hongos. La función que nos da el número de hongos en la colonia en función del tiempo que transcurre, en días, es $f(t) = 4000 \cdot 3^t$. Calcula:

a. El número de hongos existentes en la colonia al cabo de 5 días. (Sol: 972 000 hongos)

b. La tasa de variación instantánea o velocidad instantánea de crecimiento de la colonia al cabo de 5 días. (Sol: 1 067 851´145 hongos/día)

c. ¿En qué momento la velocidad instantánea de crecimiento es de 9 610 660,3 hongos/día? (Sol: a los 7 días)

4. Se ha investigado el tiempo (T, en minutos) que se tarda en realizar una prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento (x, en días) es:

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{300}{x+30} & \text{si } 0 \leq x \leq 30 \\ \dfrac{1125}{(x-5)(x-15)} + 2 & \text{si } x > 30 \end{cases}$$

a. Estudia la continuidad y derivabilidad de T(x). (Sol: Es cont. pero no deriv.)

b. ¿Algún deportista tardará más de 10 minutos en finalizar la prueba? (Sol: No, pq T(0)=10 y T(x) es decreciente)

5. El número de enfermos por gripe en una ciudad a lo largo del mes de enero ha venido dado por la función: $y(t) = 100 + 200e^{0´2t}$, donde t representa el número de días transcurridos a partir del día 1 de enero.

a. ¿Cuántos enfermos había citados el día 1 de enero? (Sol: 300 enfermos)

b. Calcula la expresión algebraica de la función que representa la velocidad de evolución del número de enfermos al cabo de t días. (Sol: $y´ = 40e^{0´2t}$)

c. Determina la fecha en la cual la velocidad de evolución del número de enfermos ha sido igual a 803,43 enfermos/día. (Sol: el 16 de enero)

6. El número de personas afectadas cada día por una determinada enfermedad viene dado por la función: $f(x) = -x^2 + 40x + 84$ donde x representa el número de días trancurridos desde que se descubrió la enfermedad. Calcula:

a. El número de días que deben transcurrir para que desaparezca la enfermedad. (Sol: 42 días)

b. La tasa de propagación de la enfermedad al cabo de cinco días. (Sol: 30 enfermos/día)

c. El momento en que la enfermedad deja de crecer. (Sol: a los 20 días)

7. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ y estudia la continuidad y la derivabilidad de dicha función en el punto $x = 2$. (Sol: es cont. pero no deriv.)

8. La función que determina la curva de demanda de un producto es $f(x) = -2x + 16$, donde x es la cantidad de producto fabricado por unidad de tiempo y $f(x)$ es el precio en dólares por unidad. Se define el ingreso total obtenido como el producto $x \cdot f(x)$.

Dibuja, en el primer cuadrante, las funciones $f(x)$ y $g(x) = x \cdot f(x)$. Halla el punto de intersección y determina el ingreso total máximo. Si el ingreso total del producto aumenta de 14 a 24 dólares, antes de llegar al ingreso total máximo, ¿en qué cantidad aumenta el producto fabricado por unidad de tiempo y en qué cantidad disminuye el precio del producto? (Sol: x=1 y x=8 (ingreso total=precio por unidad); ingreso total máx=32$ (cuando x=4) ; la fabricación aumenta en 1 producto por unidad de tiempo y su precio disminuye en 2 $)

9. Considera la función $f(x) = x(x-1)(x-2)$ definida en $\mathbb{R}$.

a. Determina el valor de la pendiente de la recta tangente en los ceros de $f(x)$. Esboza la gráfica de la función. (Sol: $f'(0) = 2, f'(1) = -1, f'(2) = 2$)

b. Comprueba que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene dos raíces reales sin determinar explicitamente dichas raíces.(Sol: el discriminante de la ec (de 2º grado) vale b^2-4ac=12>0. Por eso tiene 2 sol.)

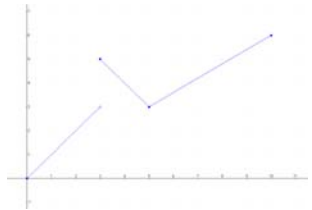
10. Una función polinómica de tercer grado, ¿Cuántos puntos de derivada nula puede tener? ¿Puede tener uno o ninguno? (Sol: hasta 2, sí pq una ec de 2º grado puede tener 2, 1 o ninguna sol.)

11. Justifica que una función polinómica de segundo grado tiene siempre un punto de tangente horizontal.

54026

TEMA 7. APLICACIONES DE LAS DERIVADAS AL ESTUDIO DE FUNCIONES.

1. La gráfica de una función en el intervalo [0,10] es la indicada en la figura. Encuentra:



a) Su máximo y su mínimo absolutos.
b) Puntos en los que la función no es continua.
c) Puntos en los que la función no es derivable.

2. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Representa gráficamente $f(x)$
b) A partir de su gráfica, estudia el crecimiento de $f(x)$
Halla los puntos de corte con los ejes.

(Graf. al final. Decrec. en]-∞, -1[⋃]0,1[. Crec. en]-1,0[⋃]1,+∞[.Ptos corte: (-2,0) , (0,0) , (1,0))

3. Se considera la función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ y se pide:

a. Dominio de la función, puntos de corte con los ejes y simetrías.
b. Asíntotas y regiones de existencia de la gráfica.
c. Intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos, si los hay.
d. Representación gráfica aproximada

(Sol: D(f)=$\mathbb{R}$-{-2,2}. Ptos de corte: (0,0). Simetría Impar. Asínt. hor. en y=0; Asínt. vert. en x=-2 y en x=2. Decreciente en todo su dominio. No tiene extremos.)

4. Representa gráficamente la curva: $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

(Sol: D=$\mathbb{R}-\{-2,2\}$. Simetría Par. A. vert. en x=-2 y x=2. A. hor. en y=1. Crec. en]-∞,-2[⋃]-2,0[y decrec en]0,2[⋃]2,+∞[Máx rel en x=0)

5. Estudia la concavidad, convexidad y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x \cdot e^x$. Dibuja la gráfica de la función.

(Sol: Decrec. en]-∞, -1[y Crec. en]-1,+∞[. Convexa (ptas hacia abajo) en]-∞,-2[y Cóncava (ptas hacia arriba en]-2,+∞[ )

6. Dada la función: $f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x + 1}$: a) Calcula sus asíntotas. b) Calcula sus máximos y sus mínimos. c) Represéntala gráficamente.

(Sol: A. vert. en x=$-\frac{1}{2}$.Máx. rel en x=-2. Mín. rel. en x=1. Graf al final)

7. Representa la función $f(x) = 3x^2 - x^3$ estudiando: puntos de corte con los ejes, crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad y asíntotas.

(Sol: Ptos corte (0,0) y (3,0). Decrec en]-∞,0[⋃]2,+∞[. Crec. en]0,2[. Mín. en x=0 y máx. en x=2. Cóncava hacia arriba en]-∞,1[. Convexa (o cóncava hacia abajo) en]1,+∞[. Pto inflexión en x=1.No tiene asíntotas.)

8. Representa gráficamente la curva $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ encontrando:

a. a) Dominio, cortes con los ejes y simetrías. b) Asíntotas y regiones.

(Sol: D=ℝ. Ptos corte: (0,0). Sim. impar. A. hor. en y=0. Graf. al final)

9. Sea la función: $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+1}$. a) Calcula sus asíntotas. b) Calcula sus extremos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. c) Represéntala gráficamente.

(Sol: A. hor. en y=3. Mín. rel. en x=0. Decrec. en]-∞,0[y crec. en]0,+∞[Graf al final)

10. Considera la función $f(x) = \dfrac{2x+3}{3x-3}$. Se pide:

a. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b. Razona si existen máximos, mínimos y puntos de inflexión. En caso de existir, calcúlalos.

c. Estudia la existencia de asíntotas. En caso de que existan, calcúlalas.

d. Con la información obtenida representa la gráfica de la función.

(Sol: Es decrec. en todo su dominio. No tiene extremos ni ptos de inflexión. A. hor. en y=2/3. A. vert. en x=1. Graf al final)

11. Busca los máximos y los mínimos de la función $f(x) = \dfrac{100x}{x^2+400}$. Indica también si dicha función tiene alguna asíntota horizontal o vertical.

(Sol: Mínimo rel.: x=-20. Máx. rel: x=20. Asínt. hor. en y=0)

12. Dada la función: $y = |x^2 - 7|$. **a)** Represéntala gráficamente.

b) Determina la ecuación de la recta tangente en el punto de abcisa x=1. **c)** Halla sus máximos y mínimos relativos.

(Sol: $y = -2x + 8$. Máx. rel. en x=0. Mín. rel en x=$-\sqrt{7}$ y en x=$\sqrt{7}$)

13. Estudia y representa: $y = \dfrac{\ln x}{x}$

(Sol: D=]0,+∞[. Corte con ejes: (1,0). A. horiz.:y=0. A.vert.:x=0. Crec en]0,e[, decrec. en]e,+∞[.Máx. rel. en x=e.)

14. Dibuja la gráfica de una función con las siguientes propiedades:

a. El recorrido de la función es [-2,+∞[

b. La función es decreciente en]-∞, −2[

- **c.** La función presenta un máximo relativo en el punto x=2, y el valor de la función en dicho punto es 4.
- **d.** La función es discontinua en x=0.
- **e.** En el punto x=5 la función es continua, pero no derivable.

15. Un individuo ha invertido en acciones de cierta compañía durante los próximos 10 años. El valor de su cartera a lo largo del tiempo (dinero invertido más beneficios obtenidos, en euros) viene dado por la siguiente expresión (x en años):
$F(x) = (x-2)^2(1-2x)+252x+116$ con $0 \le x \le 10$

- **a.** Determina los intervalos de tiempo en los que el valor de la cartera creció y aquellos en los que decreció.
- **b.** El individuo retira sus ingresos transcurridos los 10 años. ¿Cuál hubiera sido realmente el mejor momento para haberlo hecho? ¿Cuánto pierde por no haberlo retirado en el momento óptimo?

(Sol: Creció hasta el 8º año y decreció del 8º al 10º año. A los 8 años. Pierde 172 €)

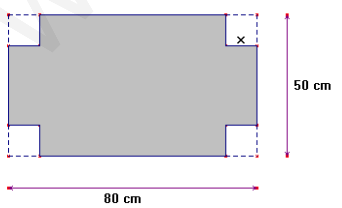
16. Un jardinero quiere construir un parterre en forma de sector circular y que tenga de perímetro 20 m. Determina el radio que debe tomar para lograr que el área del parterre sea máxima:

- **a.** Expresa el área del parterre, S, como función del radio, r.
- **b.** Determina el valor del radio que maximiza S.
- **c.** ¿Cuál es la amplitud de este sector de máxima superficie?
- **d.** ¿Qué criterio se utilizará para garantizar que la solución encontrada corresponde ciertamente a un máximo?

(Sol: $S(r)=10r-r^2$. 5 m. 2 radianes. el de la 2ª derivada (explicado))

17. Recortando convenientemente en cada esquina de una lámina de cartón de dimensiones 80×50 cm un cuadrado de lado x, y doblando convenientemente (véase la figura), se construye una caja. Calcula x para que el volumen de dicha caja sea máximo.

(Sol: x=10 cm)



18. Cierta entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad, R(x), en miles de euros, viene dada en función de la cantidad que se invierta, x, en miles de euros, por medio de la siguiente expresión: $R(x) = -0,001x^2+0,5x+2,5$

- **a.** Deduce razonadamente qué cantidad de dinero le conviene invertir a un cliente en dicho plan.

b. ¿Qué rentabilidad obtendría?

(Sol: 250€, 65€)

19. Se desea construir un marco para una ventana rectangular de 6 m^2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 20 € y el tramo vertical 30 €. Calcula:

a. Las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.

b. El coste del marco.

(Sol: 3m de base y 2m de altura. 240 €)

20. Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 céntimos la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada céntimo que aumenta el precio, vende 2 helados menos al día. Si el coste de la unidad es de 40 céntimos, ¿a qué precio de venta es máximo el beneficio diario que obtiene el heladero?

(Sol: 75 c)

21. Un cultivador de cítricos estima que si se plantan 60 naranjos en un huerto, la producción media por árbol será de 400 naranjas y ésta disminuirá en un promedio de 5 naranjas por árbol en cada árbol adicional plantado en el huerto. Se pide:

a. Determina la función de producción total de naranjas.

b. ¿Cuántos árboles se deben plantar en el huerto para maximizar la producción total de naranjas? ¿Cuál es la máxima producción? Razona la respuesta.

(Sol: $P(x)=(60+x)(400-5x)$. 10 árboles adicionales. 24 500 naranjas)

22. Un granjero dispone de 3000 euros para cercar una porción de terreno rectangular adyacente a un río, usando a éste como un lado del área cercada; es decir, construirá tres cercas. El coste de la cerca paralela al río es de 5 euros por metro y para cada uno de los lados restantes es de 3 € por metro. Calcula las dimensiones del área máxima que puede ser cercada.

(Sol: 300 m (lado paralelo al río) por 250 m)

23. Una hoja de papel debe tener 18 cm^2 de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura. Obtén razonadamente las dimensiones que minimizan la superficie del papel.

(Sol: 5 cm de alto por 10 cm de alto)

24. El precio de cada bloque de una cierta materia es proporcional al cuadrado de su peso. Tenemos un bloque de 20 kg que cuesta 5 €.

a. Si el bloque se rompe en dos trozos de 5 y 15 kg, ¿cuál es ahora el precio de los 2 trozos?

b. Demuestra que si el bloque se rompe en dos trozos cualesquiera, siempre se depreciará su valor.

c. Calcula para qué partición se produce la máxima pérdida de valor.

(Sol: 0´3125€ + 2´8125€=3´125€. $x^2-20x<0\ \forall x\in]0,20[$. Si se parte en dos trozos iguales (10 kg))

25. El índice de inflación de un país fue variando con el paso de los meses de un cierto año según la función: $I(t) = 3 + \dfrac{t^2 - 8t}{40}$, donde $t = 1$ corresponde a enero, $t = 2$ a febrero, ..., $t = 12$ a diciembre.

a. ¿Durante qué meses el índice de inflación fue subiendo y durante cuáles bajó?

b. ¿Cuáles fueron los valores máximo y mínimo del índice de inflación de ese año y en qué meses se alcanzaron?

(Sol: Fue bajando hasta abril y de abril a diciembre subió. El mínimo se alcanzó en abril (2´6 puntos) y el máximo en diciembre (4´2 puntos))

26. Determina a y b para que la función $f(x) = a\ln x + bx^2 + x$ tenga extremos en los puntos $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$. Para estos valores de a y b, ¿qué tipo de extremos tiene la función en 1 y en 2?

(Sol: a=$\frac{-2}{3}$; b=$\frac{-1}{6}$. En x=1 hay un mínimo y en x=2 hay un máximo)

27. Sea la función: $f(x) = 2x^3 + bx^2 + ax - 5$. Halla los valores de a y b de forma que $f(x)$ tenga un máximo en x=1 y un minimo en x=2.

(Sol: a=12 y b=-9)

28. Halla los valores de a,b y c de forma que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por el origen y tenga extremos en $x = -4$ y $x = 2$. ¿De qué tipo de extremos se trata?

(Sol: c=0; a=3; b=-24. En x=-4 hay un máx. relativo y en x=2 un mín. rel.)

29. Para la función $f(x) = ax^2 + b\ln x$ calcula los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un punto de inflexion en el punto $(1, 2)$.

(Sol: a=2 , b=4)

30. Cierta clase de bengala permanece encendida un tiempo de 4 minutos. Se ha comprobado que el porcentaje de luminosidad que produce viene dado, considerando el tiempo en minutos, a través de la función: $f(t) = 25t(4 - t)\ \ ;\ 0 \le t \le 4$

a. ¿Para qué valor de t se obtiene el porcentaje de luminosidad máximo?

b. ¿En qué intervalo de tiempo decrece el porcentaje de luminosidad?

c. ¿Para qué valores de *t* el porcentaje de luminosidad es del 75%?

(Sol: t=2. en]2,4[. Para t=1 y t=3)

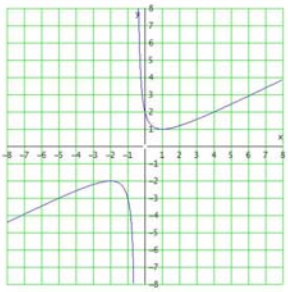
31. Dada la función: $f(x) = \dfrac{bx}{x^2 + 1}$ con b un parámetro real distinto de 0. Se pide:

a. Determina las asíntotas de la función $f(x)$ para cualquier valor del parámetro b.

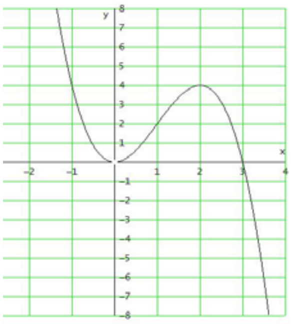
b. Determina el valor del parámetro b para que la función $f(x)$ tenga un máximo en el punto (1,3)

(Sol: A. hor.: y=0. b=6, (hay que comprobar que x=1 es máximo)

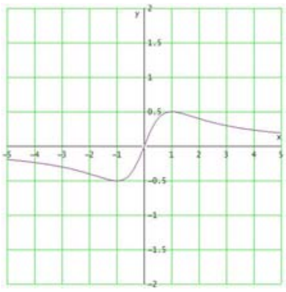
GRÁFICAS DE ALGUNOS EJERCICIOS:



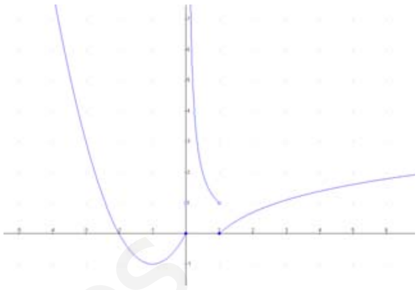
6



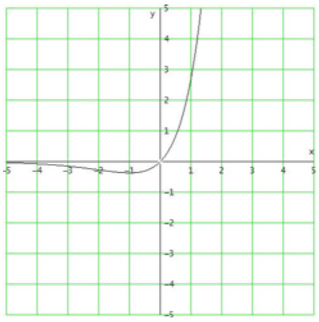
7



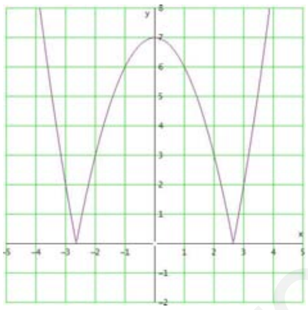
8



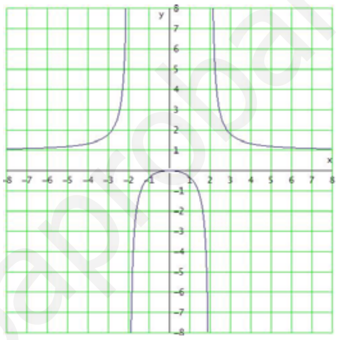
2



5



12



4

TEMA 8: CÁLCULO DE PRIMITIVAS. INTEGRACIÓN DEFINIDA.

1. Halla una primitiva de la función $y = (2x+1)^3$ que tome el valor 500 para $x = \frac{7}{2}$.

(Sol: $F(x) = \frac{1}{8}(2x+1)^4 - 12$)

2. Encuentra el área limitada por $f(x) = x^2 + 5$ y la recta $y = 9$. (Sol: 32/3)

3. Dada la función $f(x) = x^2 - x$.

a. Dibuja su gráfica.

b. Calcula $\int_0^1 f(x)dx$. ¿Qué representa geométricamente su valor absoluto?

c. Comprueba que $\int_1^2 f(x)dx = \frac{5}{6}$. ¿Qué representa geométricamente su valor absoluto?

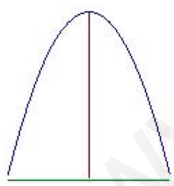
d. Comprueba si $\int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx$.

e. Comprueba si $\left|\int_0^1 f(x)dx\right| + \left|\int_1^2 f(x)dx\right| = \int_0^2 f(x)dx$.

(Graf. al final ; -1/6. El área encerrada entre la curva, el eje OX y las rectas verticales x=0 y x=1 ; Igual pero con x=1 y x=2. ; Sí ; No, resulta $\left|\frac{-1}{6}\right| + \left|\frac{5}{6}\right| = \frac{6}{6} = 1 \neq \frac{2}{3}$).

4. Una chapa de plata tiene la forma y dimensiones que se indican en el dibujo y la curva que la delimita superiormente es la parábola de ecuación: $y = 4 - x^2$. Determina el área de la chapa.

Sol: (32/3)



5. Calcula el área encerrada por la función $f(x) = x^3 - 3x$ con el eje OX. (Sol: 9/2)

6. Dada la función $f(x) = ae^{\frac{x}{3}} + \frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$, donde a es una constante:

a. Calcula $\int_1^2 f(x)dx$ en función de a.

b. Se sabe que F es una primitiva de f. Calcula a si $F(1) = 0$ y $F(2) = \frac{1}{2}$.

