UNIDAD DIDÁCTICA 1:
SISTEMAS DE ECUACIONES. MÉTODO DE GAUSS

* Las numeraciones indicadas entre páginas se refieren a las páginas del libro de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II, de segundo de bachillerato de la editorial Anaya, Andalucía, cuyos autores son J. Colera, R. García y M.J.Oliveira

Página 44

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 Halla, si existe, la solución de los siguientes sistemas e interprétalos gráficamente:

a) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - y = 1 \\ 5x - y = 4 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y = 3 \\ 5x + y = 8 \end{cases}$

Los resolvemos por el método de Gauss:

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a - 3 \cdot 2^a \\ 2^a \\ 3^a - 5 \cdot 2^a \\ 4^a - 2 \cdot 2^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{array}\right)$

Podemos prescindir de las dos últimas filas, pues coinciden con la primera. Quedaría:

$$4y = -1 \quad \to \quad y = \frac{-1}{4}$$

$$x - y = 1 \quad \to \quad x = 1 + y = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Solución: $\left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4}\right)$

El sistema representa cuatro rectas que se cortan en el punto $\left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4}\right)$.

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 8 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 5 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -9 & 3 \end{array}\right)$

De la 2ª ecuación, obtenemos $y = \frac{-1}{5}$; de la 3ª ecuación, obtenemos $y = \frac{-1}{3}$.

Luego, el sistema es *incompatible*.

El sistema representa tres rectas que se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a las tres.

2 **Comprueba que este sistema es incompatible y razona cuál es la posición relativa de las tres rectas que representa:**

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

Si dividimos la 3ª ecuación entre 2, obtenemos: $x + 2y = 0$. La 1ª ecuación es $x + 2y = 5$. Son contradictorias, luego el sistema es *incompatible*.

La 1ª y la 3ª ecuación representan dos rectas paralelas; la 2ª las corta.

3 **Resuelve e interpreta geométricamente el sistema:**

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x + y = -1 \\ (3/2)x - 3y = 0 \end{cases}$$

$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3/2 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 2 \cdot 1^a \\ (2/3) \cdot 3^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\left.\begin{array}{r} -x + 2y = 0 \\ 5y = -1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 2y = \dfrac{-2}{5} \\ y = \dfrac{-1}{5} \end{array}\right\}$$

Solución: $\left(\frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$

Geométricamente, son tres rectas que se cortan en el punto $\left(\frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$.

4 **Resuelve los siguientes sistemas reconociendo previamente que son escanados:**

a) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 11y = -69 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -y + z = 1 \\ 9z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - t = 2 \\ y + z = 4 \\ y + t - z = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 2y = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 7 \\ 11y = -69 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{-69}{11} \\ x = \dfrac{7 + y}{2} = \dfrac{4}{11} \end{array}\right\}$

Solución: $\left(\frac{4}{11}, \frac{-69}{11}\right)$

b) $\left.\begin{array}{r} -y + z = 1 \\ 9z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{array}\right\}$ $z = \dfrac{2}{9}$ $y = z - 1 = \dfrac{-7}{9}$ $x = \dfrac{3 + y - z}{3} = \dfrac{2}{3}$

Solución: $\left(\frac{2}{3}, \frac{-7}{9}, \frac{2}{9}\right)$

c) $\left.\begin{array}{r} x + y - t = 2 \\ y + z = 4 \\ y + t - z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = \lambda \\ y = 4 - z \\ t = 1 - y + z = 1 - (4 - z) + z = -3 + 2z \\ x = 2 - y + t = 2 - (4 - z) - 3 + 2z = -5 + 3z \end{array}$

Soluciones: $(-5 + 3\lambda,\ 4 - \lambda,\ \lambda,\ -3 + 2\lambda)$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 2y = 1 \end{array}\right\}$ $y = \dfrac{1}{2}$ $x = \dfrac{y}{3} = \dfrac{1}{6}$ $z = -2x + 3y = \dfrac{7}{6}$

Solución: $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{7}{6}\right)$

5 Resuelve estos sistemas de ecuaciones lineales:

S

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ x + 3y - 2z = -2 \\ x + z = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + 5y = 16 \\ x + 3y - 2z = -2 \\ x + z = 4 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 1 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} + 2 \cdot 3^{a} \\ 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 3 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} : 3 \\ 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^{a} - 5 \cdot 2^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{l} -3x = 6 \\ x + y = 2 \\ x + z = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 2 - x = 4 \\ z = 4 - x = 6 \end{array}$

Solución: $(-2, 4, 6)$

b) $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 3^{a} \\ 2^{a} \\ 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} - 5 \cdot 1^{a} \\ 3^{a} - 3 \cdot 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ -2 \cdot 3^{a} + 2^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ -2y - 2z = 3 \\ 2z = 1 \end{array}\right\} \quad z = \frac{1}{2} \quad y = \frac{3 + 2z}{-2} = -2 \quad x = -y - z = \frac{3}{2}$

Solución: $\left(\frac{3}{2}, -2, \frac{1}{2}\right)$

6 Transforma en escalonados y resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 5x + 3y = -17 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -y + z = 1 \\ x - 2y - z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 7 \\ 5x + 3y = -17 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 7 \\ 5 & 3 & -17 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} + 3 \cdot 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 7 \\ 11 & 0 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x - y = 7 \\ 11x = 4 \end{array}\right\}$

$x = \frac{4}{11} \qquad y = 2x - 7 = \frac{-69}{11}$

Solución: $\left(\frac{4}{11}, \frac{-69}{11}\right)$

b) $\left.\begin{aligned} -y+z&=1\\ x-2y-z&=2\\ 3x-y+z&=3\end{aligned}\right\}\ \left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&1&1\\1&-2&-1&2\\3&-1&1&3\end{array}\right)\rightarrow \begin{array}{l}2^a\\1^a\\3^a\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-1&2\\0&-1&1&1\\3&-1&1&3\end{array}\right)\rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l}1^a\\2^a\\3^a-3\cdot 1^a\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-1&2\\0&-1&1&1\\0&5&4&-3\end{array}\right)\rightarrow \begin{array}{l}1^a\\2^a\\3^a+5\cdot 2^a\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-1&2\\0&-1&1&1\\0&0&9&2\end{array}\right)\rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{aligned} x-2y-z&=2\\ -y+z&=1\\ 9z&=2\end{aligned}\right\}\quad z=\frac{2}{9}\qquad y=z-1=\frac{-7}{9}\qquad x=2+2y+z=\frac{2}{3}$

Solución: $\left(\frac{2}{3},\ \frac{-7}{9},\ \frac{2}{9}\right)$

7 S **Resuelve:**

a) $\begin{cases} x+y-z=1\\ 3x+2y+z=1\\ 5x+3y+3z=1\end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x+4y-z=3\\ 6x-6y+2z=-16\\ x-y+2z=-6\end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} x+y-z&=1\\ 3x+2y+z&=1\\ 5x+3y+3z&=1\end{aligned}\right\}\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\3&2&1&1\\5&3&3&1\end{array}\right)\rightarrow \begin{array}{l}1^a\\2^a-3\cdot 1^a\\3^a-5\cdot 1^a\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&-1&4&-2\\0&-2&8&-4\end{array}\right)\rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l}1^a\\2^a\\3^a-2\cdot 2^a\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&-1&4&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)\rightarrow \left.\begin{aligned} x+y-z&=1\\ -y+4z&=-2\end{aligned}\right\}$

$y=4z+2$
$x=1-y+z=1-(4z+2)+z=-1-3z$
$z=\lambda$

Soluciones: $(-1-3\lambda,\ 2+4\lambda,\ \lambda)$

b) $\left.\begin{aligned} 3x+4y-z&=3\\ 6x-6y+2z&=-16\\ x-y+2z&=-6\end{aligned}\right\}\ \left(\begin{array}{ccc|c}3&4&-1&3\\6&-6&2&-16\\1&-1&2&-6\end{array}\right)\rightarrow \begin{array}{l}3^a\\2^a:2\\1^a\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-6\\3&-3&1&-8\\3&4&-1&3\end{array}\right)\rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l}1^a\\2^a-3\cdot 1^a\\3^a-3\cdot 1^a\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-6\\0&0&-5&10\\0&7&-7&21\end{array}\right)\rightarrow \begin{array}{l}1^a\\2^a:(-5)\\3^a:7\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&-6\\0&0&1&-2\\0&1&-1&3\end{array}\right)\rightarrow$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y + 2z = -6 \\ z = -2 \\ y - \ \ z = \ \ 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 3 + z = 3 - 2 = 1 \\ x = -6 + y - 2z = -6 + 1 + 4 = -1 \end{array}$$

Solución: $(-1, 1, -2)$

8 **Razona si estos sistemas tienen solución e interprétalos geométricamente:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x + 2y - \ z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} -x + 3y + 6z = 3 \\ (2/3)x - 2y - 4z = 2 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y - \ \ z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{array}\right\}$ Si dividimos la 2ª ecuación entre 2, obtenemos :

$x + 2y - z = \frac{1}{2}$, que contradice la 1ª.

El sistema es *incompatible*. Son dos planos paralelos.

b) $\left.\begin{array}{r} -x + 3y + 6z = 3 \\ (2/3)x - 2y - 4z = 2 \end{array}\right\}$ Si multiplicamos por $-\frac{2}{3}$ la 1ª ecuación, obtenemos:

$\frac{2}{3}x - 2y - 4z = -2$, que contradice la 2ª ecuación.

El sistema es *incompatible*. Son dos planos paralelos.

9 S **Resuelve, si es posible, los siguientes sistemas:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = \ \ 9 \\ x - \ y - z = -10 \\ 2x - \ y + z = \ \ 5 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = \ \ 3 \\ 2x - \ y + z = -1 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} -x + 2y - \ z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + \ y + \ z = 2 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - \ y \ \ \ \ \ = 0 \\ 4x + \ y - z = 0 \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = \ \ 9 \\ x - \ y - z = -10 \\ 2x - \ y + z = \ \ 5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -10 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ -2^a + 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 2^a + 2 \cdot 3^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + \ \ z = \ \ 9 \\ 3y + 2z = 19 \\ -7y \ \ \ \ \ \ \ \ \ = -7 \end{array}\right\}$$

$y = 1$ $\quad z = \frac{19 - 3y}{2} = 8$ $\quad x = 9 - 2y - z = -1$

Solución: $(-1, 1, 8)$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ -2^a + 2 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 - z \\ 5y = 7 - z \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{7}{5} - \dfrac{z}{5} \\ x = 3 - z - 2y = 3 - z - \dfrac{14}{5} + \dfrac{2z}{5} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3z}{5} \end{array}$

Si hacemos $z = 5\lambda$, las soluciones son: $\left(\dfrac{1}{5} - 3\lambda,\ \dfrac{7}{5} - \lambda,\ 5\lambda\right)$

c) $\left.\begin{array}{r} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 2 \cdot 3^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$

La segunda ecuación es imposible: $0x + 0y + 0z = 5$

El sistema es *incompatible.*

d) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{array}\right\}$

$y = 3x$
$z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x$
$x = \lambda$

Soluciones: $(\lambda, 3\lambda, 7\lambda)$

10 S **Resuelve por el método de Gauss:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x + 2z = 11 \\ x + y = 3 \\ y + z = 13 \\ x + y + z = 10 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + y - z - t = -1 \\ x + y + z - t = 2 \end{array}\right.$

c) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ 4x + 2y - z = 0 \\ 6x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + 2z = 11 \\ x + y = 3 \\ y + z = 13 \\ x + y + z = 10 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a \\ 4^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \\ 4^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 4^a \\ 4^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} x + 2z = 11 \\ y - 2z = -8 \\ z = 7 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = -8 + 2z = -8 + 14 = 6 \\ x = 11 - 2z = 11 - 14 = -3 \end{array}\right\}$

Solución: $(-3, 6, 7)$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + y - z - t = -1 \\ x + y + z - t = 2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\left.\begin{array}{r} x + y + z + t = 1 \\ -2y - 2t = -1 \\ z + t = 1 \\ -2t = 1 \end{array}\right\}$

$t = -\frac{1}{2} \qquad z = 1 - t = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \qquad y = \frac{2t - 1}{-2} = 1 \qquad x = 1 - y - z - t =$

Solución: $\left(-1, 1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x + y + 3z = 0 \\ 4x + 2y - z = 0 \\ 6x + 3y + 2z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} 2x + y + 3z = 0 \\ -7z = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = 0 \\ y = -2x \\ x = \lambda \end{array}\right\}$ *Soluciones:* $(\lambda, -2\lambda, 0)$

d) $$\left.\begin{array}{r} x-3y-z=-1\\ x+5y+3z=3\\ x+y+z=1\\ 3x+7y+5z=5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&-3&-1&-1\\ 1&5&3&3\\ 1&1&1&1\\ 3&7&5&5 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 3^a\\ 2^a\\ 1^a\\ 4^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\ 1&5&3&3\\ 1&-3&-1&-1\\ 3&7&5&5 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} 1^a\\ 2^a-1^a\\ 3^a-1^a\\ 4^a-3\cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\ 0&4&2&2\\ 0&-4&-2&-2\\ 0&4&2&2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a\\ 2^a:2\\ 3^a+2^a\\ 4^a-2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\ 0&2&1&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x+y+z=1\\ 2y+z=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z=1-2y\\ x=1-y-z=1-y-1+2y=y\\ y=\lambda \end{array}$$

Soluciones: $(\lambda,\ \lambda,\ 1-2\lambda)$

11 **Clasifica los siguientes sistemas en compatibles o incompatibles:**

a) $\left\{\begin{array}{r} x+y+z=3\\ x+y-z=3\\ z=0 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{r} x+y+z=3\\ 2x-y+z=2\\ x-y+z=1 \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{r} x+y+z=3\\ x+y-z=3\\ z=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y=3\\ x+y=3\\ z=0 \end{array}\right\}\ \textit{Compatible indeterminado.}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} x+y+z=3\\ 2x-y+z=2\\ x-y+z=1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&3\\ 2&-1&1&2\\ 1&-1&1&1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a\\ 2^a-2\cdot 1^a\\ 3^a-1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&3\\ 0&-3&-1&-4\\ 0&-2&0&-2 \end{array}\right) \to$$

$\to$ *Compatible determinado.*

PARA RESOLVER

12 **Estudia los siguientes sistemas y resuélvelos por el método de Gauss:**
S

a) $\left\{\begin{array}{r} x-2y-3z=1\\ x-4y-5z=1\\ -2x+2y+4z=-2 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{r} 2x-3y+z=0\\ x+2y-z=0\\ 4x+y-z=0 \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{r} x-2y-3z=1\\ x-4y-5z=1\\ -2x+2y+4z=-2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&-2&-3&1\\ 1&-4&-5&1\\ -2&2&4&-2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a\\ 2^a-1^a\\ 3^a:2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&-2&-3&1\\ 0&-2&-2&0\\ -1&1&2&-1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : (-2) \\ 3^a + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y - 3z = 1 \\ y + z = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x - 2y = 1 + 3z \\ y = -z \end{array} \to \; x = 1 + 3z + 2y = 1 + 3z - 2z = 1 +$$

Solución: $(1 + \lambda, -\lambda, \lambda)$

b) $$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \text{Sistema } \textit{compatible indeterminado.}$$

Lo resolvemos: $$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 3x \\ z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x \\ x = \lambda \end{array}$$

Soluciones: $(\lambda,\ 3\lambda,\ 7\lambda)$

Página 45

13 S **Estudia y resuelve estos sistemas por el método de Gauss:**

a) $\left\{\begin{array}{r} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{r} y + z = -1 \\ x - y = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{r} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{r} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{r} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -7 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 4 \cdot 1^a \\ 3^a + 2 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 6 & -1 & -3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right) \to \text{Sistema } \textit{compatible determinado.}$$

Lo resolvemos: $\left.\begin{array}{r}-x+y+\ \ 3z=-2\\ 6y+11z=-3\\ z=\ \ \ 0\end{array}\right\}\quad y=-\dfrac{1}{2}\quad x=y+3z+2=\dfrac{3}{2}$

Solución: $\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$

b) $\left.\begin{array}{r}y+\ \ z=-1\\ x-\ \ y\qquad=\ \ 1\\ x+2y+3z=-2\end{array}\right\}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&-1\\1&-1&0&1\\1&2&3&-2\end{array}\right)\to\begin{array}{l}2^a\\1^a\\3^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&1\\0&1&1&-1\\1&2&3&-2\end{array}\right)\to$

$\to\begin{array}{l}1^a\\2^a\\3^a-1^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&1\\0&1&1&-1\\0&3&3&-3\end{array}\right)\to\begin{array}{l}1^a\\2^a\\3^a-3\cdot 2^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$

Sistema *compatible indeterminado.* Lo resolvemos:

$\left.\begin{array}{r}x-y\qquad=\ \ 1\\ y+z=-1\end{array}\right\}\begin{array}{l}x=1+y\\ z=-1-y\\ y=\lambda\end{array}$

Soluciones: $(1+\lambda,\ \lambda,-1-\lambda)$

c) $\left.\begin{array}{r}5x+2y+3z=\ \ 4\\ 2x+2y+\ \ z=\ \ 3\\ x-2y+2z=-3\end{array}\right\}\left(\begin{array}{ccc|c}5&2&3&4\\2&2&1&3\\1&-2&2&-3\end{array}\right)\to\begin{array}{l}3^a\\2^a\\1^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&-3\\2&2&1&3\\5&2&3&4\end{array}\right)\to$

$\to\begin{array}{l}1^a\\2^a-2\cdot 1^a\\3^a-5\cdot 1^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&-3\\0&6&-3&9\\0&12&-7&19\end{array}\right)\to\begin{array}{l}1^a\\2^a:3\\3^a-2\cdot 2^a\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&-3\\0&2&-1&3\\0&0&-1&1\end{array}\right)$

Sistema *compatible determinado.* Lo resolvemos:

$\left.\begin{array}{r}x-2y+2z=-3\\ 2y-\ \ z=\ \ 3\\ -z=\ \ 1\end{array}\right\}\begin{array}{l}z=-1\\ y=\ \ 1\\ x=-3+2y-2z=1\end{array}$

Solución: $(1,1,-1)$

d) $\left.\begin{array}{r}x-\ \ y+3z-14t=0\\ 2x-2y+3z+\ \ \ \ t=0\\ 3x-3y+5z+\ \ 6t=0\end{array}\right\}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&3&-14&0\\2&-2&3&1&0\\3&-3&5&6&0\end{array}\right)\to\begin{array}{l}1^a\\2^a-2\cdot 1^a\\3^a-3\cdot 1^a\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&3&-14&0\\0&0&-3&29&0\\0&0&-4&48&0\end{array}\right)\to$

$\to\begin{array}{l}1^a\\2^a\\-4\cdot 2^a+3\cdot 3^a\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&3&-14&0\\0&0&-3&29&0\\0&0&0&28&0\end{array}\right)$

Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{aligned} x - y + 3z - 14t &= 0 \\ -3z + 29t &= 0 \\ 28t &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} t &= 0 \\ z &= 0 \\ x &= y \\ y &= \lambda \end{aligned}$$

Soluciones: $(\lambda, \lambda, 0, 0)$

14 S **Discute los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} x - y - z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{aligned} x - y - z &= k \\ x - y + 2z &= 1 \\ 2x + y + kz &= 0 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & k \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k & 0 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & k \\ 0 & 0 & 3 & 1-k \\ 0 & 3 & k+2 & -2k \end{array}\right)$$

Sistema *compatible determinado* para todo k.

b) $$\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x + 3y + z &= 0 \\ 3x + ay + 4z &= 0 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & a & 4 & 0 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & a-3 & 7 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-3 & 7 & 0 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 7 \cdot 2^a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-10 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Si $a = 10 \to$ Sistema *compatible indeterminado*
- Si $a \neq 10 \to$ Sistema *compatible determinado*

c) $$\left.\begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \\ mx + y - z &= 1 \\ 3x + 4y - 2z &= -3 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ m & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^a \\ 3^a \\ 2^a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \\ m & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^a \\ 2^a + 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \\ m+1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Compatible determinado para todo m.

d) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y+az=1 \\ 5x+3y+3z=2 \\ x+\ y-\ z=1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & a & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & a & 1 \end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1^a \\ 2^a - 5\cdot 1^a \\ 3^a - 3\cdot 1^a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & a+3 & -2 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1^a \\ 2^a \\ -2\cdot 3^a + 2^a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 2-2a & 1 \end{array}\right)$

$2-2a=0 \ \to \ a=1$

- Si $a=1 \ \to$ Sistema *incompatible*
- Si $a \neq 1 \ \to$ Sistema *compatible determinado*

15 S **Discute los siguientes sistemas y resuélvelos cuando sea posible:**

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x-y\ \ =\ 4 \\ -x+y/2=-2 \\ x+ky\ =\ 2 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} 2x+\ y-\ z=1 \\ x-2y+\ z=3 \\ 5x-5y+2z=m \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x-y\ \ =\ 4 \\ -x+y/2=-2 \\ x+ky\ =\ 2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & k & 2 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1^a \\ 2\cdot 2^a + 1^a \\ 2\cdot 3^a - 1^a \end{subarray}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k+1 & 0 \end{array}\right)$

- Si $k=-\dfrac{1}{2} \ \to$ Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

  $2x-y=4 \ \to \ \left\{\begin{array}{l} y=2x-4 \\ x=\lambda \end{array}\right.$

  Soluciones: $(\lambda,\ 2\lambda-4)$

- Si $k \neq -\dfrac{1}{2} \ \to$ Sistema *compatible determinado*.

  $\left.\begin{array}{r} 2x-\qquad y=4 \\ (2k+1)\,y=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=0 \\ x=2 \end{array}$

  Solución: $(2,\ 0)$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x+\ y-\ z=1 \\ x-2y+\ z=3 \\ 5x-5y+2z=m \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1^a \\ 2^a - 2\cdot 1^a \\ 3^a - 5\cdot 1^a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & m-15 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & m-10 \end{array}\right)$

- Si $m = 10 \;\rightarrow\;$ Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + z &= 3 \\ 5y - 3z &= -5 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & y = \frac{-5+3z}{5} = -1 + \frac{3z}{5} \\ & x = 3 + 2y - z = 3 - 2 + \frac{6z}{5} - z = 1 + \frac{z}{5} \end{aligned}$$

Haciendo $z = 5\lambda$.

Soluciones: $(1 + \lambda,\ -1 + 3\lambda,\ 5\lambda)$

- Si $m \neq 10 \;\rightarrow\;$ *Incompatible*

16 S **Resuelve por el método de Gauss el siguiente sistema e interprétalo geométricamente:**

$$\left\{\begin{aligned} x - 3y - z &= -1 \\ x + 5y + 3z &= 3 \\ x + y + z &= 1 \\ 3x + 7y + 5z &= 5 \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} x - 3y - z &= -1 \\ x + 5y + 3z &= 3 \\ x + y + z &= 1 \\ 3x + 7y + 5z &= 5 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \\ 4^a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 3 \cdot 1^a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a + 2^a \\ 4^a - 2^a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2y + z &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & z = 1 - 2y \\ & x = 1 - y - z = y \\ & y = \lambda \end{aligned}$$

Soluciones: $(\lambda,\ \lambda,\ 1 - 2\lambda)$. Son cuatro planos con una recta en común.

17 S **Resuelve cada uno de los siguientes sistemas para los valores de m que lo hacen compatible:**

a) $\left\{\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x - y &= 1 \\ 4x + 3y &= m \end{aligned}\right.$ b) $\left\{\begin{aligned} x - y - 2z &= 2 \\ 2x + y + 3z &= 1 \\ 3x + z &= 3 \\ x + 2y + 5z &= m \end{aligned}\right.$

a) $$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x - y &= 1 \\ 4x + 3y &= m \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & m \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 4 \cdot 1^a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & m - 12 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : (-5) \\ 3^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m-7 \end{array}\right)$$

- Si $m = 7 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ y = 1 \end{array}\right\} \; x = 3 - 2y = 1$$

Solución: $(1, 1)$

- Si $m \neq 7 \rightarrow$ Sistema *incompatible*

b) $$\left.\begin{array}{l} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \\ x + 2y + 5z = m \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & m \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \\ 4^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & m-2 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \\ 4^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 \end{array}\right)$$

- Si $m = -1 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado.*

$$\left.\begin{array}{r} x - y - 2z = 2 \\ 3y + 7z = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{-3 - 7z}{3} = -1 - \dfrac{7z}{3} \\ x = 2 + y + 2z = 2 - 1 - \dfrac{7z}{3} + 2z = 1 - \dfrac{z}{3} \end{array}$$

Haciendo $z = 3\lambda$:

Soluciones: $(1 - \lambda, -1 - 7\lambda, 3\lambda)$

- Si $m \neq -1 \rightarrow$ Sistema *incompatible*

18 **S** **Discute y resuelve en función del parámetro:**

a) $\begin{cases} -x + my + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x - 3z = -2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{l} -x + my + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x - 3z = -2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & m & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} -3^a \\ 2^a \\ 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & m & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & m & 4 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ -2^a \\ 3^a + 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Si $m = 1 \;\rightarrow\;$ Sistema *compatible indeterminado*

$$\left.\begin{array}{l} x \quad + 3z = 2 \\ \quad y + 4z = 4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = 2 - 3z \\ y = 4 - 4z \\ z = \lambda \end{array}\right\}$$

Soluciones: $(2 - 3\lambda,\ 4 - 4\lambda,\ \lambda)$

- Si $m \neq 1 \;\rightarrow\;$ Sistema *compatible determinado*

$$\left.\begin{array}{l} x \qquad\quad + 3z = 2 \\ \qquad\quad y + 4z = 4 \\ (m-1)y \qquad = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ z = 1 \\ x = 2 - 3z = -1 \end{array}\right\}$$

Solución: $(-1, 0, 1)$

b) $$\left.\begin{array}{l} x + \ y + \ z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + \ y + \ z = 3 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 3^a \\ 2^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & a & 5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ -2^a \\ 3^a - 2^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & a-2 & 2 \end{array}\right)$$

- Si $a = 2 \;\rightarrow\;$ Sistema *incompatible*

- Si $a \neq 2 \;\rightarrow\;$ Sistema *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + \qquad z = \ \ 0 \\ \quad\ \ y + \qquad z = -3 \\ \qquad (a-2)z = \ \ 2 \end{array}\right\}$$

$$z = \frac{2}{a-2}$$

$$y = -3 - z = -3 - \frac{2}{a-2} = \frac{4-3a}{a-2}$$

$$x = -y - z = \frac{-4+3a}{a-2} - \frac{2}{a-2} = \frac{3a-6}{a-2}$$

Solución: $\left(\dfrac{3a-6}{a-2}, \dfrac{4-3a}{a-2}, \dfrac{2}{a-2}\right)$

19 S **Discute los siguientes sistemas según los valores de α e interprétalos geométricamente:**

a) $\begin{cases} \alpha x - \ y = \qquad 1 \\ \ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \ x - \ y \qquad = \ \ 1 \\ 2x + 3y - 5z = -16 \\ \ x + \alpha y - \ z = \ \ 0 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{l} \alpha x - \ y = \qquad 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 2\alpha - 1 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow[\alpha \neq 0]{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \cdot \alpha - 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 0 & 1 - \alpha^2 & 2\alpha^2 - \alpha - 1 \end{array}\right)$$

- Si $\alpha \neq 1$, queda:

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Sistema *compatible indeterminado*. Son dos rectas coincidentes.

- Si $\alpha = -1$, queda:

$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Sistema *incompatible*. Son dos rectas paralelas.

- Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -1$ $\rightarrow$ Sistema *compatible determinado*. Son dos rectas secantes.

b) $$\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ 2x + 3y - 5z = -16 \\ x + \alpha y - z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -16 \\ 1 & \alpha & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2\cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ 0 & \alpha + 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 5\cdot 3^a - 2^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ 0 & 5\alpha & 0 & 13 \end{array}\right)$$

- Si $\alpha \neq 0$ $\rightarrow$ Sistema *compatible determinado*. Son tres planos que se cortan en un punto.
- Si $\alpha = 0$ $\rightarrow$ Sistema *incompatible*. Los planos se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a los tres.

Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ 2x + (2 + a)y + 6z = 3 \end{array}\right.$$

a) Encuentra un valor de a para el cual el sistema sea incompatible.

b) Discute si existe algún valor del parámetro a para el cual el sistema sea compatible determinado.

c) Resuelve el sistema para $a = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ 2x + (2 + a)y + 6z = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & (2 + a) & 6 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2\cdot 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a - 2 & 0 & 1 \\ 0 & a - 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a - 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a) $a = 2$

b) No existe ningún valor de a para el cual el sistema sea compatible determinado.

c) Si $a = 0$, queda:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1 \\ -2y \qquad = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -1/2 \\ x - 1 + 3z = 1 \quad \rightarrow \quad x = 2 - 3z \\ z = \lambda \end{array}$$

Soluciones: $\left(2 - 3\lambda, -\frac{1}{2}, \lambda\right)$

21 S **Considera el sistema de ecuaciones:**

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - 2y - z = 4 \\ x + 2y - 2z = -1 \\ x - z = 1 \end{array}\right.$$

a) ¿Existe una solución en la que y sea igual a 0?

b) Resuelve el sistema.

c) Interprétalo geométricamente.

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 2y - z = 4 \\ x + 2y - 2z = -1 \\ x \qquad - z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left.\begin{array}{r} x \qquad - z = 1 \\ 2y - z = -2 \end{array}\right\}$$

a) $y = 0 \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} x - z = 1 \\ -z = -2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = 2 \\ x = 1 + z = 3 \end{array}\right\}$

Solución: $(3, 0, 2)$

b) $\left.\begin{array}{l} x = 1 + z = 1 + 2y + 2 = 3 + 2y \\ z = 2y + 2 \\ y = \lambda \end{array}\right\}$

Soluciones: $(3 + 2\lambda, \lambda, 2\lambda + 2)$

c) Son tres planos que se cortan en una recta.

22 S **En cierta heladería, por una copa de la casa, dos horchatas y cuatro batidos te cobran 34 € un día. Otro día, por 4 copas de la casa y 4 horchatas te cobran 44 € y, un tercer día, te piden 26 € por una horchata y cuatro batidos. ¿Tienes motivos para pensar que alguno de los tres días te han presentado una cuenta incorrecta?**

Llamamos x al precio de una copa de la casa, y al precio de una horchata, y z al precio de un batido. Así, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+4z=34 \\ 4x+4y \quad\quad = 44 \\ y+4z=26 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+2y+4z=34 \\ x+\ y \quad\quad = 11 \\ y+4z=26 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 34 \\ 1 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 26 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 2^a \\ 1^a-2^a \\ 3^a \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 23 \\ 0 & 1 & 4 & 26 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a-2^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

El sistema es *incompatible*. Por tanto, alguno de los tres días han presentado una cuenta incorrecta.

23
S **Dos amigos invierten 20 000 € cada uno. El primero coloca una cantidad A al 4% de interés, una cantidad B al 5% y el resto al 6%. El otro invierte la misma cantidad A al 5%, la B al 6% y el resto al 4%.**

Determina las cantidades A, B y C sabiendo que el primero obtiene unos intereses de 1 050 € y el segundo de 950 €.

$$\left.\begin{array}{r} A+\quad B+\quad C=20\,000 \\ 0{,}04A+0{,}05B+0{,}06C=\quad 1\,050 \\ 0{,}05A+0{,}06B+0{,}04C=\quad 950 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} A+\ B+\ C=\ 20\,000 \\ 4A+5B+6C=105\,000 \\ 5A+6B+4C=\ 95\,000 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20\,000 \\ 4 & 5 & 6 & 105\,000 \\ 5 & 6 & 4 & 95\,000 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a-4\cdot 1^a \\ 3^a-5\cdot 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20\,000 \\ 0 & 1 & 2 & 25\,000 \\ 0 & 1 & -1 & -5\,000 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ -3^a+2^a \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20\,000 \\ 0 & 1 & 2 & 25\,000 \\ 0 & 0 & 3 & 30\,000 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} A+B+\ C=20\,000 \\ B+2C=25\,000 \\ 3C=30\,000 \end{array}\right\} \begin{array}{l} C=10\,000 \\ B=\ 5\,000 \\ A=\ 5\,000 \end{array}$$

Solución: $A = 5\,000$ €; $B = 5\,000$ €; $C = 10\,000$ €

Página 46

24
S **Una tienda ha vendido 600 ejemplares de un videojuego por un total de 6 384 €. El precio original era de 12 €, pero también ha vendido copias defectuosas con descuentos del 30% y del 40%. Sabiendo que el número de copias defectuosas vendidas fue la mitad del de copias en buen estado, calcula a cuántas copias se le aplicó el 30% de descuento.**

Llamamos x al nº de copias vendidas al precio original, 12 €; y al nº de copias vendidas con un 30% de descuento, $0{,}7 \cdot 12 = 8{,}4$ €; y z al nº de copias vendidas con un 40% de descuento, $0{,}6 \cdot 12 = 7{,}2$ €.

Así:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=600 \\ 12x+8{,}4y+7{,}2z=6\,384 \\ y+z=\dfrac{x}{2} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x+y+z=600 \\ 12x+8{,}4y+7{,}2z=6\,384 \\ x-2y-2z=0 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 12 & 8{,}4 & 7{,}2 & 6\,384 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ -2^{a} + 12 \cdot 1^{a} \\ -3^{a} + 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 3{,}6 & 4{,}8 & 816 \\ 0 & 3 & 3 & 600 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} : 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 3{,}6 & 4{,}8 & 816 \\ 0 & 1 & 1 & 200 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ 3^{a} \\ 2^{a} - 3{,}6 \cdot 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 1{,}2 & 96 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 600 \\ y + z = 200 \\ 1{,}2z = 96 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 80 \\ y = 120 \\ x = 400 \end{array}$$

Solución: El 30% de descuento se le aplicó a 120 copias.

25 S **Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 € y un total de 2 000 €. Si el número de billetes de 10 € es el doble que el número de billetes de 20 €, averigua cuántos billetes hay de cada tipo.**

Llamamos x al nº de billetes de 10 €; y al nº de billetes de 20 €; y z al nº de billetes de 50 €. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 95 \\ 10x + 20y + 50z = 2\,000 \\ x = 2y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + y + z = 95 \\ x + 2y + 5z = 200 \\ x = 2y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x + z = 95 \\ 4y + 5z = 200 \\ x = 2y \end{array}\right\}$$

$z = 95 - 3y$

$4y + 5(95 - 3y) = 200 \quad \rightarrow \quad 4y + 475 - 15y = 200 \quad \rightarrow \quad 275 = 11\,y$

$y = 25 \quad \rightarrow \quad z = 20 \quad \rightarrow \quad x = 50$

Solución: Hay 50 billetes de 10 €, 25 billetes de 20 € y 20 billetes de 50 €.

26 **Se dispone de tres cajas A, B y C con monedas de 1 euro. Se sabe que en total hay 36 euros. El número de monedas de A excede en 2 a la suma de las monedas de las otras dos cajas. Si se traslada 1 moneda de la caja B a la caja A, esta tendrá el doble de monedas que B. Averigua cuántas monedas había en cada caja.**

Llamamos x al nº de monedas que hay en la caja A, y al nº de monedas que hay en la caja B, y z al nº de monedas que hay en la caja C. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ x = y + z + 2 \\ x + 1 = 2(y - 1) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ x - y - z = 2 \\ x + 1 = 2y - 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ x - y - z = 2 \\ x - 2y = -3 \end{array}\right\}$$

Sumando las dos primeras ecuaciones: $2x = 38 \quad \rightarrow \quad x = 19$

De la 3ª ecuación $\rightarrow \quad y = \dfrac{x + 3}{2} = 11$

$z = 36 - y - x = 6$

Solución: Había 19 monedas en la caja A, 11 en la B y 6 en la C.

27 **Un especulador adquiere 3 objetos de arte por un precio total de 2 millones de euros. Vendiéndolos, espera obtener de ellos unas ganancias del 20%, del 50% y del 25%, respectivamente, con lo que su beneficio total sería de 600 000 €. Pero consigue más, pues con la venta obtiene ganancias del 80%, del 90% y del 85%, respectivamente, lo que le da un beneficio total de 1,7 millones de euros. ¿Cuánto le costó cada objeto?**

Llamamos x a lo que le costó el 1^er^ objeto (en millones de euros), y a lo que le costó el 2º objeto y z a lo que le costó el 3^er^ objeto. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 0{,}2x + 0{,}5y + 0{,}25z = 0{,}6 \\ 0{,}8x + 0{,}9y + 0{,}85z = 1{,}7 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 2x + 5y + 2{,}5z = 6 \\ 8x + 9y + 8{,}5z = 17 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2{,}5 & 6 \\ 8 & 9 & 8{,}5 & 17 \end{array}\right) \to$$

$$\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2\cdot 1^a \\ 3^a - 8\cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0{,}5 & 2 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 3^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 1 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 2y = 1 \\ y + 0{,}5z = 1 \end{array}\right\}$$

$$y = 0{,}5 \qquad z = \frac{1-y}{0{,}5} = 1 \qquad x = 2 - y - z = 0{,}5$$

Solución: El 1^er^ objeto le costó 0,5 millones de euros (500 000 €), el 2º le costó 0,5 millones de euros (500 000 €) y el 3º le costó 1 millón de euros (1 000 000 €).