(Sol: 3a($e^{2/3}$-$e^{1/2}$)+1/2 ; a=0)

7. Las pérdidas o ganancias de una empresa siguen una ley $f(x) = \frac{2x-4}{x+2}$, siendo x los años de vida de la empresa y $f(x)$ las pérdidas o ganancias en millones de euros.

a. Determina el año en que la empresa deja de tener pérdidas.

b. ¿Pueden ser de 3 millones de euros sus beneficios en algún momento? Justifica la respuesta.

c. ¿A cuánto ascienden las pérdidas o beneficios acumulados en los 2 primeros años? (Basta plantear la integral)

(2º año ; No, pq es creciente y su lim en el infin. es 2 (en millones de €) ; $\int_0^2 \left|\frac{2x-4}{x+2}\right| dx$)

8. Una administración pública sabe que el coste (en millones de euros) de un determinado servicio en función del tiempo (en años) viene dado por la siguiente función: $f(t) = 6 - 2t + t^2$ en la que $t = 0$ representa el año 1995. En 1999 se aplica una campaña de contención del gasto en ese servicio y, como consecuencia, se tiene una nueva función: $g(t) = 2 + 5t - \frac{t^2}{2}$. ¿Puede decirse que la campaña ha sido eficaz? Justifícalo. Cuantifica, en su caso, el ahorro producido desde 1999 a 2001.

(Si estudiamos conjuntamente las dos funciones se observa que a partir de t=4, g(t) toma valores más pequeños que f(t) (su gráfica queda por debajo) por lo que con la campaña se consigue redicir el gasto. Ahorro=14 millones de euros)

9. La parábola $f(x) = a(x^2 - 2x)$, con $a > 0$, delimita con el eje OX un recinto de 12 unidades de superficie. Halla el valor de a. (Sol: a=9 o a=-9)

10. A las nueve de la mañana surge un rumor en la ciudad que se difunde a un ritmo de $f(t) = e^{2t} + 1000$ personas/hora. Sabiendo que t representa el número de horas transcurridas desde la aparición del rumor, calcula el número de personas que lo habrán oído entre las diez y las doce de la mañana.

(Sol: 2198 personas)

11. Una fábrica arroja diariamente material contaminante a una balsa según un ritmo dado por la siguiente función: $m = 0'01t^3 - 0'2t^2 + t + 1$ siendo m la cantidad de material en kg y t la hora del día. ¿Cuánto material arroja cada día?

(Sol: 219´84 kg)

12. Sea $F(x) = x^4 + ax^3 + bx$. Calcula el valor de a y b sabiendo que:

a. El punto (1,2) pertenece a la gráfica de F(x).

b. F(x) es función primitiva de cierta función f(x) cuya integral en el intervalo [1,2] es igual a 10.

(Sol: a=-1 y b=2)

13. Halla el área de la figura comprendida entre la hipérbola $xy = 1$ y las rectas $x = a$ $(a > 0)$, $x = 3a$ y el eje OX. (Sol: ln 3)

14. Dada la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, calcula los valores de a,b y c sabiendo que:

a. $F(x) = x^4 - 2x^2 + cx$ es una primitiva de $f(x)$.

b. La integral de $f(x)$ en el intervalo [0,1] es igual a 1.

(Sol: a=4, b=-4, c=2)

15. Sea la función (donde b es un parámetro real):

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + b & \text{si } x \leq -1 \\ 3x^2 + 4 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -x^3 + 8 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

a) Calcula el valor del parámetro b para que f(x) sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$. (Sol: b=6)

b) Calcula el área del recinto limitado por $y = f(x), y = 0, x = 0$ y $x = 2$. Explica los pasos seguidos para obtener la respuesta.

(Sol: 1º se calcula $\int_0^1 f(x)dx$ y después $\int_1^2 f(x)dx$. Como ambos son positivos y no hay puntos de corte con el eje OX, el resultado es la suma de las dos integrales anteriores=37/4.)

16. Expresa mediante una integral el área del triángulo de vértices (0,3),(7,3) y (7,10). Calcula la integral y explica su significado.

(Sol: $\int_0^7 [(x+3)-3]dx = 49/2$. Una vez dibujado el triángulo, observamos que el área a calcular es la encerrada entre las funciones y=x+3 e y=3, y entre las rectas verticales x=0 e x=7)

17. Determina el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{8}$ y la recta $y = 2x$.

18. Sea la función $y = 2x^3 - 3x^2 + x$. Calcula el área del recinto limitado por dicha función y la función $y = 0$.

19. Calcula el área del recinto formado por las curvas $y = x$, $y = x^2$ e $y = \left(\dfrac{x}{4}\right)^2$.

20. Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las dos funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 8x - x^2$.

21. Representa gráficamente la región del plano limitada por el eje de abcisas, la curva $y = x^3$ y la recta $x + y = 2$ y hallar su área.

22. Calcula el área limitada por la gráfica de $y = x + x^2$, la tangente a esa curva en $x = 2$ y el eje de abcisas.

23. Halla k para que el área limitada por la curva de ecuación: $y = (x-1)^2 + k$, el eje OX y las rectas x=0 y x=2 sea igual a $\dfrac{10}{3}$.

24. Calcula el área determinada por la curva $y = x^2 + ax + b$ y las rectas $x = -\dfrac{1}{2}$ e $y = 1$, sabiendo que la función tiene un mínimo en $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$.

25. Halla el área del triángulo mixtilíneo de vértices A(2,4), B(-2,4) y C(-1,1), en el que las líneas AB y AC son rectas, mientras que la que une los puntos B y C es la de ecuación $y = x^2$.

TEMA 9: PROBABILIDAD.

1. Dos jugadores A y B inician un cierto juego con 3 € cada uno. Al finalizar cada partida, el ganador recibe 1 € del perdedor. Sabiendo que A tiene una probabilidad de 0,6 de ganar cada partida y que el juego finaliza cuando alguno de los dos se queda sin dinero, contesta razonadamente.

- **a.** ¿Cuál es la probabilidad de que A tenga 2 € tras jugar 2 partidas?
- **b.** ¿Cuál es la probabilidad de que A tenga 4 € tras jugar 3 partidas?
- **c.** ¿Cuál es la probabilidad de finalizar el juego tras jugar 3 partidas?

2. Se consideran dos sucesos A y B asociados a un experimento aleatorio con $P(A) = 0´7$, $P(B) = 0´6$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0´58$. ¿Son independientes A y B? Razona tu respuesta. Si $M \subset A$, ¿cuál es el valor de $P(\overline{M} \mid \overline{A})$?

3. Sean A y B sucesos asociados a un experimento aleatorio. Sabiendo que $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ y $P(A \cup B) = \frac{7}{15}$, halla:

- **a.** La probabilidad de que se verifiquen A y B.
- **b.** La probabilidad de que se verifique A y no B.
- **c.** La probabilidad de que no se verifiquen A ni B.
- **d.** La probabilidad de que no se verifique A si no se ha verificado B.

4. Dos niños escriben en un papel una vocal cada uno, ¿cuál es la probabilidad de que sea la misma?

5. Se escuchan 3 discos y se vuelven a guardar al azar. ¿Cuál es al probabilidad de que al meno uno de los discos haya sido guardado en el envoltorio que le correspondía?

6. Se ha comprobado que el 48 % de los alumnos de Bachillerato de cierta región son aficionados a la música clásica y a la pintura, y que el 60 % de los aficionados a la pintura también son aficionados a la música clásica. Si se elige al azar un alumno de Bachillerato de esa región, ¿qué probabilidad hay de que no sea aficionado a la pintura? Justifica la respuesta.

7. Dos sucesos tienen probabilidades 0´4 y 0´5. Sabiendo que son independientes, calcula la probabilidad de que no suceda ninguno de los dos.

8. De una muestra de 9 personas,2 son de nivel socioeconómico bajo, 3 de nivel socioeconómico medio y 4 de nivel socioeconómico alto.

- **a.** Si se eligen 2 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean de nivel bajo?
- **b.** Si se eligen 3 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna sea de nivel alto?

9. Un estudiante se presenta a un examen tipo test compuesto por cien preguntas, cada una de las cuales va acompañada de cuatro respuestas y sólo una es correcta.

Sesenta de las preguntas corresponden a la parte del programa que el alumno ha preparado y en las que tiene una probabilidad del 80 % de contestar adecuadamente. En las restantes, señalará al azar una de las cuatro respuestas.

Si se elige al azar una de las respuestas, ¿cuál es la probabilidad de que sea correcta?

10. Se dispone de un mazo de 450 fichas de estudiantes de una escuela de idiomas.

Cada estudiante cursa un solo idioma de los tres que se imparten. El número de mujeres es 3/2 del de hombres y los estudiantes de inglés representan el 80 % del alumnado. El número de estudiantes de francés duplica al de alemán. Sea M el suceso "sacar una ficha de mujer" al extraer una ficha, al azar, del citado mazo. Y sean H, I, F y A sacar hombre, inglés, francés y alemán, respectivamente. Sabiendo que $M \mid A$ es el suceso seguro y que $M \mid F$ y $H \mid F$ son equiprobables, determina:

a. Probabilidad de F; probabilidad de $M \cap I$.

b. Probabilidad de $F \mid M$.

11. Un dado ha sido trucado de manera que la probabilidad de sacar un número par es el doble de la de sacar un númer impar. Se lanza el dado y se pide:

a. La probabilidad de obtener un número par.

b. Si a la vez se lanza un dado no trucado, la probabilidad de obtener un numero par y un número impar.

c. Si a la vez se lanza un dado no trucado, la probabilidad de obtener al menos un número impar.

12. Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas. Si la carta extraída es un rey nos dirigimos a la urna I, y en caso contrario, nos dirigimos a la urna II. A continuación, extraemos una bola. El contenido de la urna I es de 7 bolas blancas y 5 negras, y el de la urna II es de 6 bolas blancas y 4 negras. Halla:

a. La probabilidad de que la bola extraída sea blanca y de la urna II.

b. La probabilidad de que la bola extraída de la urna sea negra.

13. El gerente de unos grandes almacenes ha comprobado que un 38 % de las familias que residen en determinada ciudad no son clientes habituales y que un 85 % de sus clientes pagan al contado el importe de las compras. Determina la probabilidad de que, seleccionada al azar una familia en esa ciudad, sea cliente y page al contado el importe de sus compras.

14. Tenemos dos urnas: A: 4 bolas rojas y 6 blancas. B: 7 bolas rojas y 3 blancas.

Se selecciona una urna al azar, se extrae una bola y se coloca en la otra urna. A continuación, se extrae una bola de la segunda urna. Calcula la probabilidad de que las 2 bolas extraídas sean del mismo color.

15. El despertador de Javier no funciona muy bien y el 20 % de las veces no suena. Cuando suena, Javier llega tarde a clase con probabilidad 0´2, pero si no suena, la probabilidad de que llegue tarde a clase es 0´9.

a. Determina la probabilidad de que llegue tarde a clase y haya sonado el despertador.

b. Halla la probabilidad de que llegue temprano.

c. Javier ha llegado tarde a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya sonado el despertador?

16. En un supermercado, el 70 % de las compras las realizan mujeres; de las compras realizadas por éstas, el 80 % supera los 20 €, mientras que de las compras realizadas por hombres sólo el 30 % supera esa cantidad.

a. Elegido un ticket de compra al azar, ¿cuál es la probabilidad de que supere los 20 €?

b. Si se sabe que un ticket de compra no supera los 20 €, ¿cuál es la probabilidad de que la compra haya sido hecha por una mujer?

17. Una imprenta tiene en almacén 1000 libros de una edición de una edición E_1, 1200 de la edición E_2 y 800 de E_3. Se sabe que el 3% de los libros E_1, el 1´5% de E_2 y el 2% de E_3 tienen defectos. Se elige un libro al azar:

a. Halla la probabilidad de que tenga defectos.

b. Sabiendo que el libro presenta defectos, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la edición E_2?

18. El 35% de los créditos de un banco son para vivienda, el 50% para industria y el 15% para consumo diverso. Resultan fallidos el 20% de los créditos para vivenda, el 15% de los créditos para industrias y el 70% de los créditos para consumo. Calcula la probabilidad de que se pague un crédito elegido al azar.

19. En una oficina el 70% de los empleados son asturianos. Entre los asturianos hay un 50% de hombres, mientras que de los no asturianos son hombres el 20%.

a. ¿Qué porcentaje de empleados no asturianos son mujeres?

b. Calcula la probabilidad de que un empleado de la oficina sea mujer.

c. Fernando trabaja en dicha oficina, ¿cuál es la probabilidad de que sea asturiano?

20. Considera el espacio muestral E={a,b,c,d} en el que los 4 sucesos tienen la misma probabilidad. Sean $S_1 = \{a, b\}$ y $S_2 = \{a, c\}$.

a. ¿Son S_1 y S_2 sucesos incompatibles?

b. Calcula la probabilidad del suceso $S_1 \cup S_2$ y la probabilidad del suceso contrario de S_2.

21. Si la probabilidad de la intersección de dos sucesos independientes es 0´2 y la de su unión es 0´7, ¿cuál es la probabilidad de cada uno de los sucesos?

 54026

EJERCICIOS PROPUESTOS EN LAS P.A.U. DE LA COMUNIDAD VALENCIANA.

TEMAS 1 y 2 : MATRICES y DETERMINANTES

(C.Valenciana junio 2001)

Problema 1. Calcula los determinantes $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ y aplica los resultados obtenidos para resolver por la regla de Cramer el sistema $\begin{cases} x-3y=0 \\ x+2y=4 \end{cases}$

Resolución:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2+3=5 \ ; \ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \ ; \ \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 12$$

Por Crammer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{12}{5} \ ; \ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4}{5}$$

(C.Valenciana septiembre 2002)

Problema 2. Obtener de forma razonada la matriz X que verifica $AX = 2B - C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolución:

(Nota: Este ejercicio está resuelto como sistema de ecuaciones en el tema 3)

Para despejar X en la ecuación matricial, premultiplicamos en ambos lados por A^{-1} :

$$AX = 2B - C \ \Rightarrow \ A^{-1}AX = A^{-1}(2B-C) \ \Rightarrow \ X = A^{-1}(2B-C)$$

Entonces habremos de realizar el cálculo $A^{-1}(2B-C)$. Para ello calculemos primero A^{-1} :

$$|A| = 5 \ \Rightarrow \ A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0'2 \\ 1 & 0'4 \end{pmatrix}$$

$$2B - C = 2\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 13 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -13 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -15 & 0 \end{pmatrix}$$

Y ahora multiplicamos:

$$A^{-1}(2B-C) = \begin{pmatrix} 0 & -0.2 \\ 1 & 0.4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -15 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = X$$

(C.Valenciana junio 2004)

Problema 1. Dadas las matrices:

$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.Calcula la matriz X que verifica la ecuación $AXB = 2C$.

Resolución:

Para despejar X en la anterior ecuación matricial, premultiplicamos por A^{-1} y postmultiplicamos por B^{-1} :

$$AXB = 2C \;\Rightarrow\; A^{-1}AXB = A^{-1}2C \;\Rightarrow\; XB = A^{-1}2C \;\Rightarrow\; XBB^{-1} = A^{-1}2CB^{-1} \;\Rightarrow\; X =$$

Así pues, el cálculo que hay que realizar es $A^{-1}2CB^{-1}$. Calcularemos primero $A^{-1}, 2C$ y B^{-1} :

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.25 & 0 \\ 0.25 & 1 \end{pmatrix} \quad 2C = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}2CB^{-1} = \begin{pmatrix} -0.25 & 0 \\ 0.25 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 2.0 & 0.5 \end{pmatrix} = X$$

(C.Valenciana septiembre 2004)

Problema 1. Obtener la matriz X que verifica $AX - B = 3X$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolución:

Despejamos la matriz X en la ecuación:

$$AX - B = 3X \;\Rightarrow\; AX - 3X = B \;\Rightarrow\; (A-3I)X = B \;\Rightarrow\; (A-3I)^{-1}(A-3I)X = (A-3I)$$

$$\Rightarrow\; X = (A-3I)^{-1}B$$

Observa cómo se saca factor común de X en el segundo paso ($\mathbf{AX - 3X = (A - 3I)X}$). El

2º término querará $3I$ y no sólamente 3, en cuyo caso no se podría hacer el cálculo $(A - 3)$, pues no se puede restar una matriz y un número.

Calcularemos $A - 3I$, después obtendremos su inversa y lo que nos de lo premultiplicaremos por B :

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A - 3I| = -19 \quad \Rightarrow \quad (A - 3I)^{-1} = -\frac{1}{19}\begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ -4 & 6 & -5 \\ 5 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$(A - 3I)^{-1}B = -\frac{1}{19}\begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ -4 & 6 & -5 \\ 5 & 2 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{19}\begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ -20 \end{pmatrix}$$

(resuelto como un sistema de ecuaciones en el tema siguiente)

(Septiembre 2005)

Problema 1B: Calcular la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ que verifica la ecuación matricial $AXB = C$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$.

Resolución:

Despejemos X en la ecuación matricial:

$$AXB = C \to A^{-1}AXB = A^{-1}C \to XB = A^{-1}C \to XBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \to X = A^{-1}CB^{-1}$$

Por lo que tendremos que calcular A^{-1} y B^{-1} :

A^{-1} por el método de Gauss: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

(Donde hemos hecho el cambio $F_2 \to F_2 - F_1$.) $\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

B^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora $X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \mathbf{= X}$$

NOTA: También se podría haber resuelto el ejercicio planteando:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a & b+c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-b & 2a-3b \\ a-b-c & 2a-3b-3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b = -1 \\ 2a-3b = -2 \\ a-b-c = -3 \\ 2a-3b-3c = -8 \end{cases}$$. Si resolvemos las 2 primeras ecuaciones: $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$

Sustituimos en las otras 2: $\begin{cases} -1-c = -3 & \to c = 2 \\ -2-3c = -8 & \to c = 2 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

TEMA 3: RESOLUCION DE SISTEMAS LINEALES

(C.Valenciana junio 2000)

Problema 4.-Por un helado, dos horchatas y cuatro batidos, nos cobraron en una heladería 1.700 pta un día. Otro día, por cuatro helados y cuatro horchatas nos cobraron 2.200 pta. Un tercer día tuvimos que pagar 1.300 pta por una horchata y cuatro batidos. Razona si hay o no motivos para pensar que alguno de los días nos presentaron una factura incorrecta.

Resolución:

Si asignamos los valores: $x =$ precio del helado, $y =$ precio de la horchata, $z =$ precio del batido, se tiene el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+4z = 1700 \\ 4x+4y \qquad = 2200 \\ \qquad y+4z = 1300 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y+4z = 1700 \\ x+y \qquad = 550 \\ \qquad y+4z = 1300 \end{array}\right.$$

Si resolvemos el sistema por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1700 \\ 1 & 1 & 0 & 550 \\ 0 & 1 & 4 & 1300 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 400 \\ 1 & 1 & 0 & 550 \\ 0 & 1 & 4 & 1300 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -150 \\ 1 & 1 & 0 & 550 \\ 0 & 1 & 4 & 1300 \end{array}\right)$$

Donde los cambios realizados en cada paso son: $\left\{\begin{array}{l} (F_1 \to F_1 + (-1)F_3) \\ (F_1 \to F_1 + (-1)F_2) \end{array}\right.$

Con lo que la 1ª ecuación queda $0 = -150$, que es imposible. Luego el sistema es incompatible y no tiene solución. Así pues debe haber algún error en las facturas.

Resolución alternativa:

Si realizamos la discusión del sistema planteado (Teorema de Rouché-Frobënius), obtenemos:

rg(A): $\quad |A| = 0$ pero $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

rg(A^*): $\quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1700 \\ 1 & 0 & 550 \\ 1 & 4 & 1300 \end{vmatrix} = -600 \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 3$

Luego como $rg(A) \neq rg(A^*)$, el sistema es incompatible y por ello ha de haber algún error en las facturas

(C.Valenciana junio 2002)

Problema 2. Un tren transporta 500 viajeros y la recaudación del importe de sus billetes asciende a 2115 €. Calcular de forma razonada cuántos viajeros han pagado el importe total del billete, que vale 9 €, cuántos han pagado el 20 % del billete y cuántos han pagado el 50 %, sabiendo que el número de viajeros que han pagado el 20 % es el doble del número de viajeros que ha pagado el billete entero.

Resolución:

Sea:

x : nº pasajeros que pagan billete completo
y : nº pasajeros que pagan el 20 %
z : nº pasajeros que pagan el 50 %

. Se tiene:

54026

$$\begin{cases} x+y+z = 500 \\ 9x+9\cdot 0,20y+9\cdot 0,50z = 2115 \\ y = 2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 500 \\ 9x+1,8y+4,50z = 2115 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$$

Sistema que, (resuelto por Gauss o por Cramer) tiene por solución:
$x = 150; y = 300; z = 50.$ Por tanto, 300 pasajeros han pagado el 20 % del billete y 50 han pagado el 50 %.

(C.Valenciana septiembre 2002)

Problema 2. Obtener de forma razonada la matriz X que verifica AX = 2B – C, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolución:

Tomando $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, debe cumplirse:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$$

Operando:

$$\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 5a & 5b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Igualando: } \begin{cases} 2a+c = 8 \\ 2b+d = -1 \\ 5a = 15 \\ 5b = 0 \end{cases}$$

Con lo que obtenemos $a = 3; b = 0; c = 2; d = -1$:

La matriz pedida es: $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(C.Valenciana junio 2003)

Problema 3. Cinco amigos suelen tomar café juntos. El primer día tomaron 2 cafés, 2 cortados y un café con leche y debieron pagar 3 €. Al día siguiente tomaron un café, un cortado y tres cafés con leche, por lo que pagaron 3,25 €. El tercer día sólo acudieron cuatro de ellos y tomaron un café, dos cortados y un café con leche, ascendiendo la cuenta a 2,45 €. Calcular de forma razonada el precio del café, del cortado y del café con leche.

Resolución:

Llamaremos:

x : precio del café.
y : precio del cortado.
z : precio del café.con leche.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+2y+z = 3 \\ x+y+3z = 3.25 \\ x+2y+z = 2.45 \end{cases}$$

Sistema que se puede resolver por Gauss o por Cramer y tiene por solución $x = 0.55; y = 0.6; z = 0.7$. Así pues, el café solo vale 55 céntimos, el cortado 60 c y el café con leche 70 c.

Problema 1. Dada la siguiente ecuación matricial:
$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$; obtener de forma razonada los valores de x, y, z.

Resolución:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3x-2y \\ -2x+y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x-2y+x \\ -2x+y+y \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x-2y = -10 \\ -2x+2y = 6 \\ y+z = 3 \end{cases}$$

Sistema que podemos resolver por Gauss, Cramer, o aplicando reducción en las dos primeras ecuaciones para obtener (x,y) y después con el valor de y en la tercera ecuación se obtiene z. $\Rightarrow x = -2;\ y = 1;\ z = 2$

(C.Valenciana junio 2004)
Problema 1. Dadas las matrices:
$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.Calcula la matriz X que verifica la ecuación $AXB = 2C$.

Resolución:

Si $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, operando se obtiene:

54026

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -4x & -4y \\ x+z & y+t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4x-8y & -8x \\ -x-z+2y+2t & 2x+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Igualando los elementos correspondientes:

$$\begin{cases} 4x-8y = 4 \\ -8x = 0 \\ -x-z+2y+2t = -2 \\ 2x+2z = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 0;\ y = \frac{-1}{2};\ z = 2;\ t = \frac{1}{2} \ \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 1. Juan decide invertir una cantidad de 12000 € en bolsa, comprando acciones de tres empresas distintas A, B y C. Invierte en A el doble que en B y C juntas. Transcurrido un año, las acciones de la empresa A se han revalorizado un 4 %, las de B un 5 % y las de C han perdido un 2 % de su valor original. Como resultado de todo ello, Juan ha obtenido un beneficio de 432,5 €. Determinar cuánto invirtió Juan en cada una de las empresas.

Resolución:

Sea: $\begin{cases} x \text{ : dinero invertido en acciones de A} \\ y \text{ : dinero invertido en acciones de B} \\ z \text{ : dinero invertido en acciones de C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z = 12000 \\ x = 2(y+z) \\ 0.04x+0.05y-0.02z = 432.5 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z = 12000 \\ x-2y-2z = 0 \\ 0.04x+0.05y-0.02z = 432.5 \end{cases} \Rightarrow x = 8000;\ y = 2750;\ z = 1250$$

Invirtió 8000 € en la empresa A, 2750 € en la empresa B y 1250 € en la empresa C

(C.Valenciana septiembre 2004)

Problema 1:. Dos hijos deciden hacer un regalo de 100 € a su madre. Como no tienen suficiente dinero, cuentan con la ayuda de su padre, decidiendo pagar el regalo de la siguiente forma: el padre paga el triple de lo que pagan los dos hijos juntos y, por cada 2 € que paga el hermano menor, el mayor paga 3 €. ¿Cuánto dinero ha de poner cada uno?

Resolución:

Sean x, y, z las cantidades que aportan el padre, el hermano mayor y el hermano menor, respectivamente. Se debe cumplir:

54026

$x + y + z = 100$ Dado que el regalo vale 100 euros.

$x = 3(y + z)$ Ya que el padre paga el triple que los dos hijos juntos.

$\frac{z}{2} = \frac{y}{3}$ Porque por cada 2 € del menor, el mayor pone 3 €. Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ x - 3y - 3z = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 75;\ y = 15;\ z = 10$$

El padre pone 75 euros, el hijo mayor 15 y el menor 10.

(Junio 2005)

Problema 1A. Elena, Pedro y Juan colocan diariamente hojas de propaganda sobre los parabrisas de los coches aparcados en la calle. Pedro reparte siempre el 20% del total de la propaganda, Juan reparte 100 hojas más que Elena y entre Pedro y Elena colocan 850 hojas en los parabrisas. Plantear un sistema de ecuaciones que permita averiguar cuántas hojas reparten, respectivamente, Elena, Pedro y Juan y calcular estos valores.

Resolución:

Tenemos que averiguar: $\begin{cases} x \text{ : nº de hojas que reparte Elena.} \\ y \text{ : nº de hojas que reparte Pedro.} \\ z \text{ : nº de hojas que reparte Juan.} \end{cases}$

Pedro reparte el 20 % $\Rightarrow$ $y = 0.20(x + y + z)$

Juan reparte 100 más que Elena $\Rightarrow$ $z = x + 100$

Entre Pedro y Elena colocan 850 $\Rightarrow$ $x + y = 850$

Arreglamos el sistema y lo resolvemos por Cramer:

$$\begin{cases} x - 4y + z = 0 \\ -x \quad + z = 100 \\ x + y \quad = 850 \end{cases}$$

Para comprobar si tiene solución única calculamos $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$

$\Rightarrow$ Sí tiene solución única. Calculémosla: $\left(x = \frac{|A_x|}{|A|}\ ;\ y = \frac{|A_y|}{|A|}\ ;\ z = \frac{|A_z|}{|A|} \right)$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 100 & 0 & 1 \\ 850 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-3300}{-6} = 550\ ;\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 100 & 1 \\ 1 & 850 & 0 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-1800}{-6} = 300$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 100 \\ 1 & 1 & 850 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-3900}{-6} = 650.$$

Con lo que Elena reparte 550 hojas, Pedro reparte 300 y Juan 650.

Problema 1B: Sea $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ la matriz de sus términos independientes. Se pide:

a) Escribir las tres ecuaciones que forman el sistema.
b) Obtener todas las soluciones del sistema.

Resolución:

a) La forma matricial del sistema es $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Realizando la multiplicación: $\begin{pmatrix} 2x+2y+z \\ 2x+3y+z \\ 2x+5y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y+z = 1 \\ 2x+3y+z = 1 \\ 2x+5y+z = 1 \end{cases}$

b) Si calculamos $|A| = 0$. (se podía saber de antemano porque tiene 2 columnas proporcionales). Por eso no se puede aplicar la regla de Cramer (no es un SCD). Podríamos discutir el sistema por el Teorema de Rouché-Frobenius (estudiando rg(A) y rg(A^*)), pero como nos piden las soluciones lo mejor será tratar de resolverlo directamente por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Operaciones:

1^{er} paso: $\begin{cases} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{cases}$

2º paso: $F_3 \to F_3 - 3 \cdot F_1$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x+2y+z = 1 \\ \mathbf{y} \quad \mathbf{= 0} \end{cases} \Rightarrow 2x + z = 1.$ Que tendrá infinitas soluciones. Para obtenerlas utilizamos el parámetro λ :

$\mathbf{z = \lambda} \to 2x + \lambda = 1 \to \mathbf{x = \frac{1-\lambda}{2}}$. Así, el conjunto de soluciones será:

$$\left(\frac{1-\lambda}{2}, 0, \lambda\right), \text{ donde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(Septiembre 2005)

Problema 1A: Dos hermanos deciden invertir 10000 € cada uno en distintos productos financieros. El mayor invirtió una cantidad A en un producto que ha proporcionado un beneficio del 6%, una cantidad B en otro que ha dado una rentabilidad del 5% y el resto en un plazo fijo al 2% de interés. El hermano menor invirtió esas mismas cantidades en otros productos que le han proporcionado, respectivamente, unos beneficios del 4, 3 y 7 %. Determinar las cantidades A, B y C invertidas si las ganancias del hermano mayor han sido 415 € y las del pequeño 460 €.

Resolución:

Llamemos:

$$\begin{cases} x : \text{cantidad A (en €)} \\ y : \text{cantidad B (en €)} \\ z : \text{cantidad C (en €)} \end{cases}$$

Se invierten 10000 € : $x + y + z = 10000$

Ganancias del h.. mayor: $0.06x + 0.05y + 0.02z = 415$

Ganancias del h.. menor: $0.04x + 0.03y + 0.07z = 460$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 10000 \\ 6x + 5y + 2z = 41500 \\ 4x + 3y + 7z = 46000 \end{cases}$$. Intentemos aplicar Cramer:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -7 \neq 0. \Rightarrow \text{El sistema tiene solución única (SCD)}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10000 & 1 & 1 \\ 41500 & 5 & 2 \\ 46000 & 3 & 7 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-14\,000}{-7} = 2000 \;;\; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 10000 & 1 \\ 6 & 41500 & 2 \\ 4 & 46000 & 7 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-31\,500}{-7} = 4500$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 10000 \\ 6 & 5 & 41500 \\ 4 & 3 & 46000 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-24\,500}{-7} = 3500.$$

Por lo tanto las cantidades A,B y C son 2000, 4500 y 3500 respectivamente.

TEMA 4: PROGRAMACION LINEAL

(C.Valenciana junio 2000)

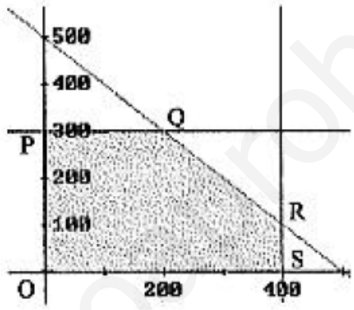
Problema 2.: Una factoría produce coches de los modelos A y B. El beneficio por la venta de un coche del modelo A es de 450 euros y la venta del modelo B reporta un beneficio de 600 euros. La capacidad de la factoría impide producir más de 400 coches por día del modelo A y más de 300 coches por día del modelo B. Además, no es posible producir más de 500 coches entre ambos modelos. Se vende toda la producción que se hace y se desea saber, razonadamente, cuántos coches interesa fabricar de cada modelo para obtener el máximo beneficio.

Resolución:

Sea: $\begin{cases} x : \text{nº de coches fabricados del modelo A} \\ y : \text{nº de coches fabricados del modelo B} \end{cases}$ Función objetivo: Maximizar

$B(x,y) = 450x + 600y$

Restricciones: $\begin{cases} 0 \le x \le 400 \\ 0 \le y \le 300 \\ x + y \le 500 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow.$



Método de los vértices:

Como sabemos, la solución óptima está en alguno de los vértices:

O = (0, 0), P = (0, 300), Q = (200, 300), R = (400, 100) y S = (400, 0)

Los beneficios para esos niveles de producción son:

En O, B(0, 0) = 0.
En P, B(0, 300) = 180.000
En Q, B(200, 300) = 270.000 ← Máximo
En R, B(400, 100) = 240.000
En S, B(400, 0) = 180.000.

Método de las rectas de nivel:

Escogemos un punto del interior de la región factible: el (200,200).

Su imagen por la función objetivo es $B(200, 200) = 210\,000$ €

Ahora representamos la recta de nivel correspondiente: $450x + 600y = 210\,000$

(la recta de nivel representa todos los puntos para los cuales el valor mediante la función objetivo es de 210 000 €.)

Y dibujamos el vector gradiente: $\nabla f = (450, 600) \sim (90, 120)$

(el vector gradiente indica la dirección de crecimiento de la función objetivo, o hacia dónde cabría trasladar la recta de nivel para obtener valores más altos mediante la función objetivo)

Trasladando de forma paralela la recta de nivel en la dirección y sentido del vector gradiente, se observa que el último punto de contacto con la región factible es $Q = (200, 300)$. Así este punto es la solución buscada:

Interesa fabricar 200 unidades del modelo A y 300 del modelo B

(C.Valenciana junio 2001)

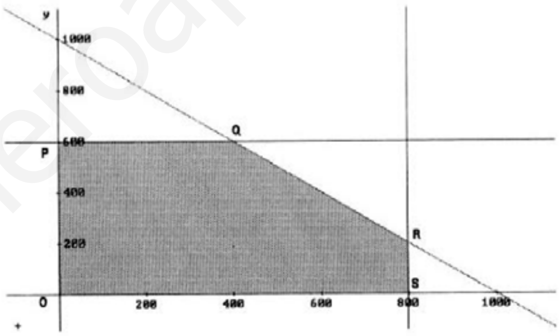
Problema 2. Una fábrica produce bombillas normales a 900 pta cada una y focos halógenos a 1200 pta cada uno. La capacidad máxima diaria de fabricación es de 1000, entre bombillas normales y focos halógenos, si bien no se pueden fabricar más de 800 bombillas normales ni más de 600 focos halógenos. Se sabe que la fábrica vende todo lo que produce. Averiguar razonadamente cuántas bombillas y cuántos focos debe producir para obtener la máxima facturación posible y cuál sería ésta.

Resolución:

Sea: x : nº de bombillas
y : nº de focos halógenos

Función objetivo es maximizar $F(x,y) = 900x + 1200y$

Región factible: $\begin{cases} x + y \leq 1000 \\ x \leq 800 \\ y \leq 600 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$



Método de los vértices:

Obtenemos los vértices:
$O = (0,0); P = (0,600); Q = (400,600); R = (800,200); S = (800,0)$

La facturación en cada caso es:

En O, F(0, 0) = 0 pta
En P, F(0, 600) = 720 000 pta
En Q, F(400, 600) = 1 080 000 pta ← ¡ Máximo !
En R, F(800, 200) = 960 000 pta
En S, F(800, 0) = 720 000 pta.

Para obtener una facturación máxima hay que producir 400 bombillas y 600 focos.

(C.Valenciana junio 2002)

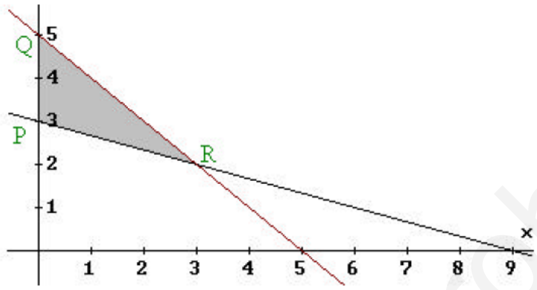
Problema 1. Se considera la región factible dada por el siguiente conjunto de restricciones:

$$x + y \leq 5$$
$$x + 3y \geq 9$$
$$x = 0, y = 0$$

Representar la región factible que determina el sistema de inecuaciones anterior y hallar de forma razonada el punto o puntos de la región donde las siguientes funciones alcanzan su máximo y su mínimo: a) $f(x,y) = 2x + 3y$ b) $f(x,y) = y - x$

Resolución:

La región factible es la sombreada en la siguiente figura:



Como sabemos, para regiones cerradas, las soluciones máximas y mínimas se dan siempre en alguno de los vértices del polígono de soluciones. Para determinarlas basta con evaluar el valor de la función objetivo en cada uno de esos vértices, que son:.

$$P = (0,3);\ Q = (0,5);\ R: \begin{cases} x + y = 5 \\ x + 3y = 9 \end{cases} \Rightarrow R = (3,2)$$

• Para la función a) $f(x,y) = 2x + 3y$ se tiene:
$f(0, 3) = 9$; $f(0, 5) = 15$; $f(3, 2) = 12$. $\Rightarrow$ El máximo se alcanza en el punto (0, 5); el mínimo, en (0, 3).

• Para la función b) $f(x,y) = y - x$ se tiene:
$f(0, 3) = 3$; $f(0, 5) = 5$; $f(3, 2) = -1$ $\Rightarrow$ El máximo se alcanza en el punto (0, 5); el mínimo, en (3, 2).

Problema 1. Se dispone de 120 refrescos de cola con cafeína y de 180 refrescos sin cafeína. Los refrescos se venden en paquetes de dos tipos. Los paquetes de tipo A contienen tres refrescos con cafeína y tres sin cafeína, y los de tipo B contienen dos con cafeína y cuatro sin cafeína. El vendedor gana 6 € por cada paquete que venda de tipo A y 5 € por cada uno que venda de tipo B. Calcular de forma razonada cuántos paquetes de cada tipo debe vender para maximizar los beneficios y calcular este.

Resolución:

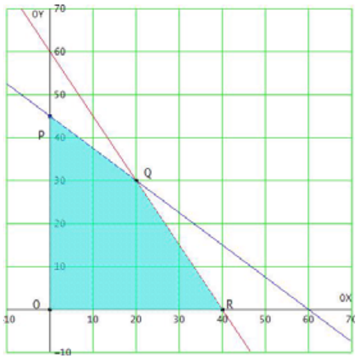
Sea :

$$\begin{array}{l} x : \text{nº paquetes tipo A} \\ y : \text{nº paquetes tipo B} \end{array} \Rightarrow \text{Función objetivo: } f(x,y) = 6x + 5y \text{ (Maximizar)}$$

Región Factible:

54026

$$\begin{cases} 3x + 2y \le 120 & (\text{nº refrescos con cafeína}) \\ 3x + 4y \le 180 & (\text{nº refrescos sin cafeína}) \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$$



Método de los vértices:
Los vértices son:

$$O = (0,0);\ P = (0,45);\ Q : \begin{cases} 3x + 2y = 120 \\ 3x + 4y = 180 \end{cases} \Rightarrow Q = (20,30);\ R = (40,0)$$

$f(0,0) = 0;\quad f(0,45) = 5 \cdot 45 = 225;\quad f(20,30) = 6 \cdot 20 + 5 \cdot 30 = \mathbf{270};\quad f(40,0) = 6 \cdot 40 =$

Por lo que el valor máximo se alcanza en el punto $Q = (20,30)$.

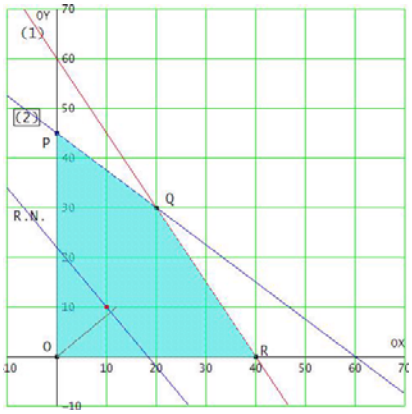
Así, para maximizar los beneficios, debemos vender 20 paquetes del tipo A y 30 del tipo B, en cuyo caso obtendremos un beneficio de 270 €

Método de las rectas de nivel:

Escogemos un punto del interior de la región factible: $(10,10)$. Su imagen por la función objetivo es: $f(10,10) = 6 \cdot 10 + 5 \cdot 10 = 60 + 50 = 110$.

Obtenemos la recta de nivel correspondiente:
$6x + 5y = 110$ y la dibujamos: $\longrightarrow$

Dibujamos también el vector gradiente:
$\nabla f = (6,5) \sim (12,10)$ $\longrightarrow$



Para maximizar la función objetivo hay que trasladar de forma paralela la recta de nivel en la dirección y sentido del vector gradiente. El último punto de contacto con la región factible ($Q = (20,30)$) es la solución buscada. $\Rightarrow$ 20 paquetes tipo A y 30 tipo B

(C.Valenciana septiembre 2002)

Problema 1. Se pretende cultivar en un terreno dos tipos de olivos: A y B. No se puede cultivar más de 8 ha con olivos de tipo A, ni más de 10 ha con olivos del tipo B. Cada hectárea de olivos de tipo A necesita 4 m^3 de agua anuales y cada una de tipo B, 3 m^3. Se dispone anualmente de 44 m^3 de agua. Cada hectárea de tipo A requiere una inversión de 500 € y cada una de tipo B, 225 €. Se dispone de 4500 € para realizar dicha inversión. Si cada hectárea de olivar de tipo A y B producen, respectivamente, 500 y 300 litros anuales de aceite:

a) Obtener razonadamente las hectáreas de cada tipo de olivo que se deben plantar para maximizar la producción de aceite.
b) Obtener la producción máxima.

Resolución:

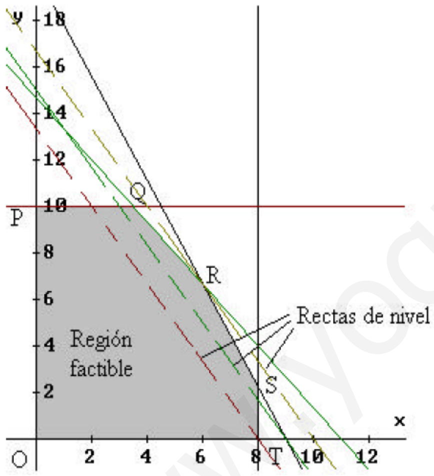
Sea:

x : nº hectáreas de olivo A
y : nº hectáreas de olivo B

Función objetivo es maximizar: $f(x,y) = 500x + 300y$

$$\text{Restricciones: } \begin{cases} x \leq 8 \\ y \leq 10 \\ 4x + 3y \leq 44 \text{ (restricción por agua)} \\ 500x + 225y \leq 4500 \text{ (restricción por inversión)} \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

Estas restricciones generan la región factible (sombreada) dada en la siguiente figura.



Escogemos $(4,6)$ en la región factible. Sustituyendo en la función objetivo tenemos:

$f(4,6) = 500 \cdot 4 + 300 \cdot 6 = 3800$

Trazamos la recta de nivel y el vector gradiente:

R.N : $500x + 300y = 3800$.

$\nabla f = (500, 300) \sim (5,3)$

Trasladando la recta de nivel en la dirección y sentido del vector gradiente observamos que el último punto de contacto con la región factible es R.