28 **Una empresa dispone de 27 200 € para actividades de formación de sus cien empleados. Después de estudiar las necesidades de los empleados, se ha decidido organizar tres cursos: A, B y C. La subvención por persona para el curso A es de 400 €, para el curso B es de 160 €, y de 200 € para el C. Si la cantidad que se dedica al curso A es cinco veces mayor que la correspondiente al B, ¿cuántos empleados siguen cada curso?**

Llamamos x al nº de empleados que siguen el curso A; y al nº de empleados que siguen el curso B, y z al nº de empleados que siguen el curso C. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 100 \\ 400x + 160y + 200z = 27\,200 \\ 400x = 5\cdot 160y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + y + z = 100 \\ 10x + 4y + 5z = 680 \\ 400x = 800y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + y + z = 100 \\ 10x + 4y + 5z = 680 \\ x = 2y \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3y + z = 100 \\ 24y + 5z = 680 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z = 100 - 3y \\ 24y + 5(100 - 3y) = 680 \end{array}$$

$$24y + 500 - 15y = 680 \;\to\; 9y = 180 \;\to\; y = 20 \;\to\; z = 40;\; x = 40$$

Solución: 40 empleados siguen el curso A, 20 empleados siguen el curso B y 40 siguen el curso C.

29 S **Antonio tiene un año más que Juan y Luis uno más que Ángel. Determina la edad de los cuatro sabiendo que la edad de Luis es la suma de la tercera parte más la séptima parte de la edad de Antonio y que la edad de Ángel es la suma de la cuarta parte más la quinta parte de la edad de Juan.**

Llamamos x a la edad de Juan e y a la de Ángel. Así, la edad de cada uno es:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Antonio} & \to & x+1 \\ \text{Juan} & \to & x \\ \text{Luis} & \to & y+1 \\ \text{Ángel} & \to & y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} y+1=\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}\right)(x+1) \\ y=\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}\right)x \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} y+1=\dfrac{10}{21}\ (x+1) \\ y=\dfrac{9}{20}\,x \end{array}$$

$$\frac{9}{20}x+1=\frac{10}{21}x+\frac{10}{21} \;\to\; \frac{-11}{420}x=\frac{-11}{21} \;\to\; x=\frac{420}{21}=20;\quad y=\frac{9}{20}x=9$$

Así, la edad de cada uno será: Antonio: 21 años; Juan: 20 años; Luis: 10 años; Ángel: 9 años.

30 S **Tres amigos acuerdan jugar tres partidas de dados de forma que, cuando uno pierda, entregará a cada uno de los otros dos una cantidad igual a la que cada uno posea en ese momento. Cada uno perdió una partida, y al final cada uno tenía 24 €. ¿Cuánto tenía cada jugador al comenzar?**

Hacemos una tabla que resuma la situación:

	COMIENZO	1ª PARTIDA	2ª PARTIDA	3ª PARTIDA
1º QUE PIERDE	x	$x-y-z$	$2x-2y-2z$	$4x-4y-4z$
2º QUE PIERDE	y	$2y$	$-x+3y-z$	$-2x+6y-2z$
3º QUE PIERDE	z	$2z$	$4z$	$-x-y+7z$

$$\left.\begin{array}{r} 4x-4y-4z=24 \\ -2x+6y-2z=24 \\ -x-y+7z=24 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x-y-z=6 \\ -x+3y-z=12 \\ -x-y+7z=24 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & -1 & 12 \\ -1 & -1 & 7 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}1^a\\2^a+1^a\\3^a+1^a\end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 18 \\ 0 & -2 & 6 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}1^a\\2^a:2\\3^a:2\end{array}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & 3 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}1^a\\2^a\\3^a+2^a\end{array}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 24 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x-y-z=6 \\ y-z=9 \\ 2z=24 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} z=12 \\ y=9+z=21 \\ x=6+y+z=39 \end{array}\right\}$$

Solución: El jugador que perdió primero tenía 39 euros, el que perdió en 2º lugar tenía 21 € y el que perdió en 3er lugar tenía 12 €.

31 S **Un joyero tiene tres clases de monedas *A*, *B* y *C*. Las monedas de tipo *A* tienen 2 gramos de oro, 4 gramos de plata y 14 gramos de cobre; las de tipo *B* tienen 6 gramos de oro, 4 gramos de plata y 10 gramos de cobre, y las de tipo *C* tienen 8 gramos de oro, 6 gramos de plata y 6 gramos de cobre. ¿Cuántas monedas de cada tipo debe fundir para obtener 44 gramos de oro, 44 gramos de plata y 112 gramos de cobre?**

Llamamos x al nº de monedas que deben fundirse de tipo A, y a las de tipo B, y z a las de tipo C.

La información que tenemos acerca de la composición de las monedas es:

TIPO	ORO (g)	PLATA (g)	COBRE (g)
A	2	4	14
B	6	4	10
C	8	6	6

Por tanto: $\left.\begin{array}{r} 2x + 6y + 8z = 44 \\ 4x + 4y + 6z = 44 \\ 14x + 10y + 6z = 112 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + 3y + 4z = 22 \\ 2x + 2y + 3z = 22 \\ 7x + 5y + 3z = 56 \end{array}\right\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 22 \\ 2 & 2 & 3 & 22 \\ 7 & 5 & 3 & 56 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} - 2 \cdot 1^{a} \\ 3^{a} - 7 \cdot 1^{a} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 22 \\ 0 & -4 & -5 & -22 \\ 0 & -16 & -25 & -98 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} - 4 \cdot 2^{a} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 22 \\ 0 & 4 & 5 & 22 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y + 4z = 22 \\ 4y + 5z = 22 \\ -5z = -10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 2 \\ y = \dfrac{22 - 5z}{4} = 3 \\ x = 22 - 3y - 4z = 5 \end{array}$$

Solución: Debe fundir 5 monedas de tipo A, 3 de tipo B y 2 de tipo C.

32 S **Un fabricante produce 42 electrodomésticos. La fábrica abastece a 3 tiendas, que demandan toda la producción. En una cierta semana, la primera tienda solicitó tantas unidades como la segunda y tercera juntas, mientras que la segunda pidió un 20% más que la suma de la mitad de lo pedido por la primera más la tercera parte de lo pedido por la tercera. ¿Qué cantidad solicitó cada una?**

Llamamos x a la cantidad que solicitó la 1ª tienda, y a la que solicitó la 2ª tienda y z a la que solicitó la 3ª tienda. Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 42 \\ x = y + z \\ y = 1{,}2\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{z}{3}\right) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = 42 \\ x - y - z = 0 \\ 6y = 3{,}6x + 2{,}4z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x + y + z = 42 \\ 60y = 36x + 24z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x + y + z = 42 \\ 5y = 3x + 2z \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x - y - z = 0 \\ x + y + z = 42 \\ 3x - 5y + 2z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 42 \\ 3 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} - 1^{a} \\ 3^{a} - 3 \cdot 1^{a} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 42 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a + 2^a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & 7 & 42 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{r} x - y - z = 0 \\ y + z = 21 \\ 7z = 42 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z = 6 \\ y = 21 - z = 15 \\ x = y + z = 21 \end{array}$$

Solución: La 1ª tienda solicitó 21 electrodomésticos; la 2ª, 15; y la 3ª, 6.

UNIDAD DIDÁCTICA 2:
ALGEBRA DE MATRICES

* Las numeraciones indicadas entre páginas se refieren a las páginas del libro de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II, de segundo de bachillerato de la editorial Anaya, Andalucía, cuyos autores son J. Colera, R. García y M.J.Oliveira

Página 70

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Operaciones con matrices

1 **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, **calcula:**

a) $-2A + 3B$ **b)** $\frac{1}{2} A \cdot B$ **c)** $B \cdot (-A)$ **d)** $A \cdot A - B \cdot B$

a) $\begin{pmatrix} -23 & 4 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -17/2 & -2 \\ -11/2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 43 & -16 \\ 24 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -16 \\ 22 & -9 \end{pmatrix}$

2 **Efectúa el producto** $(-3 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$(7 \quad 7) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (7)$

3 **a) ¿Son iguales las matrices** $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **y** $B = (2 \quad 3)$**?**

b) Halla, si es posible, las matrices AB; BA; $A + B$; $A^t - B$.

a) No, A tiene dimensión 2×1 y B tiene dimensión 1×2. Para que dos matrices sean iguales, deben tener la misma dimensión y coincidir término a término.

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = (1 \quad 3)$; $A + B$ no se puede hacer, pues no tienen la misma dimensión.

$A^t - B = (2 \quad 3) - (2 \quad 3) = (0 \quad 0)$

4 Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ comprueba que:

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$

b) $(3A)^t = 3A^t$

a) $(A+B)^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^t + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (A + B)^t = A^t + B^t$

b) $(3A)^t = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$3A^t = 3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (3A)^t = 3A^t$

5 Calcula $3AA^t - 2I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

$$3A\,A^t - 2I = 3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 10 & 17 \\ 17 & 29 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 30 & 51 \\ 51 & 87 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 51 \\ 51 & 85 \end{pmatrix}$$

6 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

7 Calcula, en cada caso, la matriz B que verifica la igualdad:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow 3B = 2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Matriz inversa

8 **Comprueba que la matriz inversa de A es A^{-1}:**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot A^{-1} = I$

9 **¿Cuál es la matriz inversa de la matriz unidad?**

La matriz unidad, I.

10 **Halla la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y la de $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.**

$|A| = 2 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$|B| = -4 \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$

11 **Con las matrices A y B del ejercicio anterior y sus inversas, A^{-1} y B^{-1}, comprueba que:**

a) $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

b) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

a) $\left.\begin{array}{l} (A+B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \\ A^{-1} + B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3/4 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

b) $\left.\begin{array}{l} (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/8 & -3/8 \end{pmatrix} \\ B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/8 & -3/8 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

12 Halla la matriz inversa de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&2&0&0&1&0\\0&0&3&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow \begin{array}{l}1^a\\2^a:2\\3^a:3\end{array}\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1/2&0\\0&0&1&0&0&1/3\end{array}\right)$$

Por tanto: $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow \begin{array}{l}3^a\\2^a\\1^a\end{array}\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)$$

Por tanto: $B^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

Rango de una matriz

13 Di cuál es el rango de las matrices A y B:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&-1&0&-1\\-2&1&3&3\\0&0&3&2\end{pmatrix}$$

$ran\ (A)=3$ (ya está en forma escalonada)

$$B=\begin{pmatrix}2&-1&0&-1\\-2&1&3&3\\0&0&3&2\end{pmatrix}\rightarrow \begin{array}{l}1^a\\2^a+1^a\\3^a\end{array}\ \begin{pmatrix}2&-1&0&-1\\0&0&3&2\\0&0&3&2\end{pmatrix}\rightarrow \begin{array}{l}1^a\\2^a\\3^a-2^a\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}2&-1&0&-1\\0&0&3&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow ran\ (B)=2$$

14 Estudia el rango de estas matrices y di, en cada caso, el número de columnas que son L.I.:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\2&3&5&11\\1&-1&6&29\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&1&3\\4&2&-1\\6&3&2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&-3&-1&-1\\1&5&3&3\\1&1&1&1\\3&7&5&5\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\2&3&5&11\\1&-1&6&29\end{pmatrix}\rightarrow \begin{array}{l}1^a\\2^a-2\cdot 1^a\\3^a-1^a\end{array}\ \begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&1&3&7\\0&-2&5&27\end{pmatrix}\rightarrow \begin{array}{l}1^a\\2^a\\3^a+2\cdot 2^a\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 41 \end{pmatrix} \rightarrow \; ran\,(A) = 3$$

Hay 3 columnas linealmente independientes en A.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(B) = 2$$

Hay 2 columnas linealmente independientes en B.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \\ 4^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 3 \cdot 1^a \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \\ 4^a - 2^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \; ran\,(C) = 2$$

Hay dos columnas linealmente independientes en C.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \; ran\,(D) = 4$$

Las cuatro columnas de D son linealmente independientes.

Ecuaciones con matrices

15 S **Halla las matrices X e Y que verifican el sistema**

$$2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left. \begin{array}{l} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \text{ Sumando las dos ecuaciones, queda:}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \; X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejamos Y en la 2ª ecuación:

$$Y = X - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

16 **Calcula X tal que $X - B^2 = A \cdot B$, siendo:**
S

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$X = A \cdot B + B^2$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \\ B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

17 **Determina los valores de m para los cuales**
S
$X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifique $X^2 - \frac{5}{2}X + I = 0$.

$$X^2 - \frac{5}{2}X + I = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 - (5/2)m + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tiene que cumplirse que:

$$m^2 - \frac{5}{2}m + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad 2m^2 - 5m + 2 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad m = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} m = 2 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $m_1 = 2$; $m_2 = \frac{1}{2}$

18 **Resuelve: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$**
S

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x-y \\ 3x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2x \\ 3y-2 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x-\ \ y = 3+2x \\ 3x+2y = 3y-2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x+y=-3 \\ 3x-y=-2 \end{array}\right\}$$

Sumando: $4x = -5 \rightarrow x = \frac{-5}{4} \rightarrow y = -3 - x = -3 + \frac{5}{4} = \frac{-7}{4}$

Solución: $x = \frac{-5}{4}$; $y = \frac{-7}{4}$

Página 71

PARA PRACTICAR

19 S **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, **calcula** $A^2, A^3, \ldots, A^{128}$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I; \quad A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^{128} = A^{42 \cdot 3 + 2} = (A^3)^{42} \cdot A^2 = I^{42} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

20 S **Comprueba que** $A^2 = 2A - I$, **siendo:** $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ **e** I **la matriz unidad de orden 3.**

Utiliza esa igualdad para calcular A^4.

$$\left.\begin{array}{l} A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \\ 2A - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} A^2 = 2A - I$$

Calculamos A^4:

$$A^4 = (A^2)^2 = (2A - I)^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I^2 =$$

$$= 4(2A - I) - 4A + I = 8A - 4I - 4A + I = 4A - 3I =$$

$$= 4\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

21 S **Determina** a **y** b **de forma que la matriz** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ **verifique** $A^2 = A$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a & -2-b \\ 2a+ab & -a+b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4-a & -2-b \\ 2a+ab & -a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 4-a=2 & \rightarrow \quad a=2 \\ -2-b=-1 & \rightarrow \quad b=-1 \\ 2a+ab=a & \rightarrow \quad 4-2=2 \\ -a+b^2=b & \rightarrow \quad -2+1=-1 \end{cases}$$

Por tanto, $a = 2$ y $b = -1$.

22 S **Calcula A^n y B^n siendo:** $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1/7} & \mathbf{1/7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  Así, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

  Acabamos de comprobar que para $n = 2$ (primer caso relevante), funciona.

  Suponemos que es cierto para $n - 1$:

  $A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n-1/7 & n-1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

  $B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$

  Por tanto, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

  Igual que en el caso anterior, para $n = 2$ se cumple.

  Suponemos que es cierto para $n - 1$:

  $B^n = B^{n-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

23 S **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, **halla una matriz** B **tal que** $A \cdot B = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1}AB = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B = A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos A^{-1}: $|A| = -3$; $A^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto:

$$B = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

24
S **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, prueba que A^3 es la matriz nula.**

Demuestra después que la matriz $I + A + A^2$ es la matriz inversa de $I - A$.

☛ *Multiplica $I + A + A^2$ por $I - A$.*

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Veamos que $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$:

$$(I + A + A^2)(I - A) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 = I - A^3 = I - \mathbf{0} = I.$$

Como $(I + A + A^2) \cdot (I - A) = I$, entonces $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$.

25 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ comprueba que $(A + I)^2 = \mathbf{0}$ y expresa A^2 como combinación lineal de A e I.**

$$A + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(A + I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Expresamos A^2 como combinación lineal de A e I:

$$(A + I)^2 = \mathbf{0} \rightarrow (A + I)(A + I) = A^2 + A + A + I = A^2 + 2A + I = \mathbf{0} \rightarrow$$
$$\rightarrow A^2 = -2A - I$$

26 **a) Comprueba que la inversa de A es A^{-1}:**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriz X que verifica $XA = B$, siendo A la matriz anterior y $B = (1 \ \ -2 \ \ 3)$.

a) $A \cdot A^{-1} = I$

b) $XA = B \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \rightarrow X = B \cdot A^{-1}$

Por tanto:

$$X = (1 \ \ -2 \ \ 3)\begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -2 \end{pmatrix}$$

27 S **Determina las matrices A y B que son solución del siguiente sistema matricial:**

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por 2 la 2ª ecuación y sumando, obtenemos:

$$7A = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ -7 & 21 & 14 \\ 35 & -14 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejamos B de la 2ª ecuación:

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

28 S **Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro k:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix} \ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \ ran\,(M) = 3 \ \text{ para cualquier valor de } k.$$

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 2 \cdot 3^a - 1^a \end{matrix} \ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1+2k & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \ 1 + 2k = 0 \ \text{ si } \ k = -\frac{1}{2}$$

- *Si* $k = -\frac{1}{2}$, $ran\ (N) = 2$.
- *Si* $k \neq -\frac{1}{2}$, $ran\ (N) = 3$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \xrightarrow{\substack{1^a \\ 3^a : 4 \\ 2^a}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \end{pmatrix} \rightarrow \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$$

- *Si* $k = -2 \rightarrow ran\ (P) = 1$
- *Si* $k \neq -2 \rightarrow ran\ (P) = 2$

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix} \rightarrow \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a + 2 \cdot 1^a}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 3 & k+4 \end{pmatrix} \rightarrow \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 2^a}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

- *Si* $k = 2 \rightarrow ran\ (Q) = 2$
- *Si* $k \neq 2 \rightarrow ran\ (Q) = 3$

29 Halla el valor de k para que el rango de la matriz A sea 2.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a}} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a}} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & k-2 & 0 \end{pmatrix}$$

Para que $ran\ (A) = 2$, ha de ser $k - 2 = 0$; es decir, $k = 2$.

30 Halla X e Y sabiendo que $5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$ y $3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{array}{l} 5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -15X - 9Y = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 12 & -45 \end{pmatrix} \\ 15X + 10Y = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -10 & 45 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{ Sumando: } Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

31 **Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ halla dos números reales m y n tales que $A+mA+nI=0$.**

$$A+mA+nI=\mathbf{0} \rightarrow \begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}+m\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2+2m+n & 1+m\\ 2+2m & 3+3m+n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}2+2m+n=0 & \rightarrow \quad n=0\\ 1+\quad m \qquad =0 & \rightarrow \quad m=-1\\ 2+2m \qquad =0 & \rightarrow \quad m=-1\\ 3+3m+n=0 & \rightarrow \quad n=0\end{cases}$$

Solución: $m=-1$; $n=0$

32 **Determina, si es posible, un valor de k para que la matriz $(A-kI)^2$ sea la matriz nula, siendo:**

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$A-kI=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k & 0 & 0\\ 0 & k & 0\\ 0 & 0 & k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k & -1 & -2\\ -1 & -k & -2\\ 1 & 1 & 3-k\end{pmatrix}$$

$$(A-kI)^2=\begin{pmatrix}-k & -1 & -2\\ -1 & -k & -2\\ 1 & 1 & 3-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-k & -1 & -2\\ -1 & -k & -2\\ 1 & 1 & 3-k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k^2-1 & 2k-2 & 4k-4\\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4\\ 2-2k & 2-2k & k^2-6k+5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \rightarrow k=1$$

33 S **Una compañía de muebles fabrica butacas, mecedoras y sillas, y cada una de ellas de tres modelos: E (económico), M (medio) y L (lujo). Cada mes produce 20 modelos E, 15 M y 10 L de butacas; 12 modelos E, 8 M y 5 L de mecedoras, y 18 modelos E, 20 M y 12 L de sillas. Representa esta información en una matriz y calcula la producción de un año.**

$$\text{Cada mes:}\quad \begin{array}{l} \\ \text{BUTACAS}\\ \text{MECEDORAS}\\ \text{SILLAS}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{E} & \text{M} & \text{L}\end{array}\\ \begin{pmatrix}20 & 15 & 10\\ 12 & 8 & 5\\ 18 & 20 & 12\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\text{Cada año:}\quad 12\cdot\begin{pmatrix}20 & 15 & 10\\ 12 & 8 & 5\\ 18 & 20 & 12\end{pmatrix}=\begin{array}{l} \\ \text{BUTACAS}\\ \text{MECEDORAS}\\ \text{SILLAS}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{E} & \text{M} & \text{L}\end{array}\\ \begin{pmatrix}240 & 180 & 120\\ 144 & 96 & 60\\ 216 & 240 & 144\end{pmatrix}\end{array}$$

Página 72

34 S **En un edificio hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 grandes; las L4 tienen 5 ventanas pequeñas y 4 grandes, y las L5, 6 pequeñas y 5 grandes. Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras.**

a) Escribe una matriz que describa el número y tamaño de ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.

b) Calcula la matriz que expresa el número de cristales y de bisagras de cada tipo de vivienda.

a) $\begin{array}{c} \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array};\quad \begin{array}{c} \\ P \\ G \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} C & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$

b) $\begin{array}{c} \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ P \\ G \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} C & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} C & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20 & 34 \\ 26 & 44 \\ 32 & 54 \end{pmatrix} \end{array}$

35 S **Un industrial fabrica dos tipos de bombillas: transparentes (T) y opacas (O). De cada tipo se hacen cuatro modelos: M_1, M_2, M_3 y M_4.**

$\begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array}$ **Esta tabla muestra la producción semanal de bombillas de cada tipo y modelo.**

El porcentaje de bombillas defectuosas es el 2% en el modelo M_1, el 5% en el M_2, el 8% en el M_3 y el 10% en el M_4.

Calcula la matriz que expresa el número de bombillas transparentes y opacas, buenas y defectuosas, que se producen.

$\begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}05 & 0{,}08 & 0{,}1 \\ 0{,}98 & 0{,}95 & 0{,}92 & 0{,}9 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 96 & 60{,}9 \\ 1\,354 & 869{,}1 \end{pmatrix} \end{array} \approx \begin{array}{c} \\ D \\ B \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 96 & 61 \\ 1\,354 & 869 \end{pmatrix} \end{array}$

36 **Escribe en forma matricial y resuelve, si es posible, utilizando la matriz inversa:**

a) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + z = 510 \\ y = -234 \\ y + z = 257 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x-2y=1 \\ x+\ y=7 \end{array}\right\}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}}_{B}$

Calculamos la inversa de A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \cdot 3 + 2^a \cdot 2 \\ 2^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \begin{array}{l} 1^a : 3 \\ 2^a : 3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \to \textit{Solución: } x = 5,\ y = 2$$

b) $\left.\begin{array}{l} x \quad + z = 510 \\ \quad y \quad = -234 \\ \quad y + z = 254 \end{array}\right\}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 510 \\ -234 \\ 254 \end{pmatrix}}_{B}$

Calculamos la inversa de A:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} 1^a - 3^a \\ 2^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 510 \\ -234 \\ 254 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -234 \\ 488 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 22,\ y = -234,\ z = 488$

37 Escribe en la forma habitual los sistemas:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 2 \\ x + 5y = 0 \\ 7y = 1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x + 5y - 3z = 1 \\ 2x + \ y + 5z = -1 \end{array}\right\}$

38 S **Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible:**

a) Una matriz X tal que $XA = (1 \quad 0 \quad -1)$.

b) Una matriz Y tal que $YA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculamos la inversa de A:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 6 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 12 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 5 \cdot 2^a + 2 \cdot 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a + 2 \cdot 3^a \\ 2^a - 5 \cdot 3^a \\ 3^a \cdot (-1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 5 & 10 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -12 & -24 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : (-2) \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 5 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a - 2^a \\ 2^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right). \text{ Por tanto, } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

a) $X = (1 \quad 0 \quad -1) \cdot A^{-1} = (1 \quad 3 \quad 1)$

b) $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -3 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}$

39 S **Calcula los valores de x para que la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ verifique la ecuaci**
$A^2 - 6A + 9I = 0$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 6A + 9I = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 6x + 9 & 0 \\ 0 & x^2 - 6x + 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x-3)^2 = 0 \rightarrow x = 3$$

40 S **Resuelve la ecuación matricial** $2A = AX + B$ **siendo** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculamos la inversa de A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación:

$$2A + AX + B = 0 \rightarrow AX = -B - 2A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

41 S **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ **halla el valor de** x **e** y **para que se cumpla la igualdad** $A^2 - xA - yI = 0$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - xA - yI = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2x-y & 9-3x \\ -6+2x & -5-x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{lll} -2-2x-y = 0 & \rightarrow & y = -2-2x = -8 \\ 9-3x = 0 & \rightarrow & x = 3 \\ -6+2x = 0 & \rightarrow & x = 3 \\ -5-x-y = 0 & \rightarrow & y = -5-x = -8 \end{array}\right\}$$

Solución: $x = 3$, $y = -8$

42 S **Dada** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Calcula $A + A^2$

b) Resuelve el sistema $A^5\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/10 & 1 & 0 \\ 2/10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/10 & 1 & 0 \\ 2/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3/10 & 2 & 0 \\ 3/10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/10 & 1 & 0 \\ 2/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/10 & 1 & 0 \\ 3/10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^5 = A^2 \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/10 & 1 & 0 \\ 2/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/10 & 1 & 0 \\ 3/10 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos la inversa de A^5:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \cdot 2 - 1^a \\ 3^a \cdot 2 - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a : 2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow (A^5)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 20, \; y = -5, \; z = -9$

43 S **Sean las matrices** $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

a) Sabiendo que $A \cdot B + C = 3D$, plantea un sistema de ecuaciones para determinar x, y, z.

b) Encuentra, si es posible, una solución.

a) $A \cdot B + C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \\ -x+y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x-y+2z \\ -x+y-z \end{pmatrix}$

$3D = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Igualamos:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 1 \end{array}\right\} \text{ En forma matricial: } \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{M} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{N}$$

b) Intentamos resolver el sistema en forma matricial. Para ello, calculamos la inversa de M:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a - 2\cdot 1^a \\ 3^a + 1^a}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a + (3/2)\cdot 3^a \\ 3^a}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Luego, la matriz M no tiene inversa.

Como $ran\,(M) = 2$ y se nos anula la segunda ecuación, tomamos las otras dos para resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ -x + y - z = 1 \end{array}\right\} \; (1^a + 2^a) \;\to\; \begin{array}{l} 2y = 4 \;\to\; y = 2 \\ x = 3 - y - z = 1 - z \end{array}$$

Solución: $(1 - \lambda, 2, \lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

44 S **Calcula una matriz X que conmuta con la matriz A, esto es, $A \cdot X = X \cdot A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, y calcula $A^2 + 2A^{-1} \cdot X$.**

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \left.\begin{cases} A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \\ X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \end{cases}\right\} \text{han de ser iguales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} a + c = a \\ b + d = a + b \\ d = c + d \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} c = 0 \\ d = a \\ c = 0 \end{array}\right\} \; X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

$$A^2 + 2A^{-1} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 2a & 2 + 2b - 2a \\ 0 & 1 + 2a \end{pmatrix}$$

(Observamos que la matriz que hemos obtenido también es de las que conmutan con A).

45 S **Sean A y B las matrices dadas por:**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentra las condiciones que deben cumplir los coeficientes a, b, c para que se verifique $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que $A \cdot B = B \cdot A$, debe cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l} 5a+2c = 5a+2b \\ 5b+2c = 2a+5b \\ 2a+5c = 7c \\ 2b+5c = 7c \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} c = b \\ c = a \\ 7c = 7c \\ 7c = 7c \end{array}\right\} \; a = b = c$$

46 S **Dada la matriz:** $A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ **prueba que se verifica** $A^3 + I = 0$ **y utiliza esta igualdad para obtener** A^{10}**.**

☛ *Haz* $A^{10} = (A^3)^3 \cdot A$ *y ten en cuenta que* $A^3 = -I$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}; \; A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; A^3 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos A^{10} (teniendo en cuenta que $A^3 + I = 0 \;\rightarrow\; A^3 = -I$):

$$A^{10} = (A^3)^3 \cdot A = (-I)^3 \cdot A = -I \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Página 73

47 S **Una matriz cuadrada se llama *ortogonal* cuando su inversa coincide con su traspuesta.**

Calcula x **e** y **para que esta matriz** A **sea ortogonal:** $A = \begin{pmatrix} \mathbf{3/5} & x & \mathbf{0} \\ y & \mathbf{-3/5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

☛ *Haz* $A \cdot A^t = I$.

Si $A^{-1} = A^t$, ha de ser $A \cdot A^t = I$, entonces:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & y & 0 \\ x & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/25 + x^2 & 3/5y - 3/5x & 0 \\ 3/5y - 3/5x & y^2 + 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{9}{25} + x^2 &= 1 \\ \frac{3}{5}y - \frac{3}{5}x &= 0 \\ y^2 + \frac{9}{25} &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{16}{25} \\ y &= x \\ y^2 &= \frac{16}{25} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x &= \pm\frac{4}{5} \\ y &= x \end{aligned}\right\}$$

Hay dos soluciones: $x_1 = \frac{4}{5};\ y_1 = \frac{4}{5} \qquad x_2 = -\frac{4}{5};\ y_2 = -\frac{4}{5}$

48 S **Resuelve la ecuación matricial:** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{4} \\ \mathbf{22} & \mathbf{14} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$

UNIDAD DIDÁCTICA 3:
RESOLUCIÓN DE SISTEMAS MEDIANTE DETERMINANTES

* Las numeraciones indicadas entre páginas se refieren a las páginas del libro de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II, de segundo de bachillerato de la editorial Anaya, Andalucía, cuyos autores son J. Colera, R. García y M.J.Oliveira

Página 98

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 7$, justifica las siguientes igualdades, citando en cada caso las propiedades que has aplicado:**

a) $\begin{vmatrix} a-b & b \\ c-d & d \end{vmatrix} = 7$

b) $\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 3c & 2d \end{vmatrix} = 42$

c) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -7$

d) $\begin{vmatrix} a & b \\ a-2c & b-2d \end{vmatrix} = -14$

a) Propiedad 8: si a una columna de una matriz se le suma la otra columna multiplicada por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

b) Propiedad 5: si multiplicamos cada elemento de una columna por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

c) Propiedad 3: si permutamos las dos columnas, el determinante cambia de signo.

d) Propiedad 7: si una fila es suma de dos, el determinante puede descomponerse en suma de dos determinantes.

2
S **Si $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$, ¿cuál es el valor de cada uno de estos determinantes? Justifica las respuestas:**

a) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} -\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -(-5) = 5$

c) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix} \underset{(4)}{=} -3\begin{vmatrix} n & m \\ q & p \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} 3\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) = -15$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} \underset{(4)}{=} 2\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 2\begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} -2\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -2 \cdot (-5) = 10$

e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix} \underset{(4)}{=} \dfrac{1}{m} \cdot m\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

(1) Si a una fila le sumamos otra multiplicada por un número, el determinante no varía.

(2) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

(3) Si cambiamos de orden dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo.

(4) Si multiplicamos una fila o una columna por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

3 **Sustituye los puntos suspensivos por los números adecuados para que se verifiquen las siguientes igualdades:**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & 7 \\ \cdots & -3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -10 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

4 **Resuelve estas ecuaciones:**
S

a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 12$ **b)** $\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$

a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 12$

$\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = (1+x)^2 - (1-x)^2 = 1 + x^2 + 2x - (1 + x^2 - 2x) =$

$= 1 + x^2 + 2x - 1 - x^2 + 2x = 4x = 12 \quad \rightarrow \quad x = 3$

b) $\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = x^2 \cdot (x-2) - x(1-2x) = x^3 - 2x^2 - x + 2x^2 = x^3 - x =$

$= x(x^2-1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

5 Calcula el valor de estos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -25$ d) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 10$

6 ¿Qué valor de a anula estos determinantes?

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -3 + 5 + 4 - 5 + 3 - 4a = 4 - 4a = 0 \rightarrow a = 1$

b) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(a-1) + (a-1)(a+6) - 6(a-1) = (a-1)[3 + a + 6 - 6] =$

$= (a-1)(3+a) = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -3 \end{cases}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 4a^2 + 4 - 4 - 12 = 4a^2 - 12 = 0 \rightarrow a^2 = 3 \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ a = -\sqrt{3} \end{cases}$

d) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 4(a+1) + a + a - 2 - a^2(a+1) - 2 =$

$= 4a + 4 + 2a - 2 - a^3 - a^2 \cdot 2 = -a^3 - a^2 + 6a = -a(a^2 + a - 6) = 0 \rightarrow$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a^2 + a - 6 = 0 \ \rightarrow \ a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} a = 2 \\ a = -3 \end{cases} \end{cases}$$

7 Calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -72$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -18$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix} = 938$

8 Calcula la matriz inversa de las siguientes matrices y comprueba el resultado:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

a) $|A| = 1 \neq 0 \ \rightarrow$ existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

b) $|B| = 10 \neq 0 \ \rightarrow$ existe B^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(B) \longrightarrow (Adj\,(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

c) $|C| = 3 \neq 0 \ \rightarrow$ existe C^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(C) \longrightarrow (Adj\,(C))^t \longrightarrow \frac{1}{|C|}(Adj\,(C))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = C^{-1}$$

d) $|D| = -10 \neq 0 \rightarrow$ existe D^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(D) \longrightarrow (Adj\,(D))^t \longrightarrow \frac{1}{|D|}(Adj\,(D))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = D^{-1}$$

9 **Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales:**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $X \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = (1 \quad 2)$

a) Llamamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, de manera que tenemos:

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Calculamos A^{-1}:

$$|A| = -3 \neq 0 \rightarrow \text{existe } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos $A^{-1} \cdot B$:

$$\frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La solución es: $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) Llamamos $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = (1 \quad 2)$, de manera que:

$$X \cdot A = B \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \rightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

$$|A| = 1 \neq 0 \rightarrow \text{existe } A^{-1}$$

Calculamos A^{-1}:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos $B \cdot A^{-1}$:

$$(1 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (6 \quad -7)$$

La solución es: $X = (6 \quad -7)$

10 Estudia el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) El rango es 3 ya que el determinante $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0.$

b) 4ª fila = 2ª fila − 1ª fila

3ª fila = 1ª fila + 2ª fila

Por tanto: $ran \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = ran \begin{pmatrix} 1 & -12 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow$ El rango es 2

11 Resuelve aplicando la regla de Cramer:

a) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \\ -x - y + z = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ x - y - t = 2 \\ z - t = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{array}\right\} A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{matrix} \right.\right) \rightarrow |A| = 1 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-1}{1} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-5}{1} = -5;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{7}{1} = 7$$

Solución: $x = -1, \ y = -5, \ z = 7$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \\ -x - y + z = -3 \end{array}\right\} \ A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{matrix} \end{array}\right) \rightarrow \ |A| = -11 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{11}{-11} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{-22}{-11} = 2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{22}{-11} = -2$$

Solución: $x = -1, \ y = 2, \ z = -2$

c) $\left.\begin{array}{r} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \end{array}\right\} \ |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -6$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2; \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Por tanto: $x = \frac{-1}{3}, \ y = \frac{2}{3}, \ z = \frac{-1}{3}$

d) $\left.\begin{array}{r} x + y - z + t = 1 \\ x - y \quad\quad - t = 2 \\ z - t = 0 \end{array}\right\} \ A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right)$. Tenemos que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-t & 1 & -1 \\ 2+t & -1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3-t}{-2} = \frac{3+t}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-t & -1 \\ 1 & 2+t & 0 \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1+t}{-2} = \frac{-1-t}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & -1 & 2+t \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2t}{-2} = t. \quad \textit{Soluciones:} \left(\frac{3+\lambda}{2}, \frac{-1-\lambda}{2}, \lambda, \lambda\right)$$

Página 99

12
S
Estudia la compatibilidad de estos sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -5 \end{array}\right)$ (con A la matriz de coeficientes). Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ y $|A'| = 0$,

tenemos que: $ran\,(A) = ran\,(A') = n^{\underline{o}}\ \textit{incógnitas} = 2$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la tercera ecuación:

$\left.\begin{array}{l} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} \text{Sumando: } 5x = 5 \quad \rightarrow \quad x = 1 \\ y = -1 - 4x = -1 - 4 = -5 \end{array}\right\}$ *Solución:* $(1, -5)$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right)$.

Tenemos que $|A| = 0$ y que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = 2$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow ran\,(A') = 2 \neq ran\,(A) = 2$

Por tanto, el sistema es *incompatible*.