Para calcular las coordenadas de R, resolvemos el sistema formado por las rectas que se

54026

cortan en R:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 44 \\ 500x + 225y = 4500 \end{cases} \Rightarrow R = (6, 6\acute{}\widehat{6})$$

Por lo que hay que cultivar 6 hectáreas de olivo A y 6,6666 del tipo B.

b) La producción máxima es $P(6, 6, \widehat{6}) = 500 \cdot 6 + 300 \cdot 6, \widehat{6} = 5000$ litros

Problema 1. Una empresa fabrica dos tipos de aparatos A y B que necesitan pasar por los talleres X e Y. En cada uno de los talleres se trabaja 100 horas a la semana. Cada aparato A requiere 3 horas de taller X y 1 hora de taller Y y cada aparato B, 1 y 2 horas respectivamente. Cada aparato A se vende a 100 € y cada aparato B, a 150 €

a) Obtener razonadamente cuántos aparatos de cada tipo han de producirse para que el ingreso por venta sea máximo.
b) ¿Cuál es el ingreso máximo?

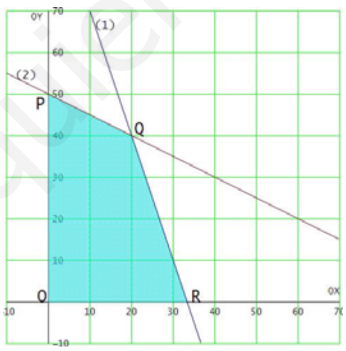
Resolución:

Sea:

$$\begin{cases} x : \text{nº aparatos tipo A} \\ y : \text{nº aparatos tipo B} \end{cases} \quad \text{Función objetivo: } f(x, y) = 100x + 150y$$

Región factible:

$$\begin{cases} 3x + y \leq 100 \text{ (taller X)} \\ x + 2y \leq 100 \text{ (taller Y)} \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$



Método de los vértices:

Los vértices son:

$$O = (0, 0);\ P = (0, 50);\ Q : \begin{cases} 3x + y = 100 \\ x + 2y = 100 \end{cases} \Rightarrow Q = (20, 40);\ R = (33\acute{}\widehat{3}, 0)$$

$f(0, 0) = 0$; $f(0, 50) = 150 \cdot 50 = 7500$; $f(20, 40) = 100 \cdot 20 + 150 \cdot 40 = \mathbf{8000}$; $f(33\acute{}\widehat{3}, 0) =$

Por tanto, el máximo se alcanza en el punto $Q = (20, 40)$. Así, se habrán de producir 20 aparatos de tipo A y 40 de tipo B.

b) El ingreso máximo será $f(20, 40) = 8000$ €

(C.Valenciana junio 2003)

Problema 2. Una compañía fabrica y vende dos modelos de lámparas A y B. Para su fabricación se necesita un trabajo manual de 20 minutos para el modelo A y 30 minutos para el modelo B; y un trabajo de máquina de 20 minutos para el modelo A y de 10 minutos para el modelo B. Se dispone para el trabajo manual de 6.000 minutos al mes y para el de máquina de 4.800 minutos al mes. Sabiendo que el beneficio por unidad es de 15 € para el modelo A y de 10 € para el modelo B, planificar la producción mensual para obtener el máximo beneficio y calcular éste.

Resolución:

Sea:

x : nº de lámparas del modelo A
y : nº de lámparas del modelo B

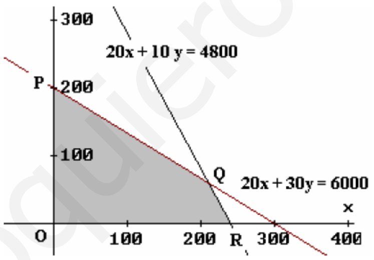
Función objetivo: $f(x,y) = 15x + 10y$ (Maximizar)

Ordenando la información se tiene:

	Cantidad	T. manual	T. de máquina	Beneficio
Modelo A	x	20	20	$15x$
Modelo B	y	30	10	$10y$
Disponible		6000	4800	

Conjunto de restricciones:

$$\begin{cases} 20x + 30y \le 6000 \\ 20x + 10y \le 4800 \\ x \ge 0; y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$$



Como sabemos, para regiones cerradas, las soluciones máximas y mínimas se dan siempre en alguno de los vértices de la región factible. Para determinarlas basta con evaluar el valor de la función objetivo en cada uno de esos vértices, que son:

$$O = (0,0);\ P = (0,200);\ Q : \begin{cases} 20x + 30y = 6000 \\ 20x + 10y = 4800 \end{cases} \Rightarrow Q = (210,60);\ R = (240,0)$$

El valor de $B(x,y) = 15x + 10y$ en esos vértices es:

En O, $B(0,0) = 0$
En P, $B(0,200) = 2000$
En Q, $B(210,60) = 3750$
En R, $B(240,0) = 36600$

El beneficio máximo, que es de 3750 €, se obtiene fabricando 210 lámparas del modelo A y 60 del modelo B.

Problema 2. Debo tomar al menos 60 mg de vitamina A y al menos 90 mg de vitamina B diariamente. En la farmacia puedo adquirir dos pastillas de marcas diferentes X e Y. Cada pastilla de la marca X contiene 10 mg de vitamina A y 15 mg de vitamina B, y cada pastilla de la marca Y contiene 10 mg de cada vitamina. Además, no es conveniente tomar más de 6 pastillas diarias. Sabiendo que el precio de cada pastilla de la marca X es 50 céntimos de euro y cada pastilla de la marca Y cuesta 30 céntimos de euro, calcular de forma razonada:

a) Cuántas pastillas diarias de cada marca debo tomar para que el coste sea mínimo.
b) Cuál es el coste mínimo.

Resolución:

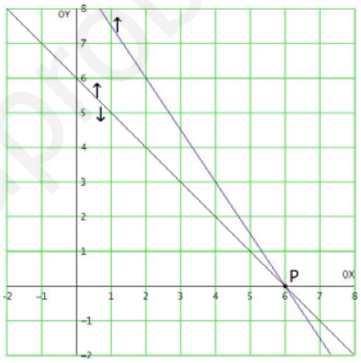
Sea:

x : nº de pastillas diarias de la marca X
y : nº de pastillas diarias de la marca Y

Función objetivo: $f(x,y) = 50x + 30y$ (Minimizar)

Conjunto de restricciones y región factible:

$$\begin{cases} 10x + 10y \geq 60 \text{ (necesidades de vitamina A)} \\ 15x + 10y \geq 90 \text{ (necesidades de vitamina B)} \\ x + y \leq 6 \text{ (no más de 6 pastillas diarias)} \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$



Observa que la región factible está formada por un único punto: $P = (6,0)$

Lo cual significa que es la única posibilidad de cumplir las restricciones. Así pues, la única solución posible es 6 pastillas de la marca X y ninguna de la marca Y. En cualquier otro caso, o no se cubren las necesidades de vitaminas o se toman más de 6 pastillas diarias.

b) $f(6,0) = 50 \cdot 6 = 300.$ Luego el coste mínimo es de 300 céntimos = 3 €.

(C.Valenciana septiembre 2003)

Problema 2: Una empresa dispone de un máximo de 16 000 unidades de un producto que puede vender en unidades sueltas o en lotes de cuatro unidades. Para empaquetar un lote de cuatro unidades se necesita el triple de material que para empaquetar una unidad suelta. Si se dispone de material para empaquetar 15 000 unidades sueltas, y si el beneficio que se obtiene por la venta de cada unidad suelta es de 2 € y de cada lote de cuatro unidades es de 7 €, calcular de forma razonada el número de unidades sueltas y de lotes de cuatro unidades que hay que preparar para maximizar el beneficio y calcular éste.

Resolución:

Ordenando la información se tiene:

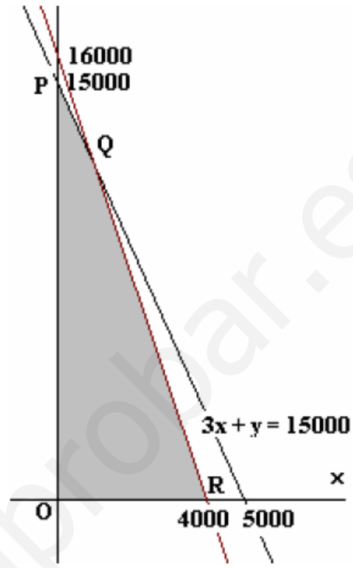
	Cantidad	Unidades	Material	Beneficio
Lotes de 4	x	4x	3x	7x
U. sueltas	y	y	y	2y
Disponible		16000	15000	

Función Objetivo: $B(x,y) = 7x + 2y$

Restricciones:

$$\begin{cases} 4x + y \leq 16000 \\ 3x + y \leq 15000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

Región Factible:



Como sabemos, para regiones cerradas, las soluciones máximas y mínimas se dan siempre en alguno de los vértices de la región factible. Para determinarlas basta con evaluar el valor de la función objetivo en cada uno de esos vértices, que son:

$$O = (0,0); P = (0,15000); Q : \begin{cases} 4x + y = 16000 \\ 3x + y = 15000 \end{cases} \rightarrow Q = (1000,12000);\ R = (4000,0)$$

El valor de $B(x,y) = 7x + 2y$ en esos vértices es:
En O, $B(0,0) = 0$
En P, $B(0,15000) = 30000$
En Q, $B(1000,12000) = 31000 \quad \Leftarrow$ *Máximo*
En R, $B(4000,0) = 28000$

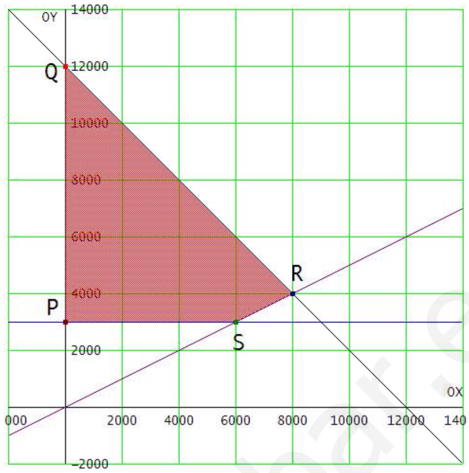
El beneficio máximo se obtiene vendiendo 1000 lotes y 12000 unidades sueltas; ese beneficio será de 31000 €.

Problema 2. Se pretende invertir en dos productos financieros A y B. La inversión en B ha de ser al menos de 3000 € y no se quiere invertir en A más del doble que en B. Se supone que A proporcionará un beneficio del 10 % y B del 5 %. Si se dispone de 12.000 €, calcular de forma razonada cuánto se debe invertir en cada producto para maximizar el beneficio y determinar éste.

Resolución:

Sea: $\begin{cases} x : \text{€ invertidos en A} \\ y : \text{€ invertidos en B} \end{cases}$.

REGIÓN FACTIBLE



Conjunto de restricciones:

$$\begin{cases} y \geq 3000 \\ x \leq 2y \\ x + y \leq 12000 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{cases}.$$

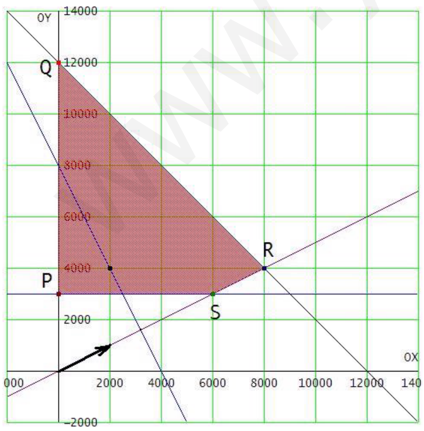
Función objetivo: $f(x,y) = 0.1x + 0.05y$

Método de la recta de nivel:

Escogemos un pto de la región factible: el $(2000, 4000)$.
Su imagen por la función objetivo es
$f(2000, 4000) = 0.1 \cdot 2000 + 0.05 \cdot 4000 = 400.$
Dibujamos la recta de nivel que pasa por (2000,4000),
que simboliza el conjunto de puntos cuya imagen por
la función objetivo también vale 400:

R.Nivel : $\mathbf{0.1x + 0.05y = 400} \quad \Rightarrow$

También dibujamos el vector gradiente, que simboliza la
dirección y sentido de crecimiento de la función objetivo:
$\nabla f = (0.1, 0.05) \sim (1000, 500) \sim (2000, 1000) \quad \Rightarrow$



Como hay que **maximizar**, trasladamos de forma paralela la recta de nivel en el sentido que indica el vector gradiente. El último punto de contacto con la región factible es

$$R : \begin{cases} x = 2y \\ x + y = 12000 \end{cases} \Rightarrow R = (8000, 4000).$$

Por tanto, para maximizar beneficios se debe invertir 8000 € en el producto financiero A y 4000 en el producto financiero B. En este caso los beneficios serán de $f(8000,4000) = 0.1 \cdot 8000 + 0.05 \cdot 4000 = 1000$

(C.Valenciana junio 2004)

Problema 2. Un banco dispone de 18 millones de euros para ofrecer préstamos de riesgo alto y medio, con rendimientos del 14 % y 7 %, respectivamente. Sabiendo que se debe dedicar al menos 4 millones de euros a préstamos de riesgo medio y que el dinero invertido en alto y medio riesgo debe estar a lo sumo en la razón de 4 a 5. Determinar cuánto debe dedicarse a cada uno de los dos tipos de préstamos para maximizar el beneficio y calcular éste.

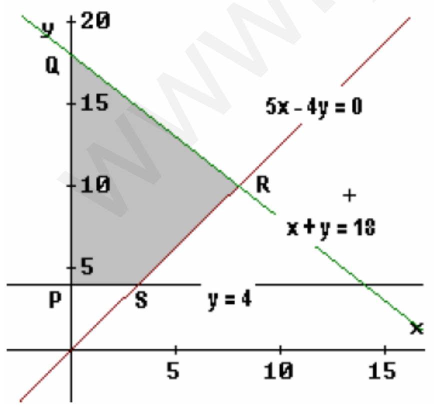
Resolución:

Llamamos **x** a la cantidad prestada a alto riesgo e **y** a la prestada a medio riesgo, (ambas en millones de euros). El objetivo es maximizar el beneficio, $B(x,y) = 0,14x + 0,07y$

Y las restricciones son:

$$\begin{cases} x + y \leq 18 \text{ (18 millones es el tope disponible)} \\ y \geq 4 \text{ (al menos 4 millones a medio riesgo)} \\ 5x - 4y \leq 0 \text{ (ver observación)} \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

Observación: x e y deben estar a lo sumo en la razón de 4 a 5 significa:
La razón de 4 a 5 es $\frac{4}{5}$. Si x e y deben estar a lo sumo en esa razón, quiere decir que la razón $\frac{x}{y} \leq \frac{4}{5} \Rightarrow 5x \leq 4y \Rightarrow 5x - 4y \leq 0$
Estas restricciones determinan la región factible (sombreada) en la siguiente figura.



54026

Como sabemos, para regiones cerradas, las soluciones máximas y mínimas se dan siempre en alguno de los vértices de la región factible. Para determinarlas basta con evaluar el valor de la función objetivo en cada uno de esos vértices, que son:

$P = (0,4); Q = (0,18);$

$$R : \begin{cases} x + y = 18 \\ 5x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow R = (8,10); S : \begin{cases} y = 4 \\ 5x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow S = (16/5,4)$$

El valor de $B(x,y) = 0,14x + 0,07y$ en esos vértices es:

En P, $B(0,4) = 0,28$ millones de euros.
En Q, $B(0,18) = 1,26$ millones de euros.
En R, $B(8,10) = 1,82$ millones de euros.
En S, $B(16/5,4) = 0,728$ millones de euros.

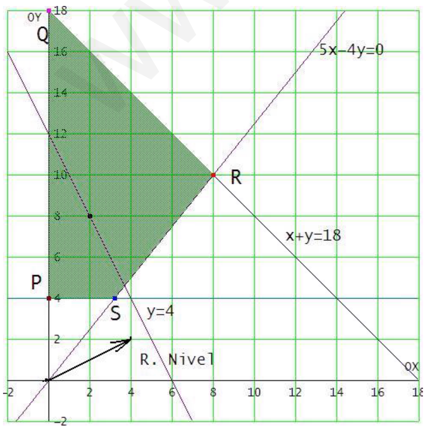
El beneficio máximo, que es de 1,82 millones de euros, se obtiene prestando 8 millones a alto riesgo y 10 millones a medio riesgo.

Método de la recta de nivel:

Escogemos un punto de la región factible: el $(2,8)$.
Su imagen por la función objetivo es
$f(2,8) = 0.14 \cdot 2 + 0.07 \cdot 8 = 0.84$
Dibujamos la recta de nivel que pasa por (2,8), que simboliza el conjunto de puntos cuya imagen por la función objetivo también vale 0.84:

$R.Nivel : \mathbf{0.14x + 0.07y = 0.84} \qquad \Rightarrow\Rightarrow$

También dibujamos el vector gradiente, que simboliza la dirección y sentido de crecimiento de la función objetivo:
$\nabla f = (0.14, 0.07) \sim (14,7) \sim (2,1) \sim (4,2) \qquad \Rightarrow$



Como hay que **maximizar**, trasladamos de forma paralela la recta de nivel en el sentido

54026

que indica el vector gradiente. El último punto de contacto con la región factible es

$$R : \begin{cases} x+y = 18 \\ 5x-4y = 0 \end{cases} \Rightarrow R = (8,10).$$

Por tanto, para maximizar beneficios se debe prestar 8 millones a alto riesgo y 10 millones a medio riesgo. En este caso el beneficio será de $f(8,10) = 0.14 \cdot 8 + 0.07 \cdot 10 = 1.82$ millones de euros.

Problema 2. Un tren de mercancías puede arrastrar, como máximo, 27 vagones. En cierto viaje transporta coches y motocicletas. Para coches debe dedicar un mínimo de 12 vagones y para motocicletas no menos de la mitad de los vagones que dedica a los coches. Si los ingresos de la compañía ferroviaria son de 540 € por vagón de coches y 360 € por vagón de motocicletas, calcular cómo se deben distribuir los vagones para que el beneficio de un transporte de coches y motocicletas sea máximo y cuánto vale dicho beneficio.

Resolución:

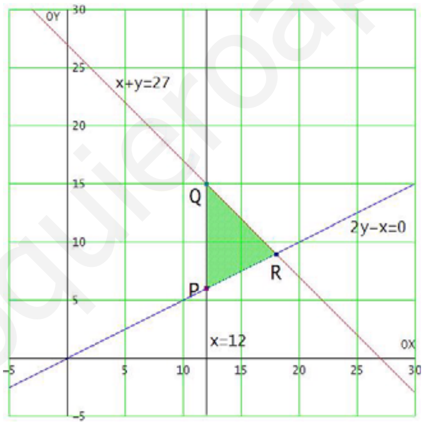
Definimos: **x**: nº vagones destinados a coches. **y :** nº de vagones destinados a motos.

Función objetivo: $f(x,y) = 540x + 360y$.

Restricciones:

$$\begin{cases} x+y \leq 27 \\ x \geq 12 \\ y \geq \dfrac{x}{2} \rightarrow 2y - x \geq 0 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

Región Factible:



Método de la recta de nivel:

Escogemos el pto (14,9) del interior de la región factible.

Su imagen por la función objetivo es:

$f(14,9) = 540 \cdot 14 + 360 \cdot 9 = 10800$

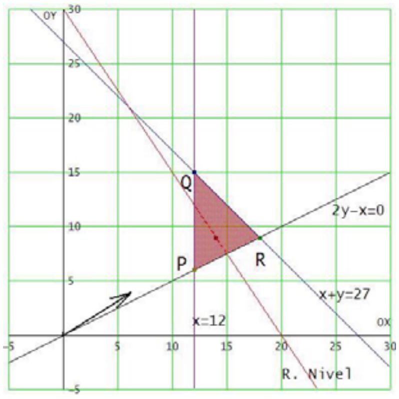
Trazamos la recta de nivel que pasa por él:

$$\mathbf{540x + 360y = 10800} \quad \Rightarrow$$

Dibujamos un vector proporcional al vector gradiente:

$$\nabla f = (540,360) \sim (6,4) \quad \Rightarrow$$

54026



Como se trata de maximizar la función objetivo, trasladamos de forma paralela la recta de nivel en la dirección y sentido del vector gradiente hasta encontrar el último punto de contacto con la región factible, (R), que será la solución.

$$R:\begin{cases}2y-x=0\\x+y=27\end{cases}\Rightarrow R=(18,9).$$

Se obtendrán beneficios máximos cuando se dispongan 18 vagones destinados a coches y 9 destinados a motos, en cuyo caso el beneficio será de $f(18,9)=540\cdot 18+360\cdot 9=12960$ €.

(C.Valenciana septiembre 2004)

Problema 2. Un fabricante produce en dos talleres tres modelos distintos de archivadores, el A, el B y el C. Se ha comprometido a entregar 12 archivadores del modelo A, 8 del B y 24 del C. Al fabricante le cuesta 720 € al día el funcionamiento del primer taller y 960 € el del segundo. El primer taller produce diariamente 4 archivadores del modelo A, 2 del B y 4 del C, mientras que el segundo produce 2, 2 y 12 archivadores, respectivamente. ¿Cuántos días debe trabajar cada taller para, cumpliendo el contrato conseguir reducir al máximo los costes de funcionamiento? ¿Cuál es el valor de dicho coste? ¿Quedaría algún excedente de algún producto en los talleres? En caso afirmativo, determinar cuánto.

Resolución:

Sea **x :** días de trabajo del primer taller ; e **y :** días de trabajo del segundo taller.

Función Objetivo: $f(x,y)=720x+960y$ (MINIMIZAR)

Restricciones:

Para construir las restricciones, puede que te ayude organizar los datos en una tabla:

	Taller1	Taller2	Producción mínima
Archiv. A	4x	2y	12
Archiv. B	2x	2y	8
Archiv. C	4x	12y	24

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x+2y \geq 12 \text{ (archivadores A fabricados)} \\ 2x+2y \geq 8 \text{ (archivadores B fabricados)} \\ 4x+12y \geq 24 \text{ (archivadores C fabricados)} \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y \geq 6 \\ x+y \geq 4 \\ x+3y \geq 6 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

Método de las rectas de nivel:

Escogemos el punto (4,4) del interior de la región factible.

Su imagen por la función objetivo es:

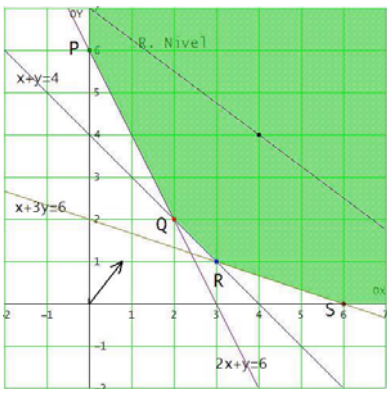
$f(4,4) = 720 \cdot 4 + 960 \cdot 4 = 6720$

Trazamos la recta de nivel que pasa por él:

$$\mathbf{720x + 960y = 6720} \quad \Rightarrow$$

Dibujamos un vector proporcional al vector gradiente:

$$\nabla f = (720, 960) \sim (3,4) \sim (0.75, 1) \quad \Rightarrow$$



Como se trata de **minimizar** la función objetivo, trasladamos de forma paralela la recta de nivel en el sentido contrario al indicado por el vector gradiente hasta encontrar el último punto de contacto con la región factible, (R), que será la solución.

$$R : \begin{cases} 2x+2y = 8 \\ 4x+12y = 24 \end{cases} \Rightarrow R = (3,1).$$

Así pues, el primer taller deberá trabajar 3 días y el segundo, 1 día. Los costes en este caso resultan ser: $f(3,1) = 720 \cdot 3 + 960 \cdot 1 = 3120$ €.

En este caso, el número de archivadores fabricados resulta ser:

	Taller1	Taller2	Total
Archiv. A	12	2	14
Archiv. B	6	2	8
Archiv. C	12	12	24

Por lo que sobrarían 2 archivadores de tipo A, lo cual representa el excedente que quedaría en los talleres.

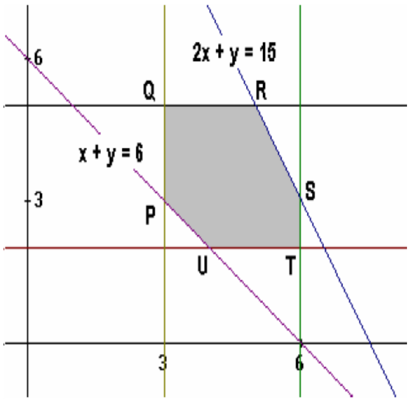
Problema 2. Calcular los puntos de la región definida por:

$x+y \geq 6$; $2x+y \leq 15$; $3 \leq x \leq 6$; $2 \leq y \leq 5$

donde la función $z = 3x + 2y$ alcanza los valores máximo y mínimo.

Resolución:

Representando las rectas asociadas a cada inecuación se obtiene la región sombreada en la siguiente figura.



Como sabemos, para regiones cerradas, las soluciones máximas y mínimas se dan siempre en alguno de los vértices de la región factible. Para determinarlas basta con evaluar el valor de la función objetivo en cada uno de esos vértices, que son:

$$P : \begin{cases} x + y = 6 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow P = (3,3); Q = (3,5); R : \begin{cases} 2x + y = 15 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow R = (5,5);$$

$$S : \begin{cases} 2x + y = 15 \\ x = 6 \end{cases} \Rightarrow S = (6,3); T = (6,2); U : \begin{cases} x + y = 6 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow U = (4,2)$$

El valor de la función $z = 3x + 2y$ en esos vértices es:

En P, $z(3,3) = 15$ En Q, $z(3,5) = 19$ En R, $z(5,5) = 25$
En S, $z(6,3) = 24$ En T, $z(6,2) = 22$ En U, $z(4,2) = 16$

Por tanto, el máximo, que es 25, se alcanza en el punto R = (5, 5); el mínimo, que vale 15, en el punto P = (3, 3).

(Junio 2005)

Problema 2: Las necesidades vitamínicas diarias de una persona son de un mínimo de 36 mgr. de vitamina A, 28 mgr. de vitamina C y 34 mgr. de vitamina D. Estas necesidades se cubren tomando pastillas de la marca Energic y de la marca Vigor. Cada pastilla de la marca Energic cuesta 0,03 € y proporciona 2 mgr. de vitamina A, 2 mgr. de vitamina C y 8 mgr. de vitamina D. Cada pastilla de la marca Vigor cuesta 0,04 € y proporciona 3 mgr. de vitamina A, 2 mgr. de vitamina C y 2 mgr. de vitamina D. ¿Cuántas pastillas de cada marca se han de tomar diariamente si se desean cubrir las necesidades vitamínicas básicas con el menor coste posible? Determinar dicho coste.

Resolución:

Hemos de calcular el nº de pastillas de cada marca por lo que plantearemos:

x : nº de pastillas Energic.
y : nº de pastillas Vigor.

Dado que buscamos minimizar el coste, el coste será la función objetivo:

$$f(x,y) = 0.03x + 0.04y$$

Restriciones:

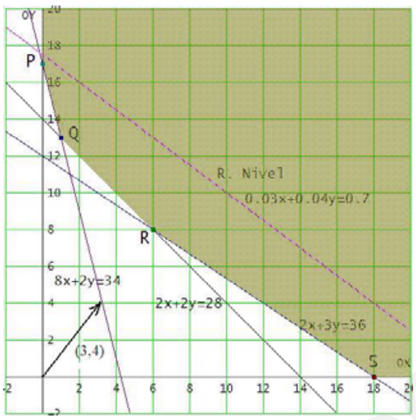
Podemos organizar previamente los datos en una tabla:

	nº de pastillas	Vitamina A	Vitamina C	Vitamina D
pastilla Energic	x	2x	2x	8x
pastilla Vigor	y	3y	2y	2y
necesidades de vitaminas		36	28	34

Con lo que resulta muy sencillo obtener ahora el conjunto de restricciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 36 \\ 2x + 2y \geq 28 \\ 8x + 2y \geq 34 \\ x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \end{cases}$$

Dibujamos la región factible:



MÉTODO DE LOS VÉRTICES:

obtenemos los vértices: $P = (0,17); Q = (1,13)$

$R = (6,8); S = (18,0)$.

$f(0,17) = 0.04 \cdot 17 = 0.68$

$f(1,13) = 0.03 \cdot 1 + 0.04 \cdot 13 = 0.55$

$f(6,8) = 0.03 \cdot 6 + 0.04 \cdot 8 = 0.5$

$f(18,0) = 0.03 \cdot 18 = 0.54$

Así, por el método de los vértices, el mínimo se alcanza en el punto (6,8).

Si optamos por el método de la recta de nivel, podríamos escoger el punto (10,10) del interior de la región factible. Lo sustituimos en la función objetivo y obtenemos $f(10,10) = 0.7$.

Dibujamos entonces la recta de nivel $0.03x + 0.04y = 0.7$ y un vector proporcional al vector gradiente $\nabla f = (0.03, 0.04) \sim (3,4)$.

Para minimizar, habría que mover de forma paralela la recta de nivel en el sentido contrario al indicado por el vector gradiente. El último punto de contacto con la región factible, (6,8) es el mínimo buscado.

Así pues para minimizar el coste se ha de tomar diariamente 6 pastillas Energic y 8 pastillas Vigor, en cuyo caso el coste será de $f(6,8) = 0.5$ €.

Problema 2B: Un vendedor dispone de 350000 € para invertir en dos tipos de microondas. El que dispone de más accesorios tiene un coste de 150 € y reporta un beneficio de 15 € por unidad vendida, mientras que el otro modelo sólo proporciona un beneficio de 11 € por unidad vendida y tiene un coste de 100 €. Sabiendo que sólo se pueden almacenar 3000 microondas y que no se venderán más de 2000 del modelo más caro, determinar cuántos microondas de cada clase se deben comprar para maximizar el beneficio y calcular éste.

Resolución:

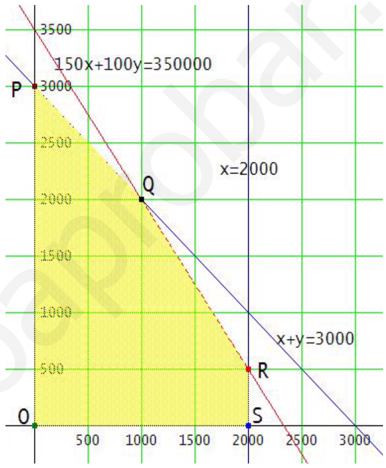
Nos preguntan el nº de microondas de cada tipo, por lo que definiremos:

x : nº microondas caros.
y : nº microondas baratos.

Como hay que maximizar beneficios, éstos serán la función objetivo: $f(x,y) = 15x + 11y$.

Conjunto de restricciones y región factible:

$$\begin{cases} 150x + 100y \leq 350000 & \text{(dinero invertido)} \\ x + y \leq 3000 & \text{(microondas almacenados)} \\ x \leq 2000 & \text{(no se venden más de 2000)} \\ x \geq 0 \; ; \; y \geq 0 \end{cases}$$

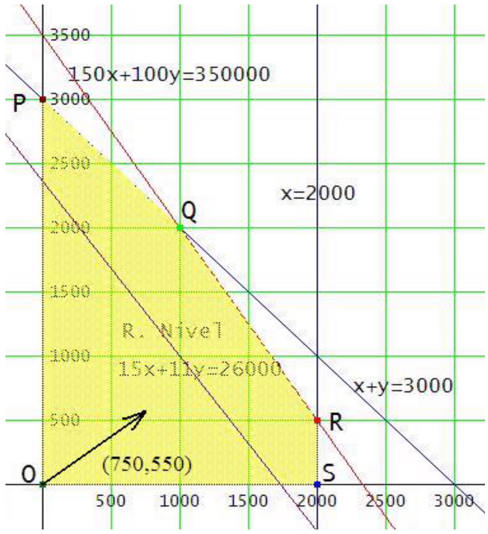


(Nota: La 1ª restricción $150x + 100y \leq 350000$ podríamos haberla simplificado como $3x + 2y \leq 7000$)

Método de las rectas de nivel:

Escogemos el punto (1000,1000) del interior de la región factible y lo sustituios en la región objetivo: $f(1000,1000) = 15 \cdot 1000 + 11 \cdot 1000 = 26000$. Ahora calculamos y dibujamos la correspondiente **recta de nivel**: $15x + 11y = 26000$.

Representamos también un vector proporcional al vector gradiente:
$\nabla f = (15,11) \sim (750,550)$:



Desplazando la recta de nivel de forma paralela en la dirección y sentido indicado por el vector gradiente, el último punto de contacto con la región factible es

$$Q : \begin{cases} x + y = 3000 \\ 150x + 100y = 350000 \end{cases} \rightarrow$$

$Q = (1000, 2000)$, que es la solución buscada.

Por lo tanto los beneficios serán máximos cuando se compren 1000 microondas de los caros y 2000 de los baratos, en cuyo caso el beneficio será de $f(x,y) = 15 \cdot 1000 + 11 \cdot 2000 = 37\,000$ €

(Septiembre 2005)

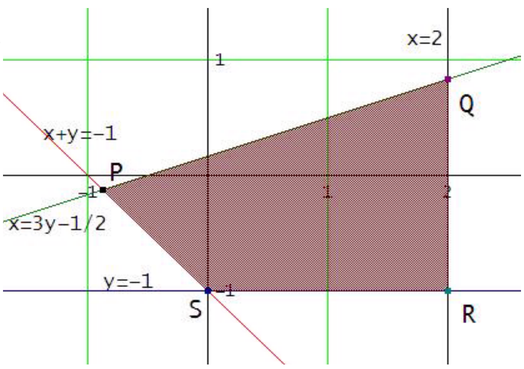
Problema 3: Representar la región factible dada por el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x + y \geq -1 \\ x \leq 2 \\ y \geq -1 \\ x \geq 3y - 1/2 \end{cases}$$

y hallar los puntos de la región en los que la función $f(x,y) = 2x + 3y$ alcanza los valores máximo y mínimo y obtener dichos valores.

Resolución:

La región factible quedaría:



Ahora podemos resolver el problema por el método de los vértices o de las rectas de nivel. Lo haremos por el método de los vértices:

Calculemos las coordenadas de todos los vértices:

54026

$P: \begin{cases} x+y=-1 \\ x=3y-1/2 \end{cases} \to P=\left(\frac{-7}{8},\frac{-1}{8}\right)$; $Q: \begin{cases} x=2 \\ x=3y-1/2 \end{cases} \to Q=\left(2,\frac{5}{6}\right)$

$R=(-1,2)$; $S=(0,-1)$.

Dado que la función objetivo alcanza sus extremos en los vértices de la región factible, comprobemos cuál es el mínimo y cuál es el máximo:

$f(P)=f\left(\frac{-7}{8},\frac{-1}{8}\right)=\frac{-14}{8}-\frac{3}{8}=-\frac{17}{8}$; $f(Q)=f\left(2,\frac{5}{6}\right)=4+\frac{15}{6}=\frac{13}{2}$

$f(R)=f(-1,2)=-2+6=4$; $f(S)=f(0,-1)=0-3=-3$

Queda probado que el mínimo se alcanza en el punto $(0,-1)$, donde el valor de la función es -3 y el máximo se alcanza en el punto $(2,\frac{5}{6})$ donde el valor de la función es $\frac{13}{2}=6´5$.

Problema 2: Una empresa farmacéutica tiene en la actualidad dos líneas de investigación, la de medicamentos antiinflamatorios no esteroides y la de fármacos ansiolíticos. Desea invertir en la investigación a lo sumo tres millones de euros, con la condición de dedicar por lo menos 1,5 millones de euros a los ansiolíticos, con los que espera obtener un beneficio del 10%. En cambio en la investigación sobre medicamentos antiinflamatorios, aunque se calcula un beneficio del 25%, no debe invertir más de un millón de euros ¿Qué cantidad debe dedicar a cada línea de investigación para maximizar beneficios, si además debe dedicar a los ansiolíticos al menos el doble de dinero que a los antiinflamatorios? ¿Qué beneficio obtendrá de esta forma la empresa?

Resolución:

Hay que maximizar beneficios, luego la función objetivo será los beneficios. Las cantidades que debemos averiguar son:

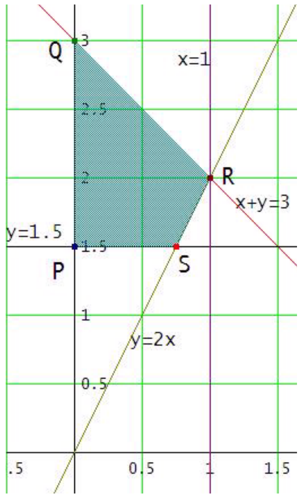
x : cantidad invertida en medicamentos antiinflamatorios no esteroides.
y : cantidad invertida en fármacos ansiolíticos. (ambas en millones de €)

Restricciones:

$$\begin{cases} x+y\le 3 & \text{(se invierten a lo sumo 3 millones)} \\ y\ge 1.5 & \text{(se dedican por lo menos 1.5 millones a los ansiolíticos)} \\ x\le 1 & \text{(en antiinflamatorios o más de 1 millón)} \\ y\ge 2x & \text{(se dedica a ansiolíticos al menos el doble que a los antiinflamatorios)} \\ x\ge 0\ ;\ y\ge 0 \end{cases}$$

Función Objetivo: $f(x,y)=0.25x+0.1y$.

Representemos la región factible:



Los vértices son: $P = (0,1.5); Q = (0,3); R = (1,2);$
$S = (0.75,1.5).$

El valor de la función objetivo en esos puntos es:

$f(0,1.5) = 0.1 \cdot 1.5 = 0.15$; $f(0,3) = 0.1 \cdot 3 = 0.3$

$f(1,2) = 0.25 \cdot 1 + 0.1 \cdot 2 = 0.45$

$f(0.75,1.5) = 0.25 \cdot 0.75 + 0.1 \cdot 1.5 = 0.3375$

Dado que el máximo se alcanza en uno de los vértices, éste ha de ser el (1,2).

Es decir la empresa habrá de dedicar 1 millón de euros a la investigación en medicamentos antiinflamatorios y 2 millones a los fármacos ansiolíticos, en cuyo caso los beneficios serán de 450 000 €, que es el valor máximo.

TEMA 7: APLICACIÓN DE LAS DERIVADAS

(C.Valenciana junio 2000)

Problema 3.-El beneficio, y, en millones, de una sociedad en función de la inversión, x, en millones, viene dado por $y = x^2 + 2x + 7$.
Obtén la derivada del beneficio, y, respecto de la inversión, x, cuando la inversión es de 2 millones y cuando la inversión es de 3 millones. Utiliza las derivadas obtenidas para calcular, aproximadamente, el beneficio cuando la inversión es de 2,01 millones y cuando la inversión es de 3,02 millones.

Resolución:

$$y' = 2x + 2 \rightarrow \begin{cases} y'(2) = 6 \\ y'(3) = 8 \end{cases}$$

La derivada indica la pendiente de la recta tangente a la gráfica en un punto.
Esta recta tangente, dado que tiene la misma inclinación que la gráfica en su punto de tangencia, resulta ser una aproximación de la función cuando x toma valores cercanos al punto de tangencia.
Así, si calculamos la recta tangente a la gráfica en $x = 2$:

$$y = ax + b \rightarrow (a = y'(2) = 6) \rightarrow y = 6x + b.$$

Y calculamos b utilizando que la recta pasa por el punto $(2, y(2)) = (2,15)$. Así, en la ecuación de la recta, sustituimos $x = 2; y = 15$:

$$y = 6x + b \rightarrow 15 = 6 \cdot 2 + b \rightarrow b = 3$$

Con lo que la ecuación de la recta tangente a la gráfica en $x = 2$ es $\mathbf{y = 6x + 3.}$

Tal como explicábamos al principio, esta recta es una buena aproximación a la función $y = x^2 + 2x + 7$, para valores de x muy cercanos a $x = 2$.
Por lo que para $x = 2.01$, el valor aproximado de la función es:

$$6 \cdot 2.01 + 3 = 15.06$$

Repitiendo el proceso para $x = 3$, obtenemos que la recta tangente a la gráfica es $y = 8x - 2$, con lo que el valor aproximado de la función es:

$$8 \cdot 3.02 - 2 = 22.16$$

(C.Valenciana junio 2001)

Problema 3. Se calcula que el valor de una acción t meses después de salir al mercado y durante el primer año viene dado por la función $v(t) = t^2 - 6t + 10$. Explicar razonadamente en qué mes conviene comprar las acciones para adquirirlas al precio más ventajoso.

Resolución:

Si queremos comprar al precio más ventajoso, buscamos que su valor sea mínimo.
Así, buscaremos un mínimo para la función $v(t)$.
Localizamos los puntos críticos, calculando la 1ª derivada e igualándola a 0:

$$v'(t) = 2t - 6 \rightarrow 2t - 6 = 0 \rightarrow t = 3$$

Así pues sólo tenemos un punto crítico. Para que sea un mínimo habrá de cumplir que la 2ª derivada en $t = 3$ habrá de dar >0:

$$v''(t) = 2 \rightarrow v''(3) = 2 > 0$$

Luego $t = 3$ es un mínimo de $v(t)$. Y por eso conviene comprar las acciones al tercer mes.

(C.Valenciana junio 2002)

Problema 3. La velocidad en (m/s) que alcanza cierto atleta en una carrera de 200 metros viene dada en función del espacio recorrido, x, por la siguiente expresión:
$f(x) = -0,00055x(x - 300)$. Deducir de forma razonada:
a) ¿Qué distancia ha recorrido el atleta cuando alcanza su velocidad máxima? ¿Cuál es esa velocidad?
b) ¿Entre qué distancias su velocidad va aumentando? ¿Y disminuyendo?
c) ¿A qué velocidad llega a la meta?

Resolución:

a) Veamos primero cuándo alcanza su velocidad máxima. Para ello buscaremos un máximo a la función velocidad.

Puntos críticos:

$$f'(x) = -0.0011x + 0.165 \rightarrow -0.0011x + 0.165 = 0 \rightarrow x = \frac{-0.165}{-0.0011} = 150.$$

Para comprobar que $x = 150$ es un máximo, la 2ª derivada en ese punto habrá de ser <0:

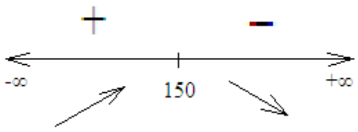
$$f''(x) = -0.0011 \rightarrow f''(150) = -0.0011 \rightarrow x = 150 \text{ es un máximo.}$$

Así, la velocidad máxima se alcanza cuando el atleta lleva 150 m recorridos.