13
S
Calcula la inversa de las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1}

$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;\to\; \text{Existe } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(B) \longrightarrow (Adj\,(B))^t \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

PARA RESOLVER

14 Justifica, sin desarrollar, que estos determinantes son cero:

a) $\begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$

a) La 1ª y la 3ª columnas son proporcionales (la 3ª es –5 por la 1ª).

b) Sumamos la 3ª fila a la 2ª:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} =$$

$$= 5(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = 0 \;\; \text{(pues tiene dos filas iguales).}$$

15 Prueba, sin desarrollar, que $|A|$ es múltiplo de 3 y $|B|$ es múltiplo de 5:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 12 \\ 8 & 2 & 15 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \;\to\; \text{Es múltiplo de 3.}$$

(1) Sumamos a la 3ª columna las otras dos.

(2) Si una columna se multiplica por un número, el determinante queda multipicado por ese número.

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 10 & 10 & 15 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 5 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \;\to\; \text{Es múltiplo de 5.}$$

(3) Sumamos a la 3ª fila la 2ª.

16 **¿Para qué valores de a se anula este determinante?** $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \\ 4^a + 1^a \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -5 & 4 \\ a+1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 \\ a+1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -[8(a+1) - 30 + 6] = -[8a + 8 - 30 + 6] = -(8a - 16) = 0 \quad \to \quad a = 2$$

17 S **Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro que aparece en ellas:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 6 + 4 - a = a - 2 = 0 \quad \to \quad a = 2$$

- **Si $a = 2$** $\to$ Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \to \quad ran\ (A) = 2$
- **Si $a \neq 2$** $\to$ $|A| \neq 0 \quad \to \quad ran\ (A) = 3$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - a^2 - 12 - 9a + 8 + 2a = -a^2 - 7a + 8 = 0 \quad \to$$

$$\to \quad a = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{-2} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{-2} = \frac{7 \pm 9}{-2} \begin{cases} a = -8 \\ a = 1 \end{cases}$$

Observamos que $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \quad \to \quad ran\ (B) \geq 2$

Por tanto:

- **Si $a = 1$** $\to$ $|B| = 0 \quad \to \quad ran\ (B) = 2$
- **Si $a = -8$** $\to$ $|B| = 0 \quad \to \quad ran\ (B) = 2$
- **Si $a \neq 1$ y $a \neq -8$** $\to$ $|B| \neq 0 \quad \to \quad ran\ (B) = 3$

18 **Estudia y resuelve estos sistemas homogéneos:**

a) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 9x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ 12x-3y-2z=0 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ x-2y+z=0 \\ 12x-3y-2z=0 \end{array}\right\}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 12 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

Como $|A|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, entonces, $ran\ (A)=2$.

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 3ª ecuación y pasar la z al 2º miembro:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=z \\ x-2y=-z \end{array}\right\} \quad x=\frac{\begin{vmatrix} z & 1 \\ -z & -2 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{-z}{-3}=\frac{z}{3}; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{-3}=\frac{-2z}{-3}=\frac{2z}{3}$$

Soluciones: $\left(\frac{\lambda}{3}, \frac{2\lambda}{3}, \lambda\right)$

b) $\left.\begin{array}{r} 9x+3y+2z=0 \\ 3x-y+z=0 \\ 8x+y+4z=0 \\ x+2y-2z=0 \end{array}\right\}$ $A=\begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -35 \neq 0$, entonces: $ran\ (A) = 3 =$ *nº incógnitas.*

El sistema solo tiene la solución trivial: $x=0$, $y=0$, $z=0$

19 Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z-t=0 \\ 2x+y-z+2t=0 \\ 3x+2y+t=0 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x+y=0 \\ x+z=0 \\ x+t=0 \\ y+z+t=0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x+y+z-t=0 \\ 2x+y-z+2t=0 \\ 3x+2y+t=0 \end{array}\right\}$

Observamos que la 3ª ecuación es la suma de las dos primeras, por lo tanto la eliminamos. El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z-t=0 \\ 2x+y-z+2t=0 \end{array}\right\}$$

Pasamos al segundo miembro dos de las incógnitas para resolverlo por Cramer, teniendo que ser el determinante de la matriz de los coeficientes que quedan en el primer miembro no nulo:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=-z+\;\;t \\ 2x+y=\;\;z-2t \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Aplicamos la regla de Cramer:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -z+t & 1 \\ z-2t & 1 \end{vmatrix} = -2z+3t; \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -z+t \\ 1 & z-2t \end{vmatrix} = 3z-4t$$

Solución: $x = 2\lambda - 3\mu,\;\; y = -3\lambda + 4\mu,\;\; z = \lambda,\;\; t = \mu$

b) $\left.\begin{array}{l} x+y\qquad\quad\;\, = 0 \\ x\quad\;\; + z\quad\;\; = 0 \\ x\qquad\quad + t = 0 \\ \quad\;\; y+z+t = 0 \end{array}\right\}$

Se trata de un sistema homogéneo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 4 = n^{\underline{o}} \textit{ de incógnitas}$$

El sistema solo tiene la solución trivial, $x = 0,\;\; y = 0,\;\; z = 0,\;\; t = 0.$

20 Encuentra el valor de a para que este sistema sea compatible: $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x+2y=1 \\ ax+\;\;y=3 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=5 \\ x+2y=1 \\ ax+\;\;y=3 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 3 \end{array}\right); \quad |A'| = 6-7a = 0 \;\rightarrow\; a = \frac{6}{7}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Si $a = \frac{6}{7}$, $ran\,(A) = ran\,(A') \;\rightarrow\;$ Sistema *compatible.*

Si $a \neq \frac{6}{7}$, $ran\,(A) \neq ran\,(A') \;\rightarrow\;$ Sistema *incompatible.*

21 Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

a) $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+3y-\;\;z=-1 \\ x-\;\;y-\;\;z=-1 \\ 2x+\;\;y+3z=\;\;5 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x-y=2 \\ 2x-y=0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\;\; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\;\; C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; A \cdot X = C \;\rightarrow\; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot C$$

Calculamos A^{-1}:

$|A| = 1 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es: $x = -2,\ y = -4$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 3y - z = -1 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot X = C \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C \rightarrow$$

$$\rightarrow X = A^{-1} \cdot C$$

Calculamos A^{-1}:

$|A| = -20 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 10 & 5 & -5 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -5 & 3 \\ -10 & 5 & 5 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -10 & -4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{-20}\begin{pmatrix} -2 & -10 & -4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$X = \frac{1}{-20} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -10 & -4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{-20} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -28 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es: $x = \frac{2}{5},\ y = 0,\ z = \frac{7}{5}$

22 Estudia y resuelve los siguientes sistemas:

a) $\left\{\begin{array}{l} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x \quad\ + z = 3 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ y + z = -1 \\ 2x + 3y = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x \quad + z = 3 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$, con A la matriz de coeficientes.

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, tenemos que $ran\ (A) = 2$.

Además, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Luego, $ran\ (A') = 2 = ran\ (A) <$ *nº incógnitas.*

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la primera ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + 3z = 1 \\ 3x \quad + z = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x + y = 1 - 3z \\ 3x \quad = 3 - z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{3 - z}{3} = 1 - \dfrac{z}{3} \\ y = 1 - 3z - 2x = -1 - \dfrac{7z}{3} \end{array}\right\} \text{Hacemos } z = 3\lambda$$

Soluciones: $x = 1 - \lambda,\ \ y = -1 - 7\lambda,\ \ z = 3\lambda$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ y + z = -1 \\ 2x + 3y \quad = 0 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$, con A la matriz de coeficientes.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ y $|A'| = 0$,

tenemos que: $ran\ (A) = ran\ (A') =$ *nº incógnitas* $= 3$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la cuarta ecuación. Aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{15}{5} = 3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-10}{5} = -2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Solución: $x = 3,\ \ y = -2,\ \ z = 1$

23
S

Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m:

a) $\begin{cases} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = m - 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & m & 2 \end{array}\right)$, $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}$

$$|A| = m^2 - 1 = 0 \left\langle \begin{array}{l} m = 1 \\ m = -1 \end{array} \right.$$

- **Si $m = 1$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \text{Contradictorias} \rightarrow \text{Sistema } \textit{incompatible}.$$

- **Si $m = -1$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad \text{Contradictorias} \rightarrow \text{Sistema } \textit{incompatible}.$$

- **Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 3. Sistema *compatible determinado*.

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = m - 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m - 1 \\ 2 & 1 & m & m \\ 1 & m & 1 & 1 \end{array}\right)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$

$$|A| = -m^2 + 3m - 2 = 0 \rightarrow m = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \left\langle \begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \end{array} \right.$$

- **Si $m = 1$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{Contradictorias} \rightarrow \text{El sistema es } \textit{incompatible}.$$

• **Si $m = 2$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ con A la parte izquierda. Las columnas 1ª, 3ª y 4ª son iguales.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \;\to\; ran\,(A') = ran\,(A) = 2 <$ *nº incógnitas*

El sistema es *compatible indeterminado*.

• **Si $m \neq 1$ y $m \neq 2$** $\to$ $ran\,(A) = ran\,(A') =$ *nº incógnitas* $= 3$. Sistema *compatible determinado*.

c) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$ con A la parte izquierda.

$|A| = -2m + 2 = 0 \;\to\; m = 1$

• **Si $m = 1$**, queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$,

entonces: $ran\,(A) = 2 \neq ran\,(A') = 3$. Sistema *incompatible*.

• **Si $m \neq 1$**, queda: $ran\,(A) = ran\,(A') =$ *nº incógnitas* $= 3$. Sistema *compatible determinado*.

d) $\left.\begin{array}{r} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$ con A la parte izquierda.

$|A| = m^2 - 4m + 3 = 0 \;\to\; m = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2}$ $\begin{array}{l} m = 3 \\ m = 1 \end{array}$

• **Si $m = 3$**, queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$ Contradictorias $\to$ Sistema *incompatible*.

• **Si $m = 1$**, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right).$$ La 1ª y la 3ª fila son iguales.

Además $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Luego, $ran\ (A) = ran\ (A') = 2 <$ *nº incógnitas.*

El sistema es *compatible indeterminado.*

- **Si $m \neq 3$ y $m \neq 1$** $\rightarrow$ $ran\ (A) = ran\ (A') =$ *nº incógnitas* $= 3$. Sistema *compatible determinado.*

24 **S** **Discute los siguientes sistemas homogéneos en función del parámetro a:**

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & -a \end{pmatrix}$

Como es homogéneo, sabemos que $ran\ (A) = ran\ (A')$.

$$|A| = -5a - 25 = 0 \ \rightarrow\ a = -5$$

- **Si $a = -5$** $\rightarrow$ Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ $\rightarrow$ $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado.*

- **Si $a \neq -5$** $\rightarrow$ Solo tiene la solución trivial $(0, 0, 0)$.

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{array}\right\}$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$

Como es homogéneo, sabemos que $ran\ (A) = ran\ (A')$.

$$|A| = -a^2 - a + 6 = 0 \ \rightarrow\ a = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2} \begin{cases} a = -3 \\ a = 2 \end{cases}$$

- **Si $a = -3$ o $a = 2$** $\rightarrow$ Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ $\rightarrow$ $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado.*

- **Si $a \neq -3$ y $a \neq 2$** $\rightarrow$ $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$. Solo existe la solución trivial $(0, 0, 0)$.

Página 100

25 S **a) Considera la matriz** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **y calcula el rango de las matrices** AA^t **y** A^tA.

b) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es A^tA.

c) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es AA^t.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \textit{rango} = 2$$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \textit{rango} = 2$$

b) Como el rango es 2, seleccionamos el menor

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Podemos suprimir la tercera ecuación y pasar la z al segundo miembro:

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 2y = -z \\ 2x + \ \ y = -z \end{array}\right\} \rightarrow x = z, \ \ y = -3z$$

La solución es: $x = \lambda, \ \ y = -3\lambda, \ \ z = \lambda$

c) Como el rango = 2 = *nº de incógnitas*

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0, \ \ y = 0$

26 S **Dadas** $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Halla A^{-1} **y** B^{-1}.

b) Halla la matriz inversa de $A \cdot B$.

c) Comprueba que $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

a) $|A| = 2 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$|B| = 2 \neq 0 \rightarrow$ Existe B^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(B) \longrightarrow (Adj(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 2 \\ -2 & 6 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$; $|A \cdot B| = 4 \neq 0 \rightarrow$ Existe $(A \cdot B)^{-1}$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(AB) \longrightarrow (Adj(AB))^t \longrightarrow \frac{1}{|AB|}(Adj(AB))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -8 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix} = (AB)^{-1}$$

c) $B^{-1} \cdot A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (A \cdot B)^{-1}$

27
S **Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determina la matriz B que verifica $B - I = A^tA^{-1}$.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos A^{-1}:

$|A| = 4 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos $A^t \cdot A^{-1}$:

$$A^t \cdot A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|B| = A^t \cdot A^{-1} + I$$

$$B = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 4 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

28 S **Discute el siguiente sistema y resuélvelo, si es posible, en el caso $a = 4$**

$$\begin{cases} x - y = a \\ x + a^2 z = 2a + 1 \\ x - y + a(a-1)z = 2a \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x - y = a \\ x + a^2 z = 2a + 1 \\ x - y + a(a-1)z = 2a \end{array}\right\}$$

Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & -1 & a(a-1) \end{pmatrix}$$

$$|A| = a(a-1) \rightarrow |A| = 0 \rightarrow a = 0, \; a = 1$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, $ran(A) = 3 = ran(A')$.

  El sistema es *compatible determinado*. Son solución:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 2a+1 & 0 & a^2 \\ 2a & -1 & a(a-1) \end{vmatrix} = a \cdot (a^2 - a - 1)$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 2a+1 & a^2 \\ 1 & 2a & a(a-1) \end{vmatrix} = -a$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 2a \end{vmatrix} = a$$

La solución es: $x = \dfrac{a^2 - a - 1}{a - 1}$, $y = \dfrac{-1}{a-1}$, $z = \dfrac{1}{a-1}$

- Si $a = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(A) = 2$

  $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado*.

  Para resolverlo, tomamos las dos primeras ecuaciones:

  $$\left.\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x \quad\;\; = 1 \end{array}\right\}$$

  Solución: $x = 1, \; y = 1, \; z = \lambda$

- Si $a = 1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(A) = 2$

  $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(A') = 3$

  El sistema es *incompatible*.

- Si $a = 4$, se trata de un sistema *compatible determinado*, resuelto en el primer caso, con solución:

  $$x \frac{11}{3}, \quad y = \frac{-1}{3}, \quad z = \frac{1}{3}$$

29
S **Sea $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$**

a) Halla los valores de x para los que A tiene inversa.

b) Calcula, si es posible, A^{-1} para $x = 2$.

a) Existe A^{-1} solo cuando $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = x \neq 0 \;\text{ si }\; x \neq 0$$

Luego, existe A^{-1} para todo $x \neq 0$.

b) Para $x = 2$, tenemos que $|A| = 2 \neq 0$, luego existe A^{-1} en este caso. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

30 S **Dadas las matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$$

halla la matriz X que verifica $AB + CX = D$.

$AB + CX = D \;\to\; CX = D - AB \;\to\; X = C^{-1} \cdot (D - AB)$

- Calculamos C^{-1} ($|C| = -2 \neq 0 \;\to\;$ existe C^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(C) \longrightarrow (Adj\,(C))^t \longrightarrow \frac{1}{|C|}(Adj\,(C))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = C^{-1}$$

- Calculamos $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

- Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

31 S **Halla X tal que $3AX = B$, siendo:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$3AX = B \;\to\; X = \dfrac{1}{3} A^{-1} \cdot B$

Calculamos A^{-1} ($|A| = -1 \neq 0 \;\to\;$ existe A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

32 S **Resuelve la ecuación $A\,X\,B = C$ siendo:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

☛ ***Multiplica C por A^{-1} por la izquierda y por B^{-1} por la derecha.***

$AXB = C \;\rightarrow\; A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

Calculamos A^{-1} y B^{-1} ($|A| = 1$ y $|B| = 1 \;\rightarrow\;$ existen A^{-1} y B^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(B) \longrightarrow (Adj\,(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Por tanto:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

33 S **Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, halla una matriz X tal que $A\,X\,A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.**

☛ ***Multiplica dos veces por A^{-1}, una vez por la izquierda y otra por la derecha.***

Calculamos A^{-1} ($|A| = 1 \neq 0 \;\rightarrow\;$ existe A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

34 S **Determina si las siguientes ecuaciones tienen solución y hállala si es posible:**

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

a) $\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$

Como $|A| = 0$, no existe A^{-1}. La ecuación *no* tiene solución.

b) $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{B}$

Como $|A| = 4 \neq 0$, existe A^{-1} y la ecuación tiene solución.

$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$. Hallamos A^{-1}:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -6 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Luego:

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 5/4 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

35 Resuelve la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

☞ *Como* $AX + B = C \rightarrow X = A^{-1}(C - B)$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B}$$ Calculamos A^{-1} ($|A| = 16 \neq 0 \rightarrow$ existe A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 7 & 2 \\ -5 & -9 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \\ -5 & 9 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 16 \\ -16 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; es decir: $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$

36 Resuelve la ecuación:

$$X\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$X \cdot A - B = C \rightarrow X \cdot A = C + B \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = (C + B) \cdot A^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow X = (C + B) \cdot A^{-1}$$

$$C + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

Calculamos A^{-1}:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 24 & 3 & -10 \\ 5 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 24 & -3 & -10 \\ -5 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 & -14 & -6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

37 ¿Existe algún valor de a para el cual este sistema tenga infinitas soluciones?

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y - 3z &= 2 \\ 2x + ay - 5z &= -4 \\ x + y + 2z &= 2 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{matrix}\right)$$

$$|A| = 9a + 27 = 0 \rightarrow a = -3$$

- **Si $a = -3$**, queda:

$$A' = \left(\begin{matrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{matrix}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5$ y $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20$, entonces:

$ran\,(A) = 2 \neq ran\,(A') = 3 \rightarrow$ El sistema es *incompatible*.

- **Si $a = -3$** $\rightarrow$ $ran\,(A) = ran\,(A') = 3 \rightarrow$ *Compatible determinado.*

Por tanto, *no* existe ningún valor de a para el que el sistema tenga infinitas soluciones.

Página 101

38 Prueba, sin desarrollar el determinante, que:

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = 0$$

☛ ***Resta la primera fila a la segunda y a la tercera.***

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \end{matrix} \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

pues las dos últimas filas son proporcionales.

39 Calcula:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 0 + 0 = 0$$

(1) Descomponemos el determinante en suma de dos.

(2) Hay dos filas iguales en cada uno de los determinantes.

$$\text{b)} \begin{vmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

pues es el determinante de una matriz diagonal y los elementos de la diagonal son 1.