$f(150)$ es la velocidad en ese instante:
$f(150) = -0.00055 \cdot 150 \cdot (150 - 300) = 12.375\ m/s$

b) Necesitamos estudiar el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$

Para ello estudiaremos el signo de $f'(x) = -0.0011x + 0.165$. Ya conocemos el único punto crítico $x = 150$:



$\Rightarrow f(x)$ es creciente en]0,150[y decreciente en]150,200[.

Así, su velocidad va aumentando desde la salida (0 m) hasta los 150 m de carrera y a partir de los 150 m la velocidad empieza a disminuir hasta llegar a meta (200 m).

c) Cuando $x = 200$, $f(200) = 11 m/s$

(C.Valenciana septiembre 2002)

Problema 3. Se calcula que entre las 2000 y 5000 revoluciones por minuto el consumo de gasolina de un motor viene dado por la función $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$, donde $f(x)$ indica los litros consumidos en una hora y x viene expresada en miles de revoluciones por minuto. Hallar de forma razonada:
a) Las revoluciones con las que el consumo del motor es mínimo.
b) Las revoluciones con las que el consumo del motor es máximo, y
c) Dichos consumos.

Resolución:

$D(f) = [2,5]$, ya que x se mide en miles de revoluciones por minuto.

Habremos de buscar un mínimo para la función $f(x)$ en $[2,5]$.

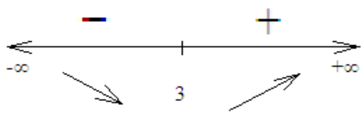
Buscamos los puntos críticos:

$$f'(x) = 4x - 12 \Rightarrow 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

Para saber si es máximo o mínimo, obtenemos la segunda derivada:

$f''(x) = 4 \Rightarrow f''(3) = 4 > 0 \Rightarrow x = 3$ es un mínimo relativo.

El estudio de la monotonía resulta:



Así pues, la función es decreciente en $]2,3[$ y creciente en $]3,5[$

 54026

a) Por ello el mínimo se alcanzará cuando $x = 3$, es decir, el consumo mínimo se da a las 3000 revoluciones.

b) La función no tiene máximo relativo. Pero según el estudio de la monotonía el máximo se puede alcanzar en $x = 2$ o en $x = 5$. Comprobemos cuál es el máximo:
$f(2) = 7; f(5) = 13 \Rightarrow x = 5$ es el máximo, es decir, el consumo máximo se da a las 5000 revoluciones.

c) $f(3) = 5; f(5) = 13$. Por lo que a 3000 revoluciones (consumo mínimo) el consumo es de 5 litros por hora y a 5000 (consumo máximo) es de 13 litros por hora.

(C.Valenciana junio 2003)

Problema 3. Se cree que el número de unidades vendidas de un cierto producto en función de su precio en euros, x, viene dado por $y = 50 - x$, donde el precio varía entre 0 y 50 euros. Si por cada unidad vendida se obtiene un beneficio $x - 10$, determinar de forma razonada el precio x que producirá un mayor beneficio, el número de unidades vendidas y el beneficio obtenido.

Resolución:

Tenemos los siguientes datos: $\left\{ \begin{array}{l} \text{unidades vendidas} \to 50 - x \\ \text{precio por unidad} \to x \\ \text{beneficio por unidad} \to x - 10 \end{array} \right.$

Como el beneficio total = beneficio por unidad × número de unidades vendidas, se tendrá:

$$B(x) = (x - 10)\cdot(50 - x) = -x^2 + 60x - 500$$

Este beneficio es máximo cuando: $B'(x) = 0$ y $B''(x) < 0$.

$B'(x) = -2x + 60 = 0 \Rightarrow x = 30$. es el único punto crítico.

$B''(x) = -2 \quad \Rightarrow B''(30) = -2 < 0$, luego, x = 30 es el máximo.

Entonces 30 € es el precio que producirá mayor benficio. A ese precio se venderán 20 unidades (50 – 30 = 20), obteniéndose un beneficio unitario de 20 euros (30 – 10 = 20); por tanto, el beneficio total será de 20 · 20 = 400 euros.

Problema 4. Descomponer de forma razonada el número 90 en dos sumandos tales que el resultado de sumar el cuadrado del primero y el doble del cuadrado del segundo sea mínimo.

Resolución:

Buscamos 2 números que sumen 90: $(x, y$ tales que $x + y = 90)$ que cumplan que $x^2 + 2y^2$ sea lo más pequeño posible.

Utilizamos el dato (que suman 90) para escribir una variable en función de la otra:
$x + y = 90 \Rightarrow y = 90 - x$

Ahora sustituimos en la expresión a minimizar y así dependerá de una única variable:

$$x^2+2y^2 = x^2+2(90-x)^2 = x^2+2(8100-180x+x^2) = 3x^2-360x+16200.$$

Busquemos un mínimo de $f(x) = 3x^2-360x+16200$

$$f'(x) = 6x-360 \Rightarrow 6x-360 = 0 \Rightarrow x = 60 \text{ (único punto crítico)}$$

$$f''(x) = 6 \Rightarrow f''(60) = 6 > 0 \Rightarrow x = 60 \text{ es un mínimo.}$$

Entonces los 2 sumandos han de ser el 60 y el 30 (en ese orden).

(C.Valenciana septiembre 2003)

Problema 3. El coste total en euros de la producción de x litros de un determinado producto viene dado por $C(x) = 1/2x^2+5x+800$. Definir la función que determina el coste medio por litro producido y determinar de forma razonada con qué producción dicho coste medio será mínimo. ¿Cuál es el valor de dicho coste?

Resolución:

Si $C(x)$ es el coste para x litros, el coste para un litro será $c(x)$ = (Coste total) : (número de litros), es decir:

$$c(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{1/2x^2+5x+800}{x} = \frac{1}{2}x+5+\frac{800}{x}$$

Como la producción es de x litros, tendremos que buscar el valor de x que minimiza $c(x)$.

$c'(x) = \frac{1}{2}-\frac{800}{x^2}$. Puntos críticos: $\frac{1}{2}-\frac{800}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1600 \Rightarrow x = 40$ (la solución $x = -40$ carece de sentido)

$c''(x) = \frac{1600}{x^3} \Rightarrow c''(40) = \frac{1}{40} > 0 \Rightarrow x = 40$ es un mínimo.

Así, cuando se produzcan 40 litros el coste por litro será $c(40) = \frac{1}{2}40+5+\frac{800}{40} = 45$, que es el mínimo.

(C.Valenciana junio 2004)

Problema 3. Una multinacional ha estimado que anualmente sus ingresos en euros vienen dados por la función $I(x) = 28x^2+36000x$, mientras que sus gastos (también en euros) pueden calcularse mediante la función $G(x) = 44x^2+12000x+700000$, donde x representa la cantidad de unidades vendidas. Determinar:
a) La función que define el beneficio anual en euros.
b) La cantidad de unidades que deben ser vendidas para que el beneficio sea máximo. Justificar que es máximo.
c) El beneficio máximo.

Resolución:

a) El beneficio es el resultado de restar los ingresos y gastos. Esto es,

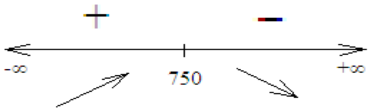
$$B(x) = I(x)-G(x) = 28x^2+36000x-(44x^2+12000x+700000) = -16x^2+24000x-700000$$

b) El beneficio es máximo cuando B'(x) = 0 y B''(x) < 0.

$B'(x) = -32x + 24000 \Rightarrow$Ptos críticos: $-32x + 24000 = 0 \Rightarrow x = 750$

$B''(x) = -32 \Rightarrow B''(750) = -32 < 0 \Rightarrow x = 750$ es un máximo.

Por eso, el beneficio será máximo cuando se vendan 750 unidades, ya que es el único máximo y el único punto crítico que tiene la función. Se podría justificar con el estudio de

la monotonía: 

, con lo que se observa que además de máximo relativo es el máximo absoluto de la función.

c) El beneficio máximo es: $B(750) = 8.300.000$ €.

(C.Valenciana septiembre 2004)

Problema 3. Un restaurante abre a las 8 de la noche y cierra cuando todos los clientes se han ido. La función $C(t) = 60t - 10t^2$ representa el número de clientes que hay en el restaurante en función del número de horas t que lleva abierto el restaurante. Se pide:
a) Determinar el número máximo de clientes que van una determinada noche al restaurante. Justificar que es un máximo.
b) Si deseamos ir al restaurante cuando haya al menos 50 personas y no más de 80, ¿entre qué horas tendríamos que ir?

Resolución:

a) Habremos de encontrar el máximo absoluto a la función $C(t) = 60t - 10t^2$:

$C'(t) = 60 - 20t \Rightarrow$Ptos críticos: $60 - 20t = 0 \Rightarrow t = 3$

$C''(t) = -20 \Rightarrow C''(3) = -20 < 0 \Rightarrow x = 3$ es un máximo.

Se puede comprobar mediante un estudio del signo de $C'(t)$ que la función es creciente para $t < 3$ y decreciente para $t > 3$, por lo que $t = 3$ es el máximo absoluto. Así pues el máximo nº de clientes se produce a las 3 horas de abrir el restaurante (a las 11 de la noche) y el nº de clientes en ese momento (que es el máximo) es de $C(3) = 60 \cdot 3 - 10 \cdot 3^2 = 90$ clientes.

b) Tenemos que estudiar para qué valores de t se cumple que $50 < C(t) < 80$

Sabemos que $C(0) = 0$ (0 clientes en el momento de apertura) y que $C(t)$ es creciente hasta $t = 3$ donde $C(3) = 90.$ Por lo que encontraremos solución antes de las 11 de la noche. Después de $t = 3$ es decreciente por lo que los valores de $C(t)$ podrían volver a pasar entre 80 y 50.

Resolvamos $C(t) = 50$ y $C(t) = 80$:

$60t - 10t^2 = 50, \Rightarrow$ Soluciones : $t = 1$ y $t = 5$ (A las 9 y a la 1 de la madrugada hay 50 clientes)

$60t - 10t^2 = 80, \Rightarrow$ Soluciones : $t = 2$ y $t = 4$ (A las 10 y a las 12 de la noche hay 80 clientes)

Por el estudio de la monotonía explicado anteriormente encontramos 2 soluciones:

Entre las 9 y las 10 de la noche o entre las 12 y la 1 de la madrugada.

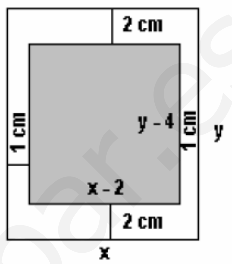
Problema 3. Se quiere imprimir un cartel anunciador rectangular que debe contener 18 cm^2 de texto impreso (también rectangular). Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm cada uno, mientras que los laterales deben ser de 1 cm. Calcular las dimensiones del cartel para que el gasto de papel sea mínimo y justificar que dicho gasto es realmente mínimo.

Resolución:

Si llamamos x e y a las dimensiones del cartel, la situación es la que se indica en la figura adjunta, donde la parte impresa es la sombreada.

Debe cumplirse que: $(x-2)\cdot(y-4) = 18$.

Se desea que la superficie del cartel, $S = x\cdot y$, sea mínima.



Para conseguir que la superficie dependa de una única incógnita, utilizaremos la ecuación $(x-2)\cdot(y-4) = 18$ para despejar y, y después sustituirla en la fórmula de la superficie.

$$y - 4 = \frac{18}{x-2} \Rightarrow y = \frac{18}{x-2} + 4 = \frac{4x+10}{x-2}$$

Así, la función a minimizar es $S(x) = x \cdot \dfrac{4x+10}{x-2} = \dfrac{4x^2+10x}{x-2}$. Donde $x \in \,]2,+\infty[$.

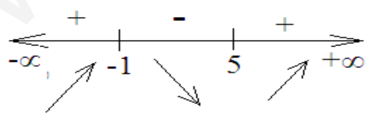
Busquemos los puntos críticos:

$$S'(x) = \frac{4x^2-16x-20}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow 4x^2-16x-20 = 0 \Rightarrow x = 5 \ ; \ x = -1 \text{ (no válida)}$$

Veamos si $x = 5$ es un mínimo:

$$S''(x) = \frac{72}{(x-2)^3} \Rightarrow S''(5) = \frac{72}{27} > 0 \Rightarrow x = 5 \text{ es un mínimo.}$$

Para garantizar que se trata del mínimo absoluto cuando $x \in \,]2,+\infty[$, podemos estudiar la monotonía:

Signo de $S'(x)$: 

. Así, $S(x)$ es decreciente en]2,5[y

creciente en]5,+∞[, por lo que $x = 5$ ha de ser el mínimo absoluto.

$x = 5 \Rightarrow y = \dfrac{4\cdot 5+10}{5-2} = 10 \Rightarrow$ Las dimensiones buscadas son 5 cm de largo por 10 de alto.

(Junio 2005)

PROBLEMA 3. Se estima que los beneficios mensuales de una fábrica de golosinas, en miles de euros, vienen dados por la función $f(x) = -0.1x^2 + 2.5x - 10$, cuando se venden x toneladas de producto. Se pide:

a) Calcular la cantidad de toneladas que se ha de vender para obtener el beneficio máximo

y calcular éste. Justificar que es máximo.
b) La cantidad mínima que se ha de vender para no tener pérdidas.
c) ¿Qué cantidad produce el máximo beneficio por tonelada vendida? Calcular el máximo beneficio y justificar que es máximo.

Resolución:

a) Hemos de buscar el valor de x que hace que $f(x)$ sea máximo.

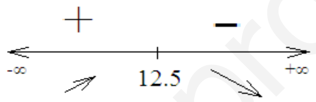
Ptos críticos: $f'(x) = -0.2x + 2.5 \Rightarrow -0.2x + 2.5 = 0 \rightarrow x = 12.5.$ Veamos si es o no un máximo:

$$f''(x) = -0.2 \rightarrow f''(12.5) = -0.2 < 0 \Rightarrow x = 12.5 \text{ es un máximo.}$$

$f(12.5) = -0.1 \cdot 12.5^2 + 2.5 \cdot 12.5 - 10 = 5.625$

Queda así justificado, por el criterio de la 2ª derivada, que cuando se venden 12.5 toneladas de producto se producirá el máximo beneficio, que será de 5625 €.

b) Cuando no se vende nada ($x = 0$), hay unas pérdidas de 10 mil euros ($f(0) = -10$). Si estudiamos la monotonía de la función:



Observamos que la función es creciente entre 0 y 12.5. Como $f(0) = -10$ y $f(12.5) = 5.625$ existirá un punto de corte en algún valor intermedio de x. Este punto de corte (punto en el cual y = 0) simboliza las toneladas de producto para las cuales no hay ni beneficios ni pérdidas. Busquemos ese punto de corte:

$-0.1x^2 + 2.5x - 10 = 0, \Rightarrow x = 5 \; y \; x = 20.$

Así, a partir de 5 toneladas vendidas se dejarán de tener pérdidas. (Los beneficios a partir de esa cantidad serán crecientes hasta que se venden 12.5 toneladas, a partir de la cual los beneficios decrecen. Cuando se llega a un veinte toneladas ya no hay beneficios (ni pérdidas, porque es punto de corte con el eje de abcisas) y a partir de 20 toneladas se vuelve a tener pérdidas).

c) El beneficio por tonalada vendida es $\dfrac{\text{beneficio total}}{\text{nº de toneladas}} = \dfrac{f(x)}{x}$. (en miles de euros)

Definamos entonces la nueva función $g(x) = \dfrac{-0.1x^2 + 2.5x - 10}{x} = -0.1x + 2.5 - \dfrac{10}{x}$, que representa el beneficio por tonelada y busquémosle un máximo.

Ptos críticos: $g'(x) = -0.1 + \dfrac{10}{x^2} \Rightarrow -0.1 + \dfrac{10}{x^2} = 0 \rightarrow x = -10 \; y \; x = 10.$

Despreciamos la solución $x = -10$ porque carece de sentido vender una cantidad negativa. Veamos si $x = 10$ es realmente un máximo:

$$g''(x) = -\frac{20}{x^3} \rightarrow g''(10) = -0.02 < 0 \Rightarrow x = 10 \text{ es un máximo.}$$

El beneficio por tonelada en ese caso es ($g(10) = -0.1 \cdot 10 + 2.5 - \dfrac{10}{10} = 0.5$) de 500 €.

Los resultados están justificados por el criterio de la 2ª derivada.

PROBLEMA 3. Una empresa de telefonía quiere lanzar al mercado una oferta de tarifa plana de internet. Se ha realizado un estudio que determina que si la tarifa fuera de 36 € podrían conseguirse 4800 contratos. Sin embargo, por cada euro menos en la tarifa, el número de contratos previsto anteriormente se incrementaría en 150. Se pide:
a) Expresar el ingreso total previsto como una función de una variable. Explicar el significado de la variable utilizada.
b) ¿Cuál debería ser la tarifa para que la empresa obtuviera el ingreso máximo? ¿Cuál es éste y con cuántos abonados se conseguiría? Justificar que el ingreso obtenido realmente es máximo.

Resolución:

a) Ingreso Total = (tarifa) • (nº de contratos)

El enunciado explica cómo aumentan los contratos por cada euro que se baja la tarifa. Entonces llamaremos *x* a los euros de descuento sobre la tarifa de 36 €. En este caso:

$I(x) = (36 - x) \cdot (4800 + 150x) = -150x^2 + 600x + 172\,800$

b) Tenemos que buscar el valor de x que hace máximo $I(x)$:

Ptos críticos: $I'(x) = -300x + 600 \Rightarrow -300x + 600 = 0 \to x = 2.$ Veamos si es un máximo:

$I''(x) = -300 \to I''(2) = -300 < 0 \Rightarrow x = 2$ es un máximo de $I(x).$ (Justificado por el criterio de la 2ª derivada).

Como x indica los euros de descuento sobre el precio inicial de 36 €, la tarifa que garantiza el ingreso máximo es $36 - 2 = 34$ €. El número de abonados será $4800 + 150 \cdot 2 = 5100.$ Y el ingreso máximo será de $34 \cdot 5100 = 173\,400$ €

(Septiembre 2005)

PROBLEMA 3. En unos almacenes se tienen 2000 Kg. de alimentos perecederos que se pueden vender a 3 € el Kg., pero si se venden más tarde, el precio aumenta en 0,1 € el Kg. cada día. Calcular cuándo interesa vender estos alimentos para tener los máximos ingresos si cada día que pasa se estropean 50 Kg. de ellos. ¿Cuáles son estos ingresos máximos? ¿Cuántos los kilos que se venden y a qué precio? Justificar que es máximo.

Resolución:

Dado que se trata de maximizar ingresos, buscaremos previamente la fórmula de los ingresos:

Ingresos = (kg de alimentos) • (precio por kg)

Por el enunciado observamos que tanto la cantidad de alimentos como el precio por kg depende del número de días transcurridos. Por eso, para obtener la fórmula necesitamos llamar *x* al nº de días transcurridos.

$I(x) = (2000 - 50x) \cdot (3 + 0.1x) = -5x^2 + 50x + 6000.$ Busquemos un máximo de $I(x)$:

Ptos críticos: $I'(x) = -10x + 50 \Rightarrow -10x + 50 = 0 \rightarrow x = 5.$ Veamos si es un máximo:

$$I''(x) = -10 \rightarrow I''(5) = -10 < 0 \Rightarrow x = 5 \text{ es un máximo.}$$

Por ello los máximos ingresos se tendrán si se vende en el **5º día**, en cuyo caso los ingresos serán de $I(5) = -5 \cdot 5^2 + 50 \cdot 5 + 6000 = \mathbf{6125}$ **€**

El nº de kilos es $2000 - 50 \cdot 5 =$ **1750 kg** y el precio es de $3 + 0.1 \cdot 5 = \mathbf{3.5}$ **€**. El máximo está justificado por el criterio de la 2ª derivada.

TEMA 7B: ESTUDIO Y REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

(C.Valenciana septiembre 2002)

Problema 3. La relación entre la temperatura del aire T (en $^\circ$ F) y la altitud h (en metros sobre el nivel del mar) es lineal para $0 \leq h \leq 20000$. Si la temperatura a nivel del mar es de 60° F y por cada 5000 m de altitud que se sube, la temperatura del aire baja 18° F, se pide:
a) Expresar T en función de h.
b) Calcular de forma razonada la temperatura del aire a una altitud de 15000 m.
c) Calcular de forma razonada la altitud a la que la temperatura es 0° F.

Resolución:

a) Dado que la temperatura del aire (T) depende de la altitud (h). T es la variable dependiente y h la independiente. Como la relación es lineal se tiene:

$$T(h) = ah + b \quad (0 < h < 20000).$$

Utilizando los datos que se aportan calculamos a y b:

Cuando $h = 0$ (nivel del mar) $\rightarrow T(0) = a \cdot 0 + b = 60 \Rightarrow b = 60.$

Cuando $h = 5000 \rightarrow T(5000) = a \cdot 5000 + 60 = 42$ (ha bajado 18º)
$\Rightarrow a = \dfrac{-18}{5000} = \dfrac{-9}{2500}$

Por tanto $T(h) = \dfrac{-9}{2500}h + 60.$

b) $h = 15000 \rightarrow T(h) = \dfrac{-9}{2500} \cdot 15000 + 60 = 6^\text{o}\ F$

c) $T(h) = 0 \rightarrow \dfrac{-9}{2500}h + 60 = 0 \rightarrow h = \dfrac{60 \cdot 2500}{9} = \dfrac{50\,000}{3} = 16666'\widehat{6}\ m$

(C.Valenciana septiembre 2003)

Problema 1. El precio del billete de una línea de autobús se obtiene sumando dos cantidades, una fija y otra proporcional a los kilómetros recorridos. Por un billete entre las poblaciones A y B se ha pagado 20 € y por un billete entre las poblaciones A y C se ha pagado 32 €. Si la distancia de A a C es doble el de la distancia de A a B, calcular de forma razonada cuánto se tendrá que pagar por un billete a una población que dista de A la mitad que B.

Resolución:

Tenemos que el precio del billete depende de los km recorridos. Así, llamaremos:

x : km recorridos. $p(x)$: precio del billete (€).

$p(x)$ se obtiene sumando una cantidad fija (b) y una proporcional al nº de km ($a \cdot x$) $\Rightarrow p(x) = ax + b$

Cuando $x =$ "distancia de A a B" (sea $x = d$) $\Rightarrow p(d) = \mathbf{ad + b = 20}$

Cuando $x =$ "distancia de A a C" (sea $x = 2d$) $\Rightarrow p(2d) = \mathbf{2ad + b = 32}$

Resolveremos el sistema formado por las dos últimas ecuaciones, para obtener el valor de **b** y el de **ad** ($a \cdot d$)

$$\left\{\begin{array}{l} ad + b = 20 \\ 2ad + b = 32 \end{array}\right. \Rightarrow ad = 12;\ b = 8$$

$$\text{Así, } p(x) = ax + b \Rightarrow (a = \frac{12}{d}) \Rightarrow p(x) = \frac{12}{d}x + 8$$

Por lo que para un billete de un trayecto de distancia $\frac{d}{2}$:

$$p(\frac{d}{2}) = \frac{12}{d} \cdot \frac{d}{2} + 8 = \frac{12}{2} + 8 = 14 \text{ €}$$

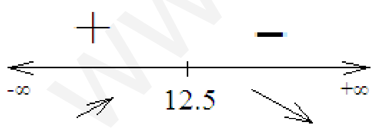
Problema 3. La concentración C de ozono contaminante, en microgramos por metro cúbico, en una ciudad durante los 20 primeros días de un determinado mes se puede aproximar por la función $C(x) = 90 + 15x - 0,6x^2$, donde x representa el tiempo transcurrido en días.
a) Estudiar de forma razonada el crecimiento y decrecimiento de la concentración de ozono en relación con los días transcurridos.
b) ¿Cuál es la concentración máxima de ozono alcanzada durante esos 20 días? Justificar la respuesta

Resolución:

a) Estudiemos la monotonía de la función $C(x) = 90 + 15x - 0,6x^2$ donde $x \in [0, 20]$

Para ello analizaremos el signo de la 1ª derivada:

$f'(x) = 15 - 1'2x$.→Puntos críticos: $15 - 1.2x = 0 \Rightarrow x = 12.5$.



Luego la concentración de ozono es creciente durante los 12 primeros días de mes, exactamente hasta el mediodía del decimotercer día, y a partir de ese momento la concentracón de ozono decrece hasta el último día del estudio. (veinteavo día, en el cual la concentración sigue siendo decreciente).

b) A partir del estudio de la monotonía deducimos claramente que $x = 12.5$ es un máximo de la función $C(x)$. También se puede comprobar que el punto crítico $x = 12.5$ es un máximo calculando la 2ª derivada en ese punto:

$C''(x) = -1.2 \Rightarrow C''(12.5) = -1.2 < 0 \Rightarrow x = 12.5$ es un máximo.

Por ello, la concentración máxima de ozono se produce al mediodía del decimotercer día, y esta concentración es de $C(12.5) = 90 + 15 \cdot 12.5 - 0.6 \cdot 12.5^2 = 183.75$ microorganismos/m^3.

(C.Valenciana junio 2004)

Ejercicio 2: La temperatura T, en grados centígrados, que adquiere una pieza sometida a un proceso viene dada en función del tiempo t, en horas, por la expresión: $F(t) = 40t - 10t^2$, con $0 \leq t \leq 4$

a) (1,5 puntos) Represente gráficamente la función T y determine la temperatura máxima que alcanza la pieza.

b) (1,5 puntos) ¿Qué temperatura tendrá la pieza transcurrida 1 hora? ¿Volverá a tener esa misma temperatura en algún otro instante?

Resolución:

a)

Como se trata de una función cuadrática, su representación será una parábola cuyo vértice estará en $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{40}{-20} = 2.$

Completando una tabla de valores obtenemos: $\Longrightarrow$

(Observa que no prolongamos la gráfica a la izquierda de $x = 0$ ni a la derecha de $x = 4$).

La temperatura máxima será de 40º C, que se alcanza a las 2 horas. ($T(2) = 40$)

b) Al cabo de 1 hora la temperatura es de $T(1) = 30º\ C$. Sí, en la tabla de valores y en la gráfica se observa que $x = 3$ cumple $T(3) = 30.$ Luego al cabo de 3 horas la temperatura volverá a ser de 30º. En ningún otro momento volverá a repetirse esa temperatura.

Nota: Si no tuviéramos la gráfica, para responder a la última cuestión habríamos de resolver $T(x) = 30$, es decir $40x - 10x^2 = 30.$ Las soluciones son $x = 1$ y $x = 3$ (y ninguna más). Por ello además del instante $x = 1$, la temperatura de 30º C se alcanza en el instante $x = 3$.

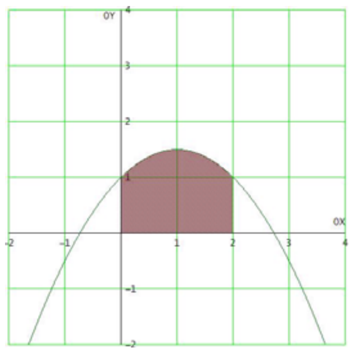
TEMA 8 : INTEGRAL DEFINIDA. APLICACIONES

(C.Valenciana junio 2004)

Problema 3. La parte superior de una pared de 2 metros de base tiene una forma parabólica determinada por la expresión $-0,5x^2 + x + 1$, donde x mide la longitud en metros desde la parte izquierda de la pared. Calcular la superficie de dicha pared utilizando una integral.

Resolución:

Si representamos $y = -0.5x^2 + x + 1,$ obtenemos:



Así, se deduce que la pared viene representada por el trozo de gráfica que corresponde al intervalo [0,2]. Por lo que la superficie de la pared corresponde con la zona sombreada.

Para calcular dicha superficie habrá que resolver:

$$\int_0^2 (-0.5x^2 + x + 1)dx = \left[-0.5 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 1 \cdot x\right]_{x=0}^{x=2} = -0.5 \cdot \frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 1 \cdot 2 - 0 = 2.\overset{\frown}{6}$$

Dado que los datos vienen dados en metros, la solución es de $2.\overset{\frown}{6}$ metros.

(Septiembre 2005)

Problema 3. Hallar el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2 + 2x + 1$, el eje de abscisas, la recta $x = -2$ y la recta $x = 5$.

Resolución:

Para calcular el área entre una función y el eje de abcisas siempre hay que calcular primero los puntos de corte entre ellos.

$x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ (sol. doble).

Ahora, para calcular el área pedida, lo haremos por trozos $[-2,-1]$ y $[-1,5]$. Si en algún trozo saliera la integral negativa, significa que la función queda por debajo del eje de abcisas y el resultado habremos de pasarlo a positivo.

$$\int_{-2}^{-1} (x^2 + 2x + 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]_{-2}^{-1} = -\frac{1}{3} + 1 - 1 - \left(\frac{-8}{3} + 4 - 2\right) = \frac{1}{3}$$

$$\int_{-1}^{5} (x^2 + 2x + 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]_{-1}^{5} = \frac{125}{3} + 25 + 5 - \left(-\frac{1}{3} + 1 - 1\right) = 72$$

El área pedida es **72´ $\overset{\frown}{3}$** (la suma de las áreas anteriores).

NOTA: En este caso el resultado coincide con el de la integral $\int_{-2}^{5} (x^2 + 2x + 1)dx$, dado que, aunque sí existe punto de corte con el eje de abcisas en un punto intermedio, la función no llega a atravesar el eje y queda siempre por encima de él. Sin embargo, cuando no dispongamos de esa información (porque no hemos representado previamente la función) para calcular un área debemos hacerlo siempre en trozos tal y como aquí se ha mostrado.

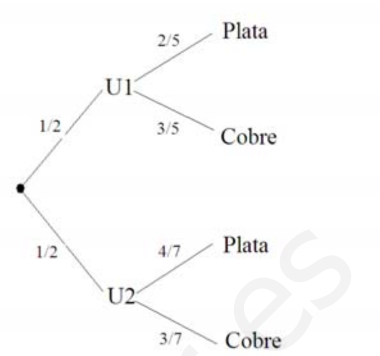
TEMA 9: PROBABILIDAD y PROB. CONDICIONADA

(C.Valenciana junio 2000)

Problema 1.-Una urna contiene dos monedas de plata y tres de cobre. Otra urna contiene cuatro monedas de plata y tres de cobre. Si se elige una urna al azar y se extrae una moneda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda extraída sea de plata?

Resolución:

La situación se puede modelizar con un diagrama de árbol:



Llamamos Pl = {Extraer moneda de plata}. U1 = {Elegir urna 1} U2 = {Elegir urna 2}.

U1 y U2 forman un sistema completo de sucesos, ya que U1 $\cup$ U2 = Ω y que U1 $\cap$ U2 = ϕ.

Entonces $P(\text{ Pl }) = P(\text{ Pl} \cap \text{U1 }) + P(\text{ Pl} \cap \text{U2 }) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{17}{35} = 0.48571.$ Lo cual equivale a un 48´57 %.

(C.Valenciana junio 2002)

Problema 4. En un aparato de radio hay presintonizadas tres emisoras A, B y C que emiten durante todo el día. La emisora A siempre ofrece música, mientras que la B y la C lo hacen la mitad del tiempo de emisión. Al encender la radio se sintoniza indistintamente cualquiera de las tres emisoras.

a) Obtener de forma razonada la probabilidad de que al encender la radio escuchemos música.

b) Si al poner la radio no escuchamos música, calcula de forma razonada cuál es la probabilidad de que esté sintonizada en la emisora B.

Resolución:

Si A, B y C son los sucesos sintonizar la emisora A, B o C, respectivamente, y M es el suceso escuchar música, se tiene:

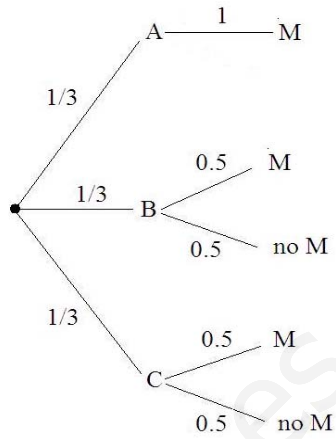
$P(A) = 1/3$; $P(B) = 1/3$; $P(C) = 1/3$. $P(M \mid A) = 1$, $P(M \mid B) = 0.5$, $P(M \mid C) = 0.5$

Los sucesos A, B y C forman un sistema completo de sucesos, dado que A $\cup$ B $\cup$ C = Ω, y que los tres sucesos son disjuntos 2 a 2. Por ello:

a) P(M) = P(M $\cap$ A) + P(M $\cap$ B) + P(M $\cap$ C) =

= P(A) · P(M | A) + P(B) · P(M | B) + P(C) · P(M/C) = 2/3

Podría haber ayudado un diagrama de árbol como éste :



b) Contamos con el dato adicional de que al poner la radio no escuchamos música, luego sabemos que se cumple no M ($\overline{M}$). El resultado a calcular es $P(\, B \mid \overline{M}\,)$.

Ahora bien cuando tenemos que calcular una probabilidad condicionada y la que conocemos es la opuesta $P(\, \overline{M} \mid B\,)$, (probabilidad a posteriori), hemos de aplicar el teorema de Bayes. Este se deduce de aplicar 2 veces la definición de probabilidad condicionada:

$$P(\, B \mid \overline{M}\,) = \frac{P(\, B \cap \overline{M}\,)}{P(\, \overline{M}\,)} = \frac{P(\, \overline{M} \mid B\,) \cdot P(\, B\,)}{P(\, \overline{M}\,)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

(C.Valenciana septiembre 2002)

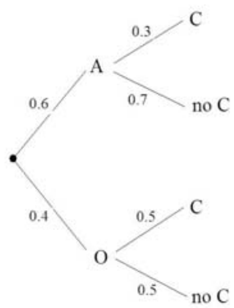
Problema 4. El 60 % de los alumnos de bachillerato de un Instituto son chicas y el 40 % chicos. La mitad de los chicos lee asiduamente la revista COMIC, mientras que sólo el 30 % de las chicas la lee.
a) Obtener de forma razonada la probabilidad de que un alumno elegido al azar lea esta revista,
b) Si un alumno elegido al azar nos dice que no lee la revista, obtener de forma razonada probabilidad de que sea chica.

Resolución:

Sean A el suceso ser chica, O el suceso ser chico y C el suceso leer COMIC. Se tiene:

$P(A) = 0.6\,;\; P(O) = 0.4\,;\; P(C \mid A) = 0.3\,;\; P(C \mid O) = 0.5$

Organizando los datos en árbol:



a) Los sucesos A y O forman un sistema completo así que:

$$P(C) = P(C \cap A) + P(C \cap B) = P(A) \cdot P(C \mid A) + P(O) \cdot P(C \mid O) = 0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.5 = 0.38$$

b) Sabemos que sucede $\overline{C}$ y nos piden la probabilidad de A. La respuesta es el valor de $P(A \mid \overline{C})$.

Se trata de calcular una probabilidad a posteriori, ya que tenemos $P(\overline{C} \mid A)$ (está en el árbol y su valor es de 0.7). Aplicamos el teorema de Bayes:

$$P(A \mid \overline{C}) = \frac{P(A \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{P(\overline{C} \mid A) \cdot P(A)}{P(\overline{C})} = \frac{0.7 \cdot 0.6}{0.62} = \mathbf{0.67742}$$

Hemos utilizado que

$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0.38 = 0.62$ y que $P(\overline{C} \mid A) = 1 - P(C \mid A) = 1 - 0.3 = 0.7$

Por tanto, en este caso será chica en un 67´74 % de los casos.

Problema 4. En una bolsa de caramelos surtidos hay 10 caramelos con sabor a naranja, 5 con sabor a limón y 3 con sabor a fresa. Todos tienen el mismo tamaño y hasta extraerlos de la bolsa no se sabe de qué sabor son. Se extraen tres caramelos al azar.
a) Calcular de forma razonada la probabilidad de extraer primero uno con sabor a naranja, luego uno con sabor a fresa y, por último, uno con sabor a limón.
b) Calcular de forma razonada la probabilidad de que sean de tres sabores diferentes.

Resolución:

a) Llamaremos N1, L1 y F1 a los sucesos obtener en la 1ª extracción el sabor naranja, limón o fresa respectivamente.
Análogamente nombramos N2, L2 y F2 y también N3, L3 y F3. (La situación puede resumirse en un diagrama de árbol de 3 x 3 = 27 posibilidades).

$$P(N1 \cap F2 \cap L3) = P(N1) \cdot P(F2 \mid N1) \cdot P(L3 \mid (N1 \cap F2) = \frac{10}{18} \cdot \frac{3}{17} \cdot \frac{5}{16} = \frac{25}{816} \approx 0.$$

Es fácil observar que cuando ya se ha extraído uno de naranja, quedan 3 de fresa sobre un total de 17. Análogamente, cuando ya se ha extraído uno de naranja y uno de fresa quedan 5 de limón sobre un total de 16.

b) Sea D = {obtener 3 caramelos diferentes}. El suceso D comprende los siguientes casos: (Naranja, limón, fresa) y todas sus permutaciones, que resultan ser $P_3 = 3! = 6$ casos diferentes:

$$D = \{(N,L,F); (N,F,L); (L,N,F); (L,F,N); (F,N,L); (F,L,N)\}$$

Sobreentendemos aquí que (N,L,F) significa extraer 1º uno de naranja, después uno de limón y por último uno de fresa, que en el apartado **a)** escribíamos $N1 \cap L2 \cap F3$

Como D es unión de 6 sucesos elementales $P(D)$ resultará ser la suma de las probabilidades de los 6 sucesos.

Ahora bien, si calculamos la probabilidad de cualquiera de estos sucesos siempre obtendremos $\frac{10}{18} \cdot \frac{5}{17} \cdot \frac{3}{16}$, dado que los denominadores (casos posibles) siempre serán

18, 17 y 16 (ya que cada vez queda un caramelo menos). Por otro lado los numeradores siempre serán 10, 5 y 3 aunque aparezcan en otro orden.

$$P(D) = 6 \cdot \frac{10}{18} \cdot \frac{5}{17} \cdot \frac{3}{16} = \frac{25}{136} \approx \mathbf{0.18382}$$

(C.Valenciana junio 2003)

Problema 4. En una pequeña ciudad hay dos bibliotecas. En la primera, el 50 % de los libros son novelas mientras que en la segunda lo son el 70 %. Un lector elige al azar una biblioteca siguiendo un método que implica que la probabilidad de elegir la primera biblioteca es el triple que la de elegir la segunda. Una vez llega a la biblioteca seleccionada, elige al azar un libro, novela o no.
a) Calcular razonadamente la probabilidad de que elija una novela.
b) Sabiendo que el libro seleccionado es una novela, obtener razonadamente la probabilidad de que haya acudido a la primera biblioteca.

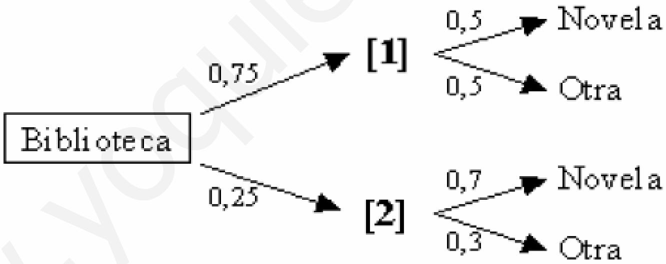
Resolución:

Necesitamos averiguar primero la probabilidad de elegir cada una de las bibliotecas. Designamos por B1 y B2 a la primera y segunda biblioteca.

Si p es la probabilidad de elegir la segunda biblioteca, P(B2) = p, la de elegir B1 será P(B1) =3p.

Como P(B1) + P(B2) = 1 ⇒ 3p + p = 1 ⇒ p = 0,25

Y ahora podemos representar la situación con un diagrama de árbol.:



a) $P(\text{Novela}) = P(Novela \cap B1) + P(Novela \cap B2)$
$= P(B1) \cdot P(Novela \mid B1) + P(B2) \cdot P(Novela \mid B2) = 0.75 \cdot 0.5 + 0.25 \cdot 0.7 = \mathbf{0.55}$

b) Hemos de calcular $P(B1 \mid Novela)$ (probabilidad a posteriori). Para ello utilizaremos el teorema de Bayes:

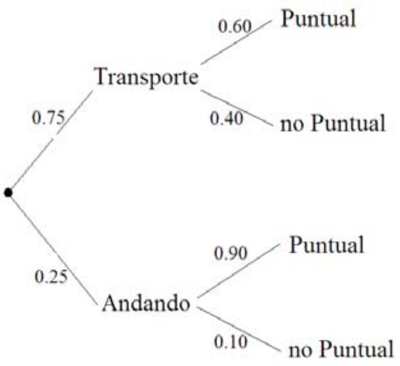
$$P(B1 \mid Novela) = \frac{P(B1 \cap Novela)}{P(Novela)} = \frac{P(B1) \cdot P(Novela \mid B1)}{P(Novela)} = \frac{0.75 \cdot 0.5}{0.55} = \frac{37.5}{55} =$$
$\mathbf{0.6\overset{\frown}{81}}$

Problema 1. El 75 % de los alumnos acude a clase en algún tipo de transporte y el resto andando. Llega puntual a clase el 60 % de los que utilizan el transporte y el 90 % de los que acude andando. Calcular de forma razonada:
a) si se elige al azar uno de los alumnos que ha llegado puntual a clase, la probabilidad de que haya acudido andando, y

b) si se elige un alumno al azar, la probabilidad de que no haya llegado puntual.