40 Obtén en función de a, b, c el valor de: $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a+b & a & a \\ a & a+c & a \end{vmatrix}$

☛ ***Resta la tercera columna a las dos primeras.***

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ a+b & a & a \\ a & a+c & a \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1^a - 3^a \\ 2^a - 3^a \\ 3^a \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & -c & 0 \\ b & -c & 0 \\ a & a+c & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 0 & -c \\ b & -c \end{vmatrix} = abc$$

41 Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, **calcula:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$

$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0 = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2}$

(1) Descomponemos el determinante en suma de dos.

(2) Sacamos $\frac{1}{2}$ factor común de la 3ª fila. El 2º determinante es 0, pues las dos primeras filas son proporcionales.

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$

(1) Cuando cambiamos de orden dos filas consecutivas, el determinante cambia de signo.

42 Calcula los valores de a para los cuales el rango de A es menor que 3:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$ **¿Puede ser $ran(A) = 1$ para algún valor de a?**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$

El rango de A es menor que 3 si $|A| = 0$.

$|A| = -(a-1)(a-3)$

$|A| = 0$ si $a = 1$ o $a = 3$

Por tanto: si $a = 1$ o $a = 3 \rightarrow ran(A) < 3$

- El $ran(A)$ no puede ser 1, porque si nos fijamos en el menor:

$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -a \end{vmatrix} = -12 \neq 0$, independientemente del valor de a.

UNIDAD DIDÁCTICA 4:
PROGRAMACIÓN LINEAL

* Las numeraciones indicadas entre páginas se refieren a las páginas del libro de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II, de segundo de bachillerato de la editorial Anaya, Andalucía, cuyos autores son J. Colera, R. García y M.J.Oliveira

Página 116

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **Minimiza la función $f(x, y) = 2x + 8y$ sometida a las siguientes restricciones:**

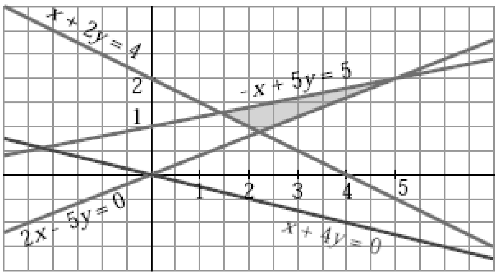
$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 2x + 4y \geq 8 \\ 2x - 5y \leq 0 \\ -x + 5y \leq 5 \end{cases}$$

- Representamos las rectas:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8 \quad \rightarrow \quad x + 2y = 4 \\ 2x - 5y = 0 \\ -x + 5y = 5 \end{cases}$$

y hallamos la región que cumple las condiciones del problema, teniendo en cuenta que $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

- Representamos la dirección de las rectas $z = 2x + 8y$, dibujando la que pasa por el origen de coordenadas: $2x + 8y = 0 \quad \rightarrow \quad x + 4y = 0$



- El mínimo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 4 \\ 2x - 5y = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{20}{9} \\ y = \dfrac{8}{9} \end{array}\right\} \text{ Punto } \left(\frac{20}{9}, \frac{8}{9}\right)$$

- El mínimo vale $f\left(\dfrac{20}{9}, \dfrac{8}{9}\right) = \dfrac{104}{9}$.

2 **Maximiza y minimiza la función $p = x + 2y - 3$ con las siguientes restricciones:**

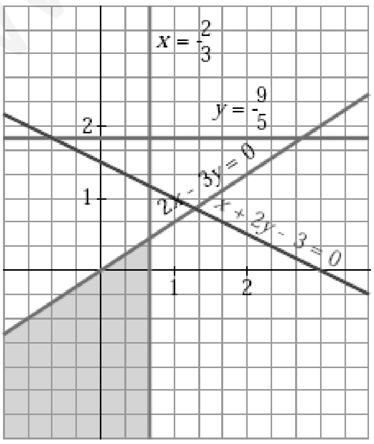
$$\begin{cases} \mathbf{2x - 3y \geq 0} \\ \mathbf{5y \leq 9} \\ \mathbf{3x \leq 2} \end{cases}$$

- Representamos las rectas:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ \quad\;\; 5y = 9 \\ 3x \quad\;\; = 2 \end{cases}$$

y hallamos la región que cumple las condiciones del problema.

- Representamos la dirección de las rectas $p = x + 2y - 3$, dibujando la recta $x + 2y - 3 = 0$:



La restricción $5y \leq 9$ es superflua. La región sería la misma sin ella.

- El **máximo** se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 0 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{4}{9} \end{array}\right\} \text{ Punto } \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}\right)$$

El máximo es $p\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{9}\right) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{8}{9} - 3 = \dfrac{-13}{9}$

- No hay **mínimo**.

3 **Maximiza la función $z = 3x + 4y$ sujeta a las siguientes restricciones:**

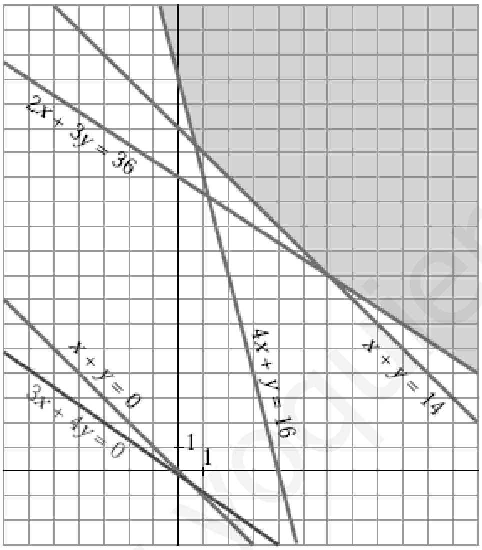
$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 36 \\ 2x + 2y \geq 28 \\ 8x + 2y \geq 32 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$$

- Representamos las rectas:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 36 \\ 2x + 2y = 28 \quad \rightarrow \quad x + y = 14 \\ 8x + 2y = 32 \quad \rightarrow \quad 4x + y = 16 \\ \;\; x + \;\; y = 0 \end{cases}$$

y obtenemos la región que cumple las condiciones del problema.

- Representamos la dirección de las rectas $z = 3x + 4y$, dibujando la recta $3x + 4y = 0$:



La restricción $x + y \geq 0$ es superflua. La región sería la misma sin ella.

- No hay máximo. La función $3x + 4y$ se puede hacer tan grande como se quiera en el recinto propuesto.

4 **En la región determinada por $3x + y \geq 5$, $x - y \leq 0$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$, halla el punto en que la función $f(x, y) = 2x + 4y$ alcanza su valor mínimo. ¿Puede alcanzar su máximo en esa región?**

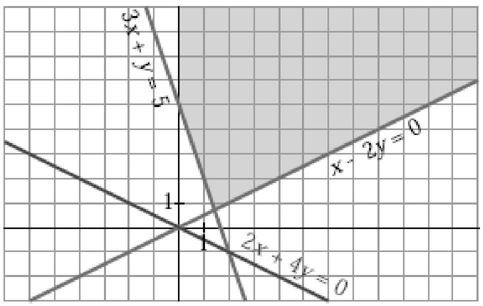
- Representamos las rectas:

$$\begin{cases} 3x + \;\; y = 5 \\ \;\; x - \; 2y = 0 \end{cases}$$

y hallamos la región que cumple las condiciones del problema, teniendo en cuenta que $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

- Representamos la dirección de las rectas $z = 2x + 4y$, dibujando la que pasa por el origen de coordenadas:

$$2x + 4y = 0 \quad \rightarrow \quad x + 2y = 0$$



- El mínimo se alcanza en el punto de intersección de las rectas.

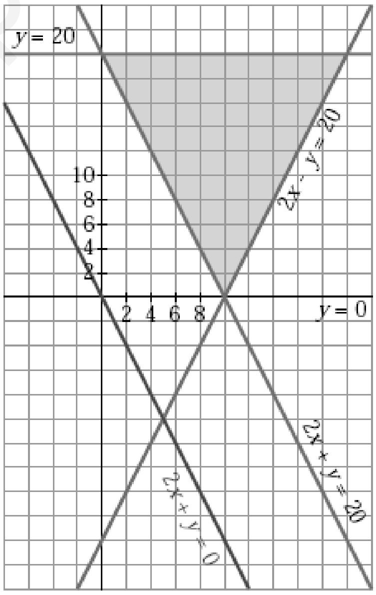
$$\left.\begin{array}{r} 3x + y = 5 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{10}{7} \\ y = \dfrac{5}{7} \end{array}\right\} \text{ Punto } \left(\frac{10}{7}, \frac{5}{7}\right)$$

- No hay máximo. La función $2x + 4y$ se puede hacer tan grande como se quiera en el recinto propuesto.

5 **Calcula los puntos del recinto** $\begin{cases} \mathbf{2x + y \geq 20} \\ \mathbf{2x - y \leq 20} \\ \mathbf{0 \leq y \leq 20} \end{cases}$ **que hacen mínima o máxima la función** $z = 2x + y$**. ¿Cuántas soluciones hay?**

- Representamos las rectas $\begin{cases} 2x + y = 20 \\ 2x - y = 20 \\ y = 20 \\ y = 0 \end{cases}$

  y obtenemos la región que cumple las restricciones dadas.



- Representamos la dirección de las rectas $z = 2x + y$, dibujando la recta $2x + y = 0$. Esta recta es paralela a $2x + y = 20$, que determina uno de los lados del recinto:

- Hay infinitos puntos que hacen mínima la función: todos los que están sobre el segmento de recta $y = 20 - 2x$ con $0 \leq x \leq 10$.

- El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 20 \\ y = 20 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = 20 \\ y = 20 \end{array}\right\} \text{ Punto } (20, 20)$$

6 **¿Es posible maximizar y minimizar la función** $z = x + y + 1$ **sujeta a estas restricciones?**

$$\begin{cases} \mathbf{3x + 4y - 13 \geq 0} \\ \mathbf{2x - 3y - 3 \leq 0} \\ \mathbf{5x - y - 27 \leq 0} \end{cases}$$

- Representamos las rectas: $\begin{cases} 3x + 4y - 13 = 0 \\ 2x - 3y - 3 = 0 \\ 5x - y - 27 = 0 \end{cases}$

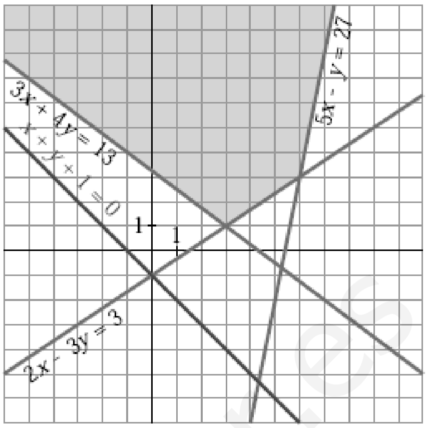
  y obtenemos el recinto que cumple las restricciones del problema.

- Representamos la dirección de las rectas

$$z = x + y + 1,$$

dibujando la recta $x + y + 1 = 0$.

- No existe máximo ni mínimo.



7 Las rectas $2x + y = 18$, $2x + 3y = 26$ y $x + y = 16$ se cortan dos a dos en tres puntos que son los vértices de un triángulo T. Sea S la intersección del triángulo T con el primer cuadrante. Halla el máximo de la función $z = 5x + 3y$ cuando x e y varían en S.

- Representamos las rectas:

$$\begin{cases} 2x + y = 18 \\ 2x + 3y = 26 \\ x + y = 16 \end{cases}$$

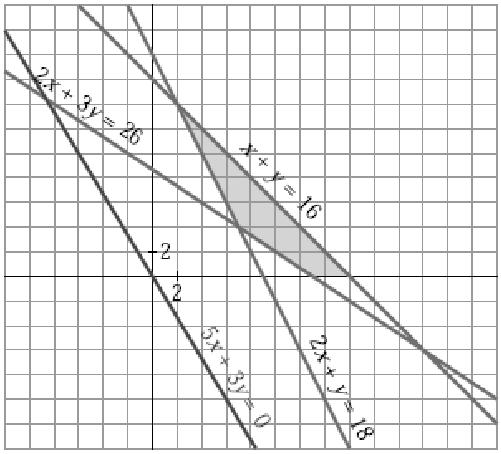
y obtenemos el triángulo T, y la región S.

- Representamos la dirección de las rectas $z = 5x + 3y$, dibujando la recta:

$$5x + 3y = 0$$

- El máximo se alcanza en el punto de corte de $x + y = 16$ con el eje X; es decir, en el punto $(16, 0)$.

- El máximo vale $z = 5 \cdot 16 + 3 \cdot 0 = 80$



8 Dibuja el recinto que cumple estas restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y - x + 1 \geq 0 \\ y - 4 \leq 0 \\ y + 2x - 5 \leq 0 \end{cases}$$

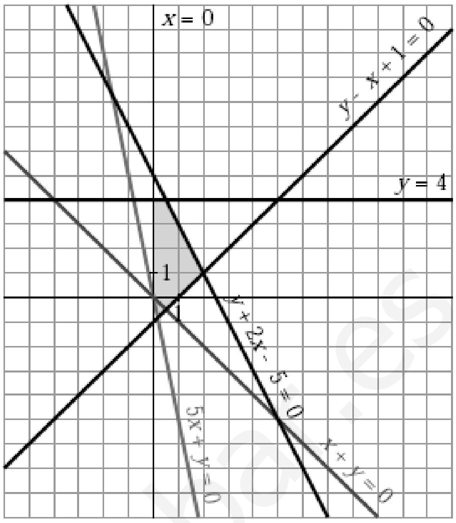
a) Localiza los puntos de este recinto en los que la función objetivo $F(x, y) = x + y$ se hace máxima y mínima, respectivamente.

b) Sobre el mismo recinto, haz máxima y mínima la función $G(x, y) = 5x + y$.

- Representamos las rectas:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - x + 1 = 0 \\ y - 4 = 0 \\ y + 2x - 5 = 0 \end{cases}$$

y obtenemos el recinto que cumple las condiciones del problema.



- Representamos la dirección de las rectas $z = x + y$, dibujando la recta $x + y = 0$.

- Representamos la dirección de las rectas $z = 5x + y$, dibujando la recta $5x + y = 0$.

a) • $F(x, y)$ alcanza el **máximo** en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} y + 2x - 5 = 0 \\ y = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ y = 4 \end{array}\right\} \text{Punto } \left(\frac{1}{2}, 4\right)$$

- $F(x, y)$ alcanza el **mínimo** en el punto de corte con el eje Y de la recta $y - x + 1 = 0$, es decir, en el punto $(0, -1)$.

b) • $G(x, y)$ alcanza el **máximo** en el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} y - x + 1 = 0 \\ y + 2x - 5 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array}\right\} \text{Punto } (2, 1)$$

El máximo vale $G(2, 1) = 5 \cdot 2 + 1 = 11$

- $G(x, y)$ alcanza el **mínimo** en el punto $(0, -1)$.

El mínimo vale $G(0, -1) = -1$.

9 S **Considera el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 8)$ y $(10, 3)$. Determina razonadamente:**

a) El punto del triángulo donde la función $f(x, y) = -4x + y + 9$ alcanza el máximo.

b) El punto del triángulo donde la función $f(x, y) = 4x + y + 12$ alcanza el máximo.

Sabemos que el máximo se alcanza en algún vértice (o en un lado). Calculamos el valor de la función dada en cada uno de los vértices:

a) $f(x, y) = -4x + y + 9$

$$\left.\begin{array}{l} f(0, 0) = 9 \\ f(2, 8) = 9 \\ f(10, 3) = -28 \end{array}\right\}$$

Hay infinitos puntos que hacen máxima la función: todos los puntos del lado que une los vértices $(0, 0)$ y $(2, 8)$.

b) $f(x, y) = 4x + y + 12$

$$\left.\begin{array}{l} f(0,\ 0) = 12 \\ f(2,\ 8) = 28 \\ f(10,\ 3) = 55 \end{array}\right\} \text{ La función alcanza el máximo en el punto } (10,\ 3).$$

PARA RESOLVER

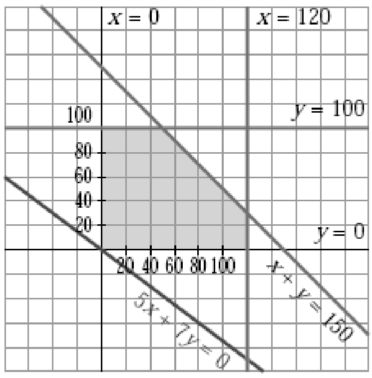
10 Un estudiante reparte propaganda publicitaria en su tiempo libre. La empresa A le paga 0,05 € por impreso repartido y la empresa B, con folletos más grandes, le paga 0,07 € por impreso. El estudiante lleva dos bolsas: una para los impresos de tipo A, en la que le caben 120, y otra para los de tipo B, en la que caben 100. Ha calculado que cada día puede repartir 150 impresos como máximo.

¿Cuántos impresos habrá de repartir de cada clase para que su beneficio diario sea máximo?

- Llamamos x al nº de impresos de tipo A e y al nº de impresos de tipo B.
- Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le x \le 120 \\ 0 \le y \le 100 \\ x + y \le 150 \end{array}\right\}$$

- La función que nos da el beneficio es $f(x, y) = 0{,}05x + 0{,}07y$. Tenemos que maximizar $f(x, y)$, sujeta a las restricciones anteriores.
- Representamos el recinto de restricciones y la recta $0{,}05x + 0{,}07y = 0 \rightarrow 5x + 7y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 0{,}05x + 0{,}07y$.



- El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 150 \\ y = 100 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 50 \\ y = 100 \end{array}$$

Por tanto, habrá de repartir 50 impresos de tipo A y 100 de tipo B. El beneficio será de:

$f(50, 100) = 0{,}05 \cdot 50 + 0{,}07 \cdot 100 = 9{,}5$ €

11 Una industria vinícola produce vino y vinagre. El doble de la producción de vino es siempre menor o igual que la producción de vinagre más cuatro unidades. Además, el triple de la producción de vinagre más cuatro veces la producción de vino es siempre menor o igual que 18 unidades.

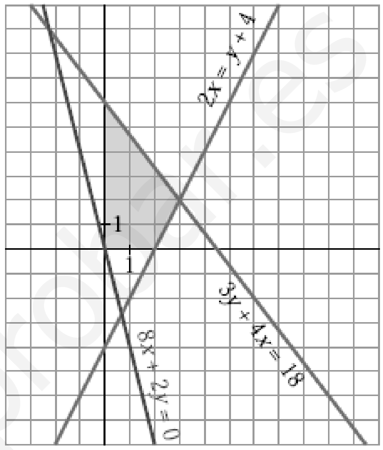
Halla el número de unidades de cada producto que se deben producir para alcanzar un beneficio máximo, sabiendo que cada unidad de vino deja un beneficio de 8 € y cada unidad de vinagre 2 €.

- Llamamos x a las unidades de vino e y a las de vinagre. Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ 2x \leq y + 4 \\ 3y + 4x \leq 18 \end{array}\right\}$$

- La función que nos da el beneficio es $f(x, y) = 8x + 2y$. Tenemos que maximizar $f(x, y)$, sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el recinto de restricciones y la recta $8x + 2y = 0 \rightarrow 4x + y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 8x + 2y$.



- El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 2x = y + 4 \\ 3y + 4x = 18 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \end{array}\Bigg\}$$

Por tanto, hay que producir 3 unidades de vino y 2 de vinagre.

Página 117

12 Un autobús Madrid-París ofrece plazas para fumadores al precio de 100 € y a no fumadores al precio de 60 €.

Al no fumador se le deja llevar 50 kg de peso y al fumador 20 kg.

Si el autobús tiene 90 plazas y admite un equipaje de hasta 3 000 kg, ¿cuál debería ser la oferta de la compañía si se quiere obtener el máximo beneficio?

- Llamamos x al nº de plazas para fumadores e y al nº de plazas para no fumadores.

- Las restricciones del problema son:

$$\left\{\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x + y \leq 90 \\ 20x + 50y \leq 3\,000 \quad \rightarrow \quad 2x + 5y \leq 300 \end{array}\right.$$

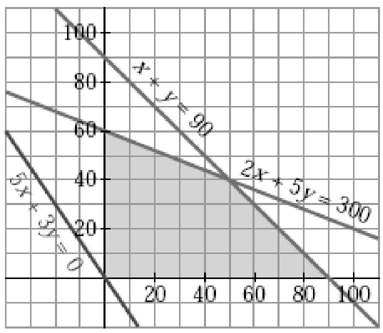
- Tenemos que maximizar la función:

  $f(x, y) = 100x + 60y$, sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el recinto de restricciones y la recta $100x + 60y = 0 \rightarrow 5x + 3y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 100x + 60y$.

- El máximo se alcanza en el punto $(90, 0)$.

Por tanto, deben ofrecer 90 plazas para fumadores y ninguna para no fumadores, para obtener el máximo beneficio.



13 **Una persona quiere invertir 100 000 € en dos tipos de acciones, A y B. Las de tipo A tienen más riesgo, pero producen un beneficio del 10%. Las de tipo B son más seguras, pero producen solo el 7% nominal.**

Decide invertir como máximo 60 000 € en la compra de acciones A y, por lo menos, 20 000 € en la compra de acciones B. Además, quiere que lo invertido en A sea, por lo menos, igual a lo invertido en B.

¿Cómo debe invertir los 100 000 € para que el beneficio anual sea máximo?

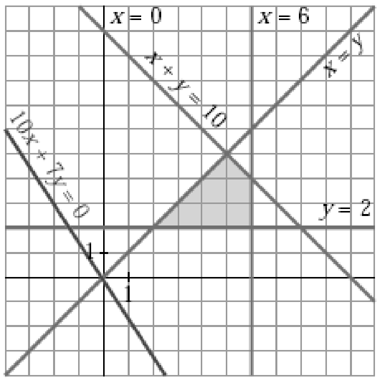
- Llamamos x al dinero invertido en acciones de tipo A (en decenas de miles de euros) e y al dinero invertido en acciones de tipo B (en decenas de miles de euros).

- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x + y \le 10 \\ 0 \le x \le 6 \\ y \ge 2 \\ x \ge y \end{cases}$$

- La función que nos da el beneficio anual es: $f(x, y) = 0{,}1x + 0{,}07y$. Tenemos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el recinto de restricciones, y la recta $0{,}1x + 0{,}07y = 0 \;\rightarrow\; 10x + 7y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 0{,}1x + 0{,}07y$.



- El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 10 \\ x &= 6 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 6 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Por tanto, debe invertir 60 000 € en acciones de tipo A y 40 000 € en acciones de tipo B.

14 **Un comerciante acude a cierto mercado a comprar naranjas con 500 €. Le ofrecen dos tipos de naranjas: las de tipo A a 0,5 € el kg y las de tipo B a 0,8 € el kg.**

Sabemos que solo dispone en su furgoneta de espacio para transportar 700 kg de naranjas como máximo y que piensa vender el kilo de naranjas de tipo A a 0,58 € y el de tipo B a 0,9 €.

¿Cuántos kilogramos de naranjas de cada tipo deberá comprar para obtener beneficio máximo?

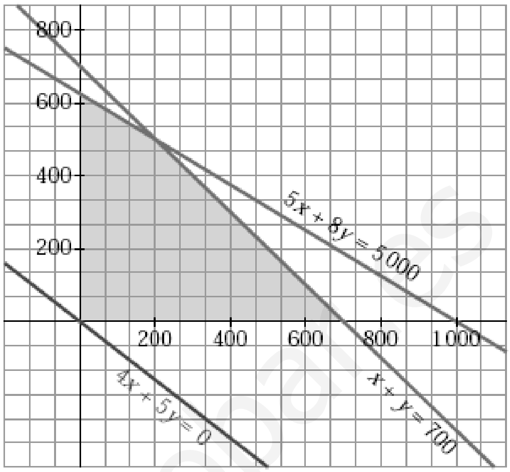
- Llamamos x a los kg de naranjas del tipo A e y a los kg de naranjas del tipo B.

- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \ge 0;\; y \ge 0 \\ x + y \le 700 \\ 0{,}5x + 0{,}8y \le 500 \quad \rightarrow \quad 5x + 8y \le 5\,000 \end{cases}$$

- La función que nos da el beneficio es $f(x, y) = 0{,}08 + 0{,}1y$. Tenemos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el recinto de restricciones, y la recta $0{,}08x + 0{,}1y = 0 \rightarrow$ $\rightarrow 8x + 10y = 0 \rightarrow 4x + 5y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 0{,}08x + 0{,}1y$.



- El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 700 \\ 5x + 8y = 5\,000 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 200 \\ y = 500 \end{array}$$

Por tanto, deberá comprar 200 kg de naranjas del tipo A y 500 kg del tipo B.

15 Un sastre tiene 80 m^2 de tela de algodón y 120 m^2 de tela de lana.

Un traje de caballero requiere 1 m^2 de algodón y 3 m^2 de lana y un vestido de señora necesita 2 m^2 de cada una de las telas.

Calcula el número de trajes y vestidos que debe confeccionar el sastre para maximizar los beneficios si un traje y un vestido se venden por el mismo precio.

- Llamamos x al número de trajes e y al número de vestidos. Resumamos en una tabla la información:

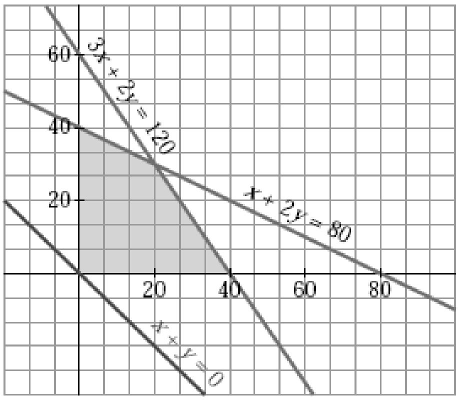
	Nº	ALGODÓN	LANA
TRAJE	x	x	$3x$
VESTIDO	y	$2y$	$2y$
TOTAL		$x + 2y$	$3x + 2y$

- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \end{cases}$$

- Si llamamos k al beneficio obtenido por la venta de un traje o de un vestido, la función que nos da el beneficio total es $f(x, y) = k(x + y)$. Tenemos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el recinto de restricciones y la recta $k(x + y) = 0 \rightarrow x + y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = k(x + y)$.



- El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 120 \\ x + 2y = 80 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 20 \\ y = 30 \end{array}$$

Por tanto, debe confeccionar 20 trajes y 30 vestidos.

16 **Se quiere promocionar una marca desconocida, D, de aceites, utilizando una marca conocida, C. Para ello, se hace la siguiente oferta:**

"Pague a solo 2,5 € el litro de aceite C y a 1,25 € el litro de aceite D siempre y cuando compre en total 6 litros o más y la cantidad de aceite C esté comprendida entre la mitad y el doble de la cantidad comprada de aceite D".

Disponemos de un máximo de 31,25 €.

a) Representa gráficamente los modos existentes de acogernos a la oferta.

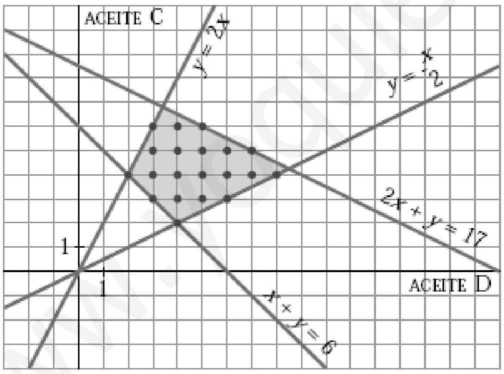
b) Acogiéndonos a la oferta, ¿cuál es la mínima cantidad de aceite D que podemos comprar? ¿Cuál es la máxima de C?

- Llamamos x al nº de litros de aceite D, e y al nº de litros de aceite C.

- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0; \;\; y \geq 0 \\ x + y \geq 6 \\ \dfrac{x}{2} \leq y \leq 2x \\ 2{,}5y + 1{,}25x \leq 21{,}25 \quad \rightarrow \quad 2y + x \leq 17 \\ x, \; y \text{ enteros} \end{cases}$$

a) Representamos gráficamente el recinto:



Hay 20 puntos en el recinto (20 modos de acogernos a la oferta).

b) La mínima cantidad de D son 2 litros y la máxima de C son 8 litros.

17 **Se quiere elaborar una dieta para ganado que satisfaga unas condiciones mínimas de contenidos vitamínicos al día: 2 mg de vitamina A, 3 mg de vitamina B, 30 mg de la C y 2 mg de la D.**

Para ello, se van a mezclar piensos de dos tipos, P y Q, cuyo precio por kilo es, para ambos, de 0,3 € y cuyo contenido vitamínico en miligramos por kilo es el siguiente:

	A	B	C	D
P	1	1	20	2
Q	1	3	7,5	0

¿Cómo deben mezclarse los piensos para que el gasto sea mínimo?

- Llamamos x al pienso de tipo P (en kg) e y al de tipo Q (en kg). Las restricciones son las siguientes:

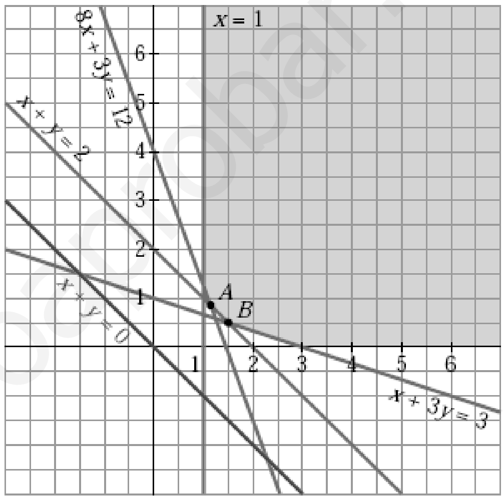
$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x + 3y \geq 3 \\ 20x + 7{,}5y \geq 30 \quad \rightarrow \quad 8x + 3y \geq 12 \\ 2x \geq 2 \quad \rightarrow \quad x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- La función que nos da el gasto es: $f(x, y) = 0{,}3x + 0{,}3y = 0{,}3\,(x + y)$. Tenemos que minimizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el recinto de restricciones, y la recta

$$0{,}3\,(x, y) = 0 \quad \rightarrow \quad x + y = 0,$$

que nos da la dirección de las rectas $z = 0{,}3\,(x + y)$.



- Como la recta $x + y = 0$ es paralela a $x + y = 2$, el mínimo se alcanza en cualquier punto de la recta $x + y = 2$ comprendido entre A y B. Hallamos las coordenadas de A y de B:

A: Punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ 8x + 3y = 12 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{6}{5} \\[2ex] y = \dfrac{4}{5} \end{array}\right\} \quad A\left(\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

B: Punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ x + 3y = 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\[2ex] y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \quad B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

18 Un pastelero fabrica dos tipos de tartas T_1 y T_2, para lo que usa tres ingredientes, A, B y C. Dispone de 150 kg de A, 90 kg de B y 150 kg de C. Para fabricar una tarta T_1 debe mezclar 1 kg de A, 1 kg de B y 2 kg de C, mientras que para hacer una tarta T_2 necesita 5 kg de A, 2 kg de B y 1 kg de C.

a) Si se venden las tartas T_1 a 10 €, y las tartas T_2 a 23 €, ¿qué cantidad debe fabricar de cada clase para maximizar sus ingresos?

b) Si se fija el precio de una tarta del tipo T_1 en 15 €, ¿cuál será el precio de una tarta del tipo T_2 si una solución óptima es fabricar 60 tartas del tipo T_1 y 15 del tipo T_2?

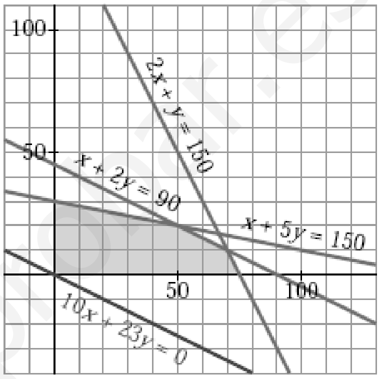
- Llamamos x al nº de tartas de tipo T_1 e y al nº de tartas de tipo T_2.

- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0; \quad y \geq 0 \\ x + 5y \leq 150 \\ x + 2y \leq 90 \\ 2x + y \leq 150 \end{cases}$$

a) • La función que nos da los ingresos es $f(x, y) = 10x + 23y$. Tenemos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el recinto de restricciones, y la recta $10x + 23y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 10x + 23y$.



- El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{aligned} x + 5y &= 150 \\ x + 2y &= 90 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= 50 \\ y &= 20 \end{aligned}$$

Por tanto, deben fabricarse 50 tartas de tipo T_1 y 20 tartas de tipo T_2.

b) • Si llamamos k al precio de la tarta de tipo T_2, los ingresos vendrían dados por la función $g(x, y) = 15x + ky$.

- Si la función $g(x, y)$ alcanza el máximo en el punto (60, 15), que no es un vértice, será porque hay infinitas soluciones y la recta $15x + ky = 0$ será paralela a $x + 2y = 90$. Por tanto:

$$\left.\begin{aligned} 15x + ky = 0 &\quad \to \quad \text{pendiente} = -\frac{15}{k} \\ x + 2y = 90 &\quad \to \quad \text{pendiente} = -\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad \frac{-15}{k} = -\frac{1}{2} \quad \to \quad k = 30$$

Por tanto, el precio de una tarta del tipo T_2 será de 30 €.

Página 118

19 **Una fábrica produce chaquetas y pantalones. Tres máquinas —de cortar, coser y teñir— se emplean en la producción.**

Fabricar una chaqueta representa usar la máquina de cortar una hora, la de coser, tres horas y la de teñir, una hora. Fabricar unos pantalones representa usar la máquina de cortar una hora, la de coser, una hora y la de teñir, ninguna hora. La máquina de teñir se puede usar durante tres horas, la de coser, doce y la de cortar, siete.

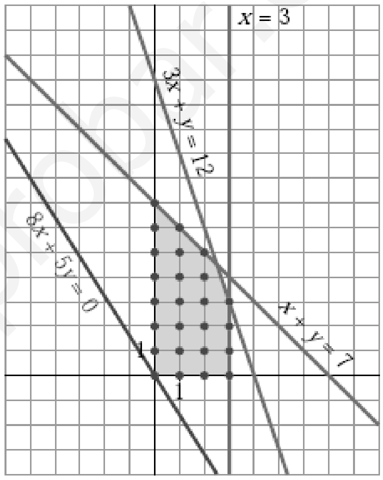
Todo lo que se fabrica es vendido y se obtiene un beneficio de ocho euros por cada chaqueta y cinco por cada pantalón.

¿Cómo emplearemos las máquinas para conseguir el beneficio máximo?

- Llamamos x al nº de chaquetas e y al nº de pantalones.
- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ x \leq 3 \\ x + y \leq 7 \\ 3x + y \leq 12 \end{cases} \qquad x, \; y \text{ enteros}$$

- La función que nos da el beneficio es $f(x, y) = 8x + 5y$. Tenemos que maximizar esta función sujeta a las restricciones anteriores.
- Representamos el conjunto de restricciones y la recta $8x + 5y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 8x + 5y$.
- El máximo se alcanza en el punto (2, 5). Por tanto, han de fabricarse 2 chaquetas y 5 pantalones.



20 S **Un ganadero debe suministrar un mínimo diario de 4 mg de vitamina A y 6 mg de vitamina B en el pienso que da a sus reses. Dispone para ello de dos tipos de pienso P_1 y P_2, cuyos contenidos vitamínicos por kg son los que aparecen en la tabla:**

	A	B
P_1	2	6
P_2	4	3

Si el kilogramo de pienso P_1 vale 0,4 € y el del P_2 0,6 €, ¿cómo deben mezclarse los piensos para suministrar las vitaminas requeridas con un coste mínimo?

- Llamamos x a los kg de pienso P_1 e y a los kg de pienso P_2.
- Las restricciones del problema son:

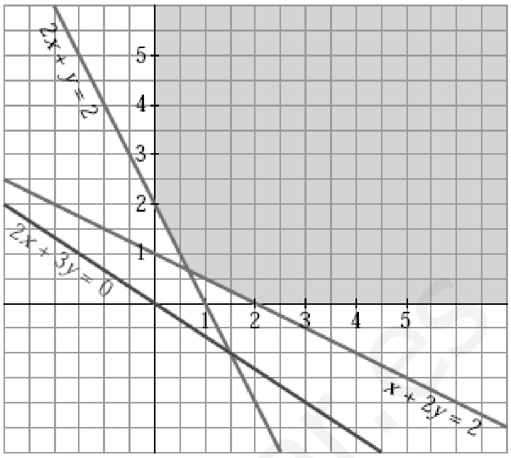
$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 2x + 4y \geq 4 \quad \rightarrow \quad x + 2y \geq 2 \\ 6x + 3y \geq 6 \quad \rightarrow \quad 2x + y \geq 2 \end{cases}$$

- La función que nos da el coste es $f(x, y) = 0{,}4x + 0{,}6y$. Tenemos que minimizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el conjunto de restricciones y la recta

$$0{,}4x + 0{,}6y = 0 \quad \rightarrow \quad 2x + 3y = 0,$$

que nos da la dirección de las rectas $z = 0{,}4x + 0{,}6y$.