Resolución:

Se trata de un experimento compuesto modelizable por un diagrama de árbol:



a) Se trata de calcular $P(Andando \mid Puntual)$, que es una probabilidad a posteriori. Utilizando el Teorema de Bayes:

$$P(Andando \mid Puntual) = \frac{P(Andando \cap Puntual)}{P(Puntual)} =$$

$$= \frac{P(Andando) \cdot P(Puntual \mid Andando)}{P(Puntual)} = \frac{0.25 \cdot 0.90}{P(Puntual)}.$$

Necesitamos calcular $P(Puntual)$. Para ello utilizamos la ley de la probabilidad total, utilizando que los sucesos "Transporte" y "Andando" forman un sistema completo de sucesos, ya que "Transporte" $\cup$ "Andando" = Ω y que "Transporte" $\cap$ "Andando" = ϕ :

$$P(Puntual) = P(Puntual \cap Transporte) + P(Puntual \cap Andando) =$$

$$= P(Transporte) \cdot P(Puntual \mid Transporte) + P(Andando) \cdot P(Puntual \mid Andando) =$$

$$= 0.75 \cdot 0.60 + 0.25 \cdot 0.90 = 0.675$$

Así, $P(Andando \mid Puntual) = \dfrac{0.25 \cdot 0.90}{0.675} = \mathbf{0.\overset{\frown}{3}}$

b) Se trata de calcular $P(no\ Puntual)$. Ahora bien, como en el apartado anterior hemos calculado $P(Puntual)$, será muy fácil:

$$P(no\ Puntual) = 1 - P(Puntual) = 1 - 0.675 = \mathbf{0.325}$$

(C.Valenciana septiembre 2003)

Problema 4. Un ordenador personal tiene cargados dos programas antivirus A1 y A2 que actúan simultánea e independientemente. Ante la presencia de un virus, el programa A1 lo detecta con una probabilidad de 0,9 y el programa A2 lo detecta con una probabilidad de 0,8. Calcular de forma razonada:
a) La probabilidad de que un virus cualquiera sea detectado.
b) La probabilidad de que un virus sea detectado por el programa A1 y no por A2.

Resolución:

 54026

Llamemos D1 al suceso "el virus ha sido detectado por el programa A1" y D2 al correspondiente por el programa A2.

Como los programas A1 y A2 actúan independientemente, los sucesos D1 y D2 son independientes (y sus contrarios también).

a) Puede ser detectado por A1 o por A2. El suceso en cuestión es D1 ∪ D2.

$$P(D1 \cup D2) = P(D1) + P(D2) - P(D1 \cap D2) = 0.9 + 0.8 - P(D1) \cdot P(D2) =$$

Hemos utilizado que $P(D1 \cap D2) = P(D1) \cdot P(D2)$, por la independencia de D1 y D2.

$$= 0.9 + 0.8 - 0.9 \cdot 0.8 = \mathbf{0.98}$$

b) El suceso cuya probabilidad nos piden es $D1 \cap \overline{D2}$:

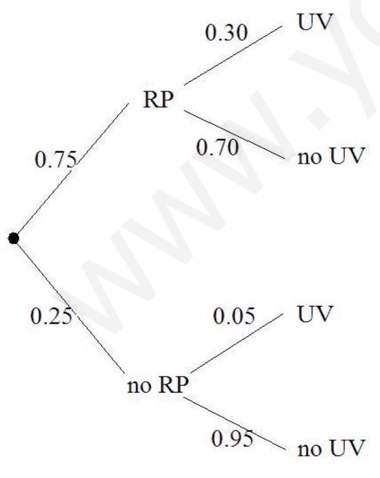
$$P(D1 \cap \overline{D2}) = P(D1) \cdot P(\overline{D2}) = 0.9 \cdot 0.2 = \mathbf{0.18}$$

Ya que $D1$ y $\overline{D2}$ son independientes y que $P(\overline{D2}) = 1 - P(D2) = 1 - 0.8 = 0.2$

Problema 4. El 75 % de los jóvenes que tienen vídeoconsola ha recibido propaganda de un determinado vídeojuego y el 25 % restante no. El 30 % de los que recibieron la propaganda ha utilizado después dicho vídeojuego y también lo ha hecho el 5 % de los que no la recibieron. Calcular de forma razonada:
a) La probabilidad de que un joven con vídeoconsola seleccionado al azar haya utilizado este vídeojuego.
b) La probabilidad de que un joven con vídeoconsola seleccionado al azar haya recibido propaganda y no haya utilizado el vídeojuego

Resolución:

La información se puede resumir en un diagrama árbol: (RP: Recibe propaganda. UV: Utiliza el videojuego)



Hemos de averiguar $P(UV)$. Como RP y $\overline{RP}$ forman un sistema completo de sucesos, podemos aplicar el teorema de la probabilidad total:

$$P(UV) = P(UV \cap RP) + P(UV \cap \overline{RP}) = P(RP) \cdot P(UV | RP) + P(\overline{RP}) \cdot P(UV | \overline{RP}) = 0.75$$

b) Nos piden $P(RP \cap \overline{UV}) = P(RP) \cdot P(\overline{UV} | RP) = 0.75 \cdot 0.70 = \mathbf{0.525}$

 54026

(C.Valenciana junio 2004)

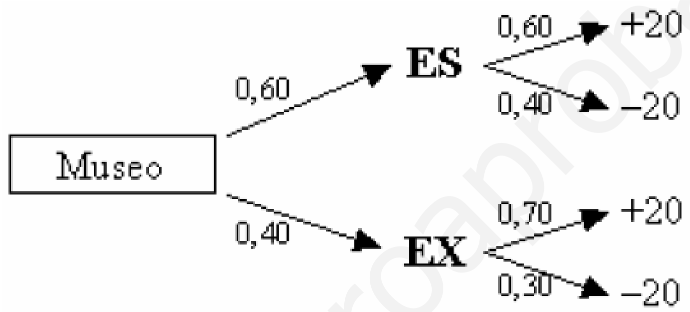
Problema 4. El 60 % de las personas que visitaron un museo durante el mes de mayo eran españoles. De estos, el 40 % eran menores de 20 años. En cambio, de los que no eran españoles, tenían menos de 20 años el 30 %. Calcular:
a) La probabilidad de que un visitante elegido al azar tenga menos de 20 años.
b) Si se escoge un visitante al azar, la probabilidad de que no sea español y tenga 20 años o más.

Resolución:

Designamos por "ES" el suceso ser español; por "EX", no ser español; por "–20" tener menos de 20 años y por "+20" tener 20 o más años. Los datos son:

$P(ES) = 0.6 \rightarrow P(EX) = 0.4.$ $P(-20 \mid ES) = 0.4 \rightarrow P(+20 \mid ES) = 0.6$ $P(-20 \mid EX) = 0.3$

Puede formarse el siguiente diagrama de árbol.



a) Por la ley de la probabilidad total:
$P(-20) = P(ES) \cdot P(-20 \mid ES) + P(EX) \cdot P(-20 \mid EX) = 0.60 \cdot 0.40 + 0.40 \cdot 0.30 = \mathbf{0.36}$

b) $P(EX \cap +20) = P(EX) \cdot P(+20 \mid EX) = 0.40 \cdot 0.70 = \mathbf{0.28}$

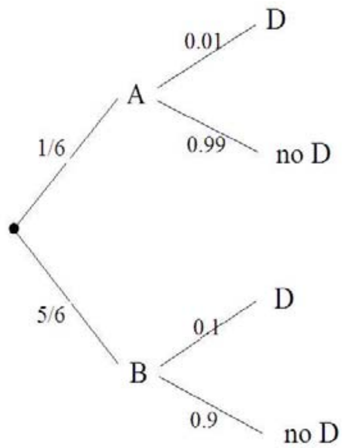
Problema 4. Las máquinas A y B producen 50 y 250 piezas por hora, con un porcentaje de fallos del 1 % y del 10 %, respectivamente. Tenemos mezcladas las piezas fabricadas en una hora y elegimos una pieza al azar. Calcular:
a) La probabilidad de que sea una pieza no defectuosa fabricada en la máquina B.
b) La probabilidad de que esté fabricada en la máquina A, si sabemos que es defectuosa.

Resolución:

Sean A y B los sucesos ser fabricados por la máquina A y por B, respectivamente. Sea D el suceso ser defectuosa. Elegir una pieza al azar puede ser considerado como un experimento compuesto donde primero puede ser fabricada por A o por B y después puede ser defectuosa o no:

$$P(A) = \frac{50}{300} = \frac{1}{6} \ ; \ P(B) = \frac{250}{300} = \frac{5}{6} \ ; \ P(D \mid A) = 0.01 \ (\rightarrow P(\overline{D} \mid A) = 0.99) \ ;$$

$$P(D \mid B) = 0.1 \ (\rightarrow P(\overline{D} \mid B) = 0.9)$$



a) $P(\overline{D} \cap B) = P(B) \cdot P(\overline{D} \mid B) = \frac{5}{6} \cdot 0.9 = \mathbf{0.75}$

b) Hemos de calcular $P(A \mid D)$, que es una probabilidad "a posteriori". Por ello aplicaremos el Teorema de Bayes:

$$P(A \mid D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D \mid A)}{P(D)} = \frac{1/6 \cdot 0.01}{P(D)}$$

Pero como como el suceso D = {Ser defectuosa} depende de si ha sido fabricada por la máquina A o por la máquina B, para calcular P(D) utilizaremos la ley de la probabilidad total. (Ya que A y B forman un sistema completo de sucesos: $A \cup B = \Omega \;\; y \;\; A \cap B = \phi$).

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) = P(A) \cdot P(D \mid A) + P(B) \cdot P(D \mid B) = \frac{1}{6} \cdot 0.01 + \frac{5}{6} \cdot 0.1 = 0.085$$

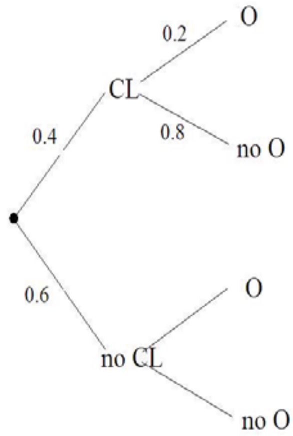
$$\Rightarrow P(A \mid D) = \frac{1/6 \cdot 0.01}{0.085} \approx \mathbf{0.0196}$$

(C.Valenciana septiembre 2004)

Problema 4. Se ha realizado una encuesta a un grupo de estudiantes de informática. Entre sus conclusiones está que un 40 % ha recibido algún curso de LINUX. Además, el 20 % de aquellos que recibieron algún curso de LINUX tiene ordenador en su casa. Si un 10 % de estudiantes de informática tiene ordenador en casa y no han recibido ningún curso de LINUX, calcular:
a) La probabilidad de que un estudiante de informática tenga ordenador en casa y haya recibido un curso de LINUX.
b) La probabilidad de que un estudiante de informática tenga ordenador en casa.
c) Si un estudiante de informática tiene ordenador en casa, la probabilidad de que haya recibido un curso de LINUX.

Resolución:

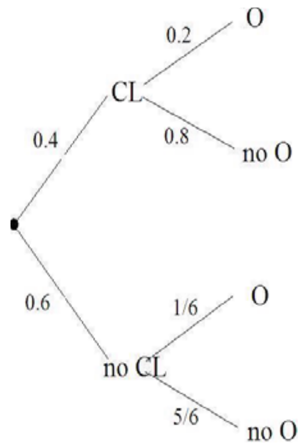
Sea CL el suceso "haber recibido algún curso de Linux" y O el suceso "tener ordenador en casa":



Sin embargo, entre los datos iniciales nos falta $P(O \mid \overline{CL})$. Por eso el árbol no está completo. Sin embargo sí nos dicen que $P(O \cap \overline{CL}) = 0.1.$ Con lo cual:

$$P(O \mid \overline{CL}) = \frac{P(O \cap \overline{CL})}{P(\overline{CL})} = \frac{0.1}{0.6} = \frac{1}{6}$$

Y podemos completar el árbol: $\Rightarrow\Rightarrow$



a) Nos piden $P(O \cap CL) = P(CL) \cdot P(O \mid CL) = 0.4 \cdot 0.2 = \mathbf{0.08}$

b) Nos piden $P(O) = P(O \cap CL) + P(O \cap \overline{CL}) = 0.08 + 0.1 = \mathbf{0.18}$ (Esto es así gracias a que CL y $\overline{CL}$ forman un sistema completo de sucesos)

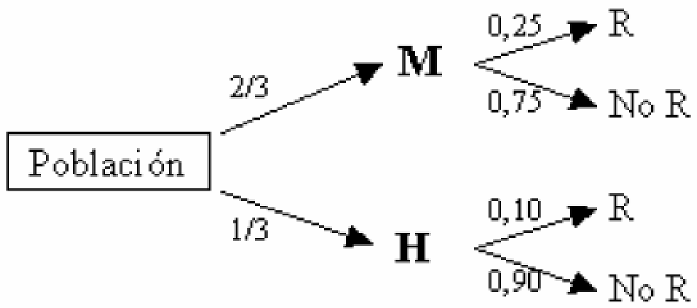
c) Nos piden $P(CL \mid O)$ (probabilidad a posteriori, aplicaremos Teorema de Bayes):

$$P(CL \mid O) = \frac{P(CL \cap O)}{P(O)} = \frac{0.08}{0.18} = \mathbf{0.\overset{\frown}{4}}$$

Problema 4. En una población hay el doble de mujeres que de hombres. El 25 % de las mujeres son rubias y el 10 % de los hombres también son rubios. Calcular:
a) Si se elige al azar una persona y resulta ser rubia, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar sea hombre y no sea rubio?

Resolución:

Sea M = {Ser mujer}, H = {Ser hombre} y R = {Tener pelo rubio}
Llamamos $P(H) = p.$ Entonces $P(M) = 2p$ con lo que $p + 2p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{3}$ y así:
$P(H) = \frac{1}{3}$ y $P(M) = \frac{2}{3}$. Podemos formar el siguiente diagrama de árbol:



a) Necesitamos $P(M|R) = \dfrac{P(M \cap R)}{P(R)} = \dfrac{P(M) \cdot P(R|M)}{P(R)} = \dfrac{2/3 \cdot 0.25}{P(R)}$.

Para calcular $P(R)$ utilizamos la ley de la probabilidad total:

$P(R) = P(M) \cdot P(R|M) + P(H) \cdot P(R|H) = \dfrac{2}{3} \cdot 0.25 + \dfrac{1}{3} \cdot 0.10 = 0.2$. Con lo cual:

$P(M|R) = \dfrac{2/3 \cdot 0.25}{0.2} = \mathbf{0.8\widehat{3}}$

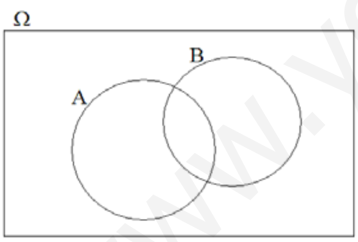
b) $P(H \cap \overline{R}) = P(H) \cdot P(\overline{R}|H) = (1/3) \cdot 0{,}90 = \mathbf{0.3}$

(Junio 05)

Opción A: Sean A y B dos sucesos con P(A) = 0,5; P(B)=0,3 y P(A∩B)=0,1. Calcular las probabilidades siguientes:
P(A∪B), P(A|B), P(A| A∩B) y P(A| A∪B).

Resolución:

El siguiente dibujo ayuda a recordar las propiedades de la probabilidad para la unión e intersección de 2 conjuntos:



$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$P(A \cup B) = 0.5 + 0.3 - 0.1 = \mathbf{0.7}$

Por definición de Probabilidad condicionada $P(A | B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.1}{0.3} = \mathbf{0.\widehat{3}}$

Análogamente $P(A | A \cap B) = \dfrac{P(A \cap A \cap B)}{P(A \cap B)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = \mathbf{1.}$

Hemos utilizado que $A \cap A = A \Rightarrow A \cap A \cap B = A \cap B.$ (Resulta evidente que si sabemos que sucede $A \cap B,$ (suceden ambos) la probabilidad de que suceda A con esa condición es 1, dado que es suceso seguro.)

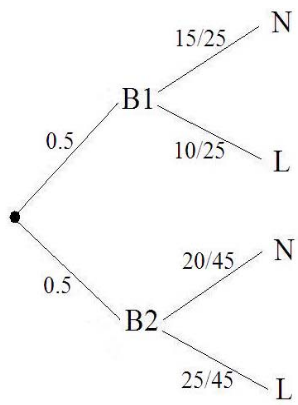
$P(A | A \cup B) = \dfrac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \dfrac{P(A)}{P(A \cup B)} = \dfrac{0.5}{0.7} = \dfrac{5}{7} \approx \mathbf{0.7143}$

Hemos utilizado que $A \cap (A \cup B) = A$, dado que A está contenido dentro de $A \cup B$.

Opción B: Tenemos dos bolsas de caramelos, la primera contiene 15 caramelos de naranja y 10 de limón y la segunda 20 de naranja y 25 de limón. Elegimos una de las bolsas al azar y extraemos un caramelo. Calcular:
a) La probabilidad de que el caramelo sea de naranja.
b) Si el caramelo elegido es de limón, ¿cuál es la probabilidad de que lo hayamos extraído de la segunda bolsa?

Resolución:

Se trata de un problema de probabilidad compuesta donde podemos representar la situación mediante diagrama de árbol:



a) Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(N) = P(B1) \cdot P(N \mid B1) + P(B2) \cdot P(N \mid B2) =$$
$$= 0.5 \cdot \frac{15}{25} + 0.5 \cdot \frac{20}{45} = \mathbf{0.5\hat{2}}$$

b) Se trata de calcular $P(B2 \mid L)$, (probabilidad "a posteriori").

Por el teorema de Bayes: $P(B2 \mid L) = \dfrac{P(B2 \cap L)}{P(L)} =$

$$= \frac{P(B2) \cdot P(L \mid B2)}{P(L)} = \frac{0.5 \cdot 25/45}{1 - P(N)} = \frac{0.2\hat{7}}{0.4\hat{7}} \approx \mathbf{0.5319}$$

(Septiembre 05)

Opción A: En un grupo de 2º de bachillerato el 15% estudia Matemáticas, el 30% estudia Economía y el 10% ambas materias. Se pide:
a) ¿Son independientes los sucesos Estudiar Matemáticas y Estudiar Economía?
b) Si se escoge un estudiante del grupo al azar, calcular la probabilidad de que no estudie ni Matemáticas ni Economía.

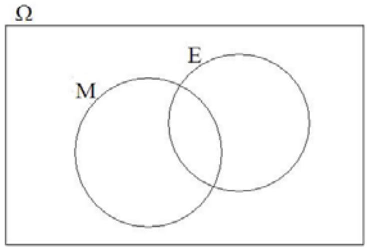
Resolución:

En el experimento de escoger un alumno al azar, definimos los sucesos M = {estudia matemáticas} y $E = \{\text{Estudia economía}\}$. Entonces tenemos que
$P(M) = 0.15; P(E) = 0.30; P(M \cap E) = 0.10$.

a) Para ser independientes se ha de cumplir que $P(M \cap E) = P(M) \cdot P(E)$.

$P(M \cap E) = 0.10$; $P(M) \cdot P(E) = 0.15 \cdot 0.30 = 0.045$ Por lo tanto **no** son independientes.

b) Tenemos que calcular $P(\overline{M} \cap \overline{E})$. Recordemos, con ayuda del siguiente gráfico la propiedades de la probabilidad de la unión y la intersección:



Utilizaremos que $\overline{M} \cap \overline{E} = \Omega - (M \cup E)$:
$P(\overline{M} \cap \overline{E}) = 1 - P(M \cup E)$. Calculamos $P(M \cup E)$:
$P(M \cup E) = P(M) + P(E) - P(M \cap E) =$
$= 0.15 + 0.3 - 0.1 = 0.35.$
Con o que $P(\overline{M} \cap \overline{E}) = 1 - 0.35 = \mathbf{0.65}$

(Opción B): En un centro escolar, 22 de cada 100 chicas y 5 de cada 10 chicos llevan gafas. Si el número de chicas es tres
veces superior al de chicos, hallar la probabilidad de que un estudiante elegido al azar:
a) No lleve gafas
b) Sea chica y lleve gafas
c) Sea chica, sabiendo que lleva gafas.

Resolución:

Llamemos A y O a los sucesos ser chica y ser chico, respectivamente. Llamaremos G al suceso llevar gafas.

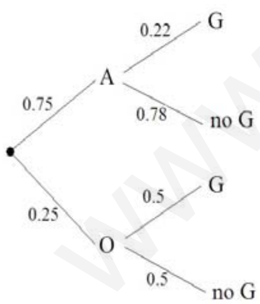
Observemos que los datos referidos a las personas que llevan gafas está diferenciado según si se trata de chicas o de chicos. Es decir los datos debemos interpretarlos como probabilidades condicionadas:

$P(G \mid A) = \frac{22}{100} = 0.22$; $P(G \mid O) = \frac{5}{10} = 0.5.$

Para averiguar $P(A)$ y $P(O)$, tomamos $P(O) = p$. Entonces $P(A) = 3p$. Como los sucesos A y O son contrarios:

$P(A) + P(O) = 1 \Rightarrow 3p + p = 1 \Rightarrow p = 0.25$. Así, $P(A) = 0.75$ y $P(O) = 0.25$.

Ahora podríamos formar el árbol que resume toda la información:



a) Hay que calcular $P(\overline{G})$. Utilizaremos el teorema de la prob. total:
$P(\overline{G}) = P(A) \cdot P(\overline{G} \mid A) + P(O) \cdot P(\overline{G} \mid O) =$
$= 0.75 \cdot 0.78 + 0.25 \cdot 0.5 = \mathbf{0.71}$

b) Necesitamos $P(A \cap G) = P(A) \cdot P(G \mid A) =$
$= 0.75 \cdot 0.22 = \mathbf{0.165}$

c) Nos piden $P(A \mid G)$ (probabilidad a posteriori). Por el teorema de Bayes:

$$P(A \mid G) = \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{0.165}{1 - P(\overline{G})} = \frac{0.165}{0.29} = \mathbf{0.56897.}$$