- El mínimo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \end{array}$$

Por tanto, se deben mezclar $\frac{2}{3}$ kg de pienso P_1 con $\frac{2}{3}$ kg de pienso P_2.

21
S **Se va a organizar una planta de un taller de automóviles donde van a trabajar electricistas y mecánicos.**

Por necesidades de mercado, es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas y del número de mecánicos no supere al doble que el de electricistas. En total hay disponibles 30 electricistas y 20 mecánicos.

El beneficio de la empresa por jornada es de 150 € por electricista y 120 € por mecánico.

¿Cuántos trabajadores de cada clase deben elegirse para obtener el máximo beneficio?

- Llamamos x al nº de electricistas e y al de mecánicos.
- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0; \quad x \leq 30; \quad y \leq 20 \\ y \geq x \\ y \leq 2x \\ x, y \quad \text{enteros} \end{cases}$$

- La función que nos da el beneficio es:

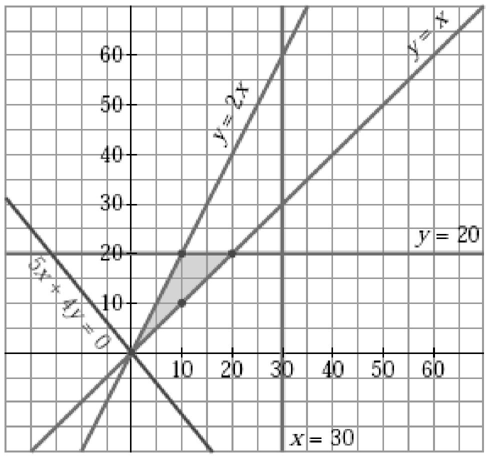
$$f(x, y) = 150x + 120y$$

Tenemos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el conjunto de restricciones y la recta

$$150x + 120y = 0 \quad \rightarrow \quad 5x + 4y = 0,$$

que nos da la dirección de las rectas $z = 150x + 120y$.



- Solo hay 4 puntos en el conjunto de restricciones: (0, 0), (10, 10), (10, 20) y (20, 20). El máximo se alcanza en el punto (20, 20). Por tanto, deben elegirse 20 electricistas y 20 mecánicos.

22 S **Una confitería es famosa por sus dos especialidades en tartas: la tarta Imperial y la tarta de Lima.**

La tarta Imperial requiere para su elaboración medio kilo de azúcar y 8 huevos y tiene un precio de venta de 8 €.

La tarta de Lima necesita 1 kilo de azúcar y 8 huevos, y tiene un precio de venta de 10 €.

En el almacén les quedan 10 kilos de azúcar y 120 huevos.

a) ¿Qué combinaciones de especialidades pueden hacer?

Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

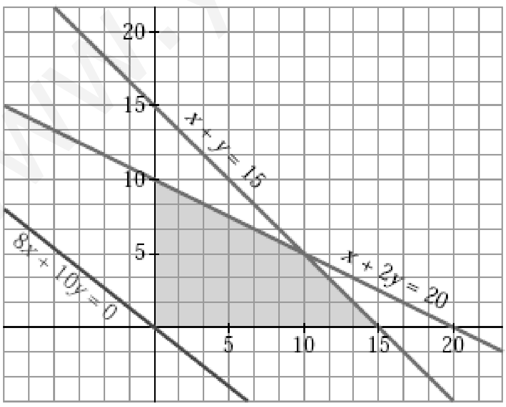
b) ¿Cuántas unidades de cada especialidad han de producirse para obtener el mayor ingreso por ventas?

a) • Llamamos x al nº de tartas de tipo Imperial e y al nº de tartas de Lima.

- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0; \quad x, \ y \ \text{enteros} \\ 0{,}5x + y \leq 10 \quad \rightarrow \quad x + 2y \leq 20 \\ 8x + 8y \leq 120 \quad \rightarrow \quad x + y \leq 15 \end{cases}$$

- La función que nos da los ingresos por ventas es $f(x, y) = 8x + 10y$. Tendremos que maximizar esta función sujeta a las restricciones anteriores.
- Representamos el conjunto de restricciones y la recta $8x + 10y = 0 \rightarrow 4x + 5y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 8x + 10y$.



(Puntos de coordenadas enteras dentro de este recinto)

b) El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} x + \ \ y = 15 \\ x + 2y = 20 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 10 \\ y = \ \ 5 \end{array}$$

Por tanto, han de fabricar 10 tartas Imperiales y 5 de Lima.

23 S **Un orfebre fabrica dos tipos de joyas.**

La unidad de tipo A se hace con 1 g de oro y 1,5 g de plata y se vende a 25 €.

La de tipo B se vende a 30 € y lleva 1,5 g de oro y 1 g de plata.

Si solo se dispone de 750 g de cada metal, ¿cuántas joyas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

- Llamamos x al nº de unidades de tipo A e y al nº de unidades de tipo B.

- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x + 1{,}5y \leq 750 \\ 1{,}5x + y \leq 750 \end{cases}$$

- La función que tenemos que maximizar, sujeta a las restricciones anteriores, es: $f(x, y) = 25x + 30y$

- Representamos el conjunto de restricciones y la recta

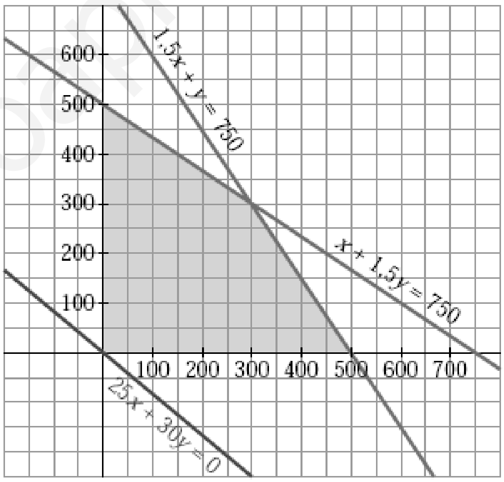
$$25x + 30y = 0 \quad \rightarrow \quad 5x + 6y = 0,$$

que nos da la dirección de las rectas $z = 25x + 30y$.

- El máximo se alcanza en el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 1{,}5x + \quad y = 750 \\ x + 1{,}5y = 750 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 300 \\ y = 300 \end{array}$$

Por tanto, ha de fabricar 300 joyas de cada uno de los dos tipos.



24 S **Se desea realizar una mezcla con dos sustancias, A y B, que ha de contener como mínimo 10 unidades de cada una de ellas.**

Estas sustancias nos las venden dos proveedores en forma de lotes.

El lote del primer proveedor es tal que los contenidos de B y de A están en relación de 4 a 1 y hay una unidad de A.

El lote del segundo proveedor es tal que los contenidos de A y de B están en relación de 4 a 1 y hay una unidad de B.

El primer proveedor vende cada lote a 10 € y el segundo al doble. Ambos proveedores nos venden lotes enteros o fracciones de ellos.

¿Qué número de lotes hemos de comprar para que el coste sea mínimo?

- Llamamos x a los lotes del primer proveedor e y a los lotes del segundo proveedor.

- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x + 4y \geq 10 \\ 4x + y \geq 10 \end{cases}$$

- La función que nos da el coste es $f(x, y) = 10x + 20y$. Tenemos que minimizar esta función sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el conjunto de restricciones y la recta

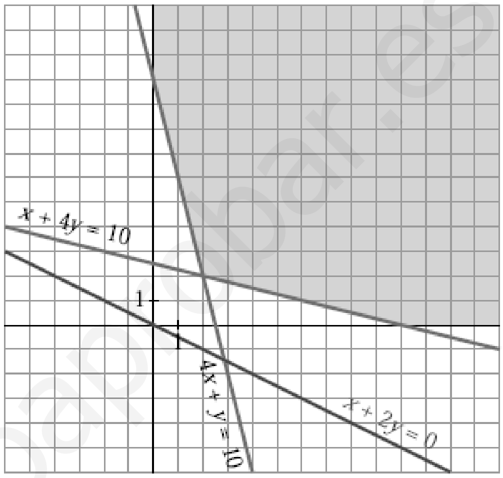
$$10x + 20y = 0 \quad \rightarrow \quad x + 2y = 0,$$

que nos da la dirección de las rectas $z = 10x + 20y$.

- El mínimo se alcanza en el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x + 4y = 10 \\ 4x + \ \ y = 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \end{array}$$

Por tanto, hemos de comprar 2 lotes de cada uno de los dos tipos.



Página 119

25
S
Un veterinario aconseja a un granjero dedicado a la cría de aves una dieta mínima que consiste en 3 unidades de hierro y 4 unidades de vitaminas diarias. El granjero sabe que cada kilo de maíz proporciona 2,5 unidades de hierro y 1 de vitaminas y que cada kilo de pienso compuesto proporciona 1 de hierro y 2 de vitaminas. Sabiendo que el kilo de maíz vale 0,3 € y el de pienso compuesto 0,52 €, se pide:

a) ¿Cuál es la composición de la dieta diaria que minimiza los costes del granjero? Explica los pasos seguidos para obtener la respuesta.

b) ¿Cambiaría la solución del problema si por escasez en el mercado el granjero no pudiera disponer de más de 1 kilo diario de pienso compuesto? Razona la respuesta.

a) • Llamamos x al nº de kg de maíz e y al nº de kg de pienso.

- Las restricciones del problema son:

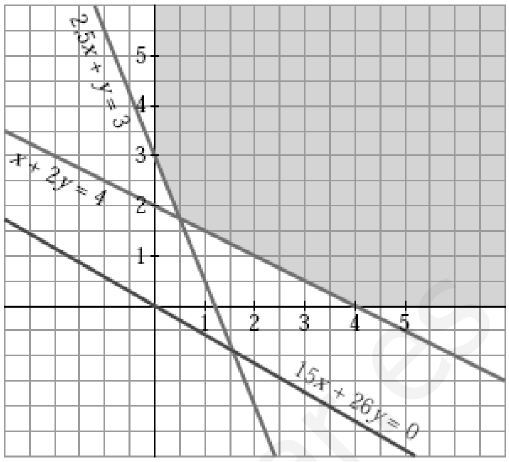
$$\begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ 2{,}5x + y \geq 3 \\ x + 2y \geq 4 \end{cases}$$

- La función que nos da el coste es $f(x, y) = 0{,}3x + 0{,}52y$. Tenemos que minimizar esta función sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el conjunto de restricciones y la recta

  $0{,}3x + 0{,}52y = 0 \quad \rightarrow \quad 15x + 26y = 0,$

  que nos da la dirección de las rectas $z = 0{,}3x + 0{,}52y$.

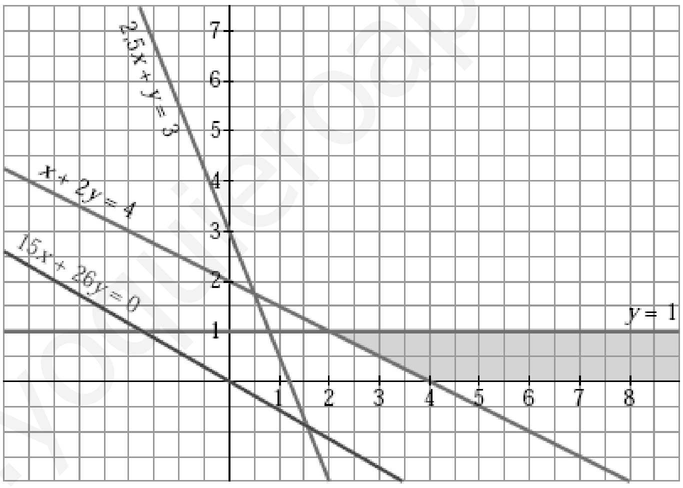


- El mínimo se alcanza en el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 4 \\ 2{,}5x + y = 3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{7}{4} \end{array}$$

Por tanto, debe utilizar $\frac{1}{2}$ kg de maíz y $\frac{7}{4}$ kg de pienso compuesto.

b) • Si añadimos la restricción $y \leq 1$ a las anteriores, el recinto sería:



- El mínimo en este caso se alcanzaría en el punto de corte de:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 4 \\ y = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array}$$

En este caso, debería utilizar 2 kg de maíz y 1 kg de pienso compuesto.

UNIDAD DIDÁCTICA 05:
LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD

* Las numeraciones indicadas entre páginas se refieren a las páginas del libro de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II, de segundo de bachillerato de la editorial Anaya, Andalucía, cuyos autores son J. Colera, R. García y M.J.Oliveira

Página 147

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **Sabemos que** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ **y** $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 3$.

¿En cuáles de los siguientes casos hay indeterminación para $x \to +\infty$**?**

En los casos en que no la haya, di cuál es el límite:

a) $f(x) + g(x)$ **b)** $g(x) + h(x)$ **c)** $\dfrac{f(x)}{h(x)}$

d) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **e)** $[h(x)]^{g(x)}$ **f)** $[3 - h(x)] \cdot f(x)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) + g(x)\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x)\right) + \lim\limits_{x \to +\infty} \left(g(x)\right) = +\infty + (-\infty) =$

$= +\infty - (+\infty) \quad \to \quad$ Indeterminación.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(g(x) + h(x)\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) + \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty + 3 = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{+\infty}{3} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{+\infty}{-\infty} \rightarrow$ Indeterminación.

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [h(x)]^{g(x)} = 3^{-\infty} = \dfrac{1}{3^{+\infty}} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} [3 - h(x)] \cdot f(x) = 0 \cdot (+\infty) \rightarrow$ Indeterminación.

2 **Calcula los límites cuando $x \to -\infty$ de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{2x + 5}{2 - x}$ **b)** $g(x) = \dfrac{10x - 5}{x^2 + 1}$

c) $h(x) = \dfrac{3x^2 - 4}{2x + 3}$ **d)** $i(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{7 + 5x^3}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 5}{2 - x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x + 5}{2 + x} = -2$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{10x - 5}{x^2 + 1} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 - 4}{2x + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 4}{-2x + 3} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 2x}{7 + 5x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3 - 2x}{7 - 5x^3} = \dfrac{1}{5}$

3 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2 + 6x}}{2x + 1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{5x^2 - 7}{x + 1}}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \sqrt{x}}{2x - 3}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^3 + 2}}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2 + 6x}}{2x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3}\, x}{2x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{5x^2 - 7}{x + 1}} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \sqrt{x}}{2x - 3} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^3 + 2}} = 0$

4 **Calcula estos límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{e^x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x+7})$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x^2+1)}{x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{e^x} = 0$

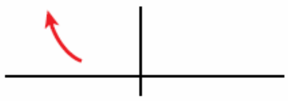
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x+7}\right) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x^2+1)}{x} = 0$

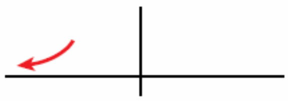
5 **Calcula los siguientes límites y representa gráficamente los resultados obtenidos:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}5^x + 1)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{x+1}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}5^x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} (0{,}5^{-x} + 1) = +\infty$



b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x+1} = 0$



6 **Sabiendo que:**

$\lim\limits_{x \to 2} p(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 2} q(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2} r(x) = 3$ $\lim\limits_{x \to 2} s(x) = 0$

di, en los casos que sea posible, el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{p(x)}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} [s(x) \cdot q(x)]$

c) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x)]^{p(x)}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 2} [p(x) - 2q(x)]$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{p(x)} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x) \cdot q(x)] = 0 \cdot (-\infty) \rightarrow$ Indeterminado.

c) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x)]^{p(x)} = 0^{+\infty} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 2} [p(x) - 2q(x)] = +\infty - 2(-\infty) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

7 **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x^2+3}{x^3} - \frac{1}{x} \right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \left[\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)} \right]$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x^2+3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2+3-x^2}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{3}{x^3} = \frac{3}{(0)}$.

Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{3}{x^3} = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{3}{x^3} = +\infty.$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)} \right] = \lim\limits_{x \to 1} \frac{2x-(x-1)}{x(x-1)^2} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{2x-x+1}{x(x-1)^2} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{2}{0}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x+1}{x(x-1)^2} = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x(x-1)^2} = +\infty.$

8 **Calcula el límite de las siguientes funciones cuando $x \to +\infty$:**

a) $f(x) = \frac{5x^2-2x+1}{(2x-1)^2}$ **b)** $g(x) = \frac{x+1}{\log x}$

c) $h(x) = \frac{3+2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}}$ **d)** $i(x) = \frac{3^x}{2^x+1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x^2-2x+1}{(2x-1)^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x^2-2x+1}{4x^2-4x+1} = \frac{5}{4}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{\log x} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3+2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3^x}{2^x+1} = +\infty$

9 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 5x}{x + 1} - \frac{3x}{2} \right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2x + 1}{x - 3} \right)^{1 - x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1{,}2^x - \frac{3x^2}{x + 1} \right)$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x + 4}{2x + 5} \right)^{x - 1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 5x}{x + 1} - \frac{3x}{2} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2 - 10x - 3x(x + 1)}{2(x + 1)} \right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 10x - 3x^2 - 3x}{2x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x^2 - 13x}{2x + 2} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2x + 1}{x - 3} \right)^{1 - x} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1{,}2^x - \frac{3x^2}{x + 1} \right) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x + 4}{2x + 5} \right)^{x - 1} = \left(\frac{3}{2} \right)^{+\infty} = +\infty$

Página 148

10 **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{(x - 1)^2}{x - 5}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 2x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - x}$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{(x - 1)^2}{x - 5} = \frac{0}{-4} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x - 6)(x - 1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x - 6) = -5$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 2x} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x + 2)(x - 1)}{2x(x - 1)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x + 2}{2x} = \frac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2(x - 3)}{x(x - 1)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x(x - 3)}{x - 1} = \frac{0}{-1} = 0$

11 **Averigua si estas funciones son continuas en $x = 2$:**

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 2 \\ 6 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x-2) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (6-x) = 4 \\ f(2) = 6-2 = 4 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x = 2$, puesto que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2-1) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x+1) = 5 \end{array}\right\}$ $f(x)$ *no* es continua en $x = 2$, puesto que no existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

12 Estudia la continuidad de estas funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 1 \\ 2x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) • Si $x \neq 2 \rightarrow$ Es continua, pues está formada por funciones continuas.

• En $x = 2$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} 2^x = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} 4 = 4 \\ f(2) = 4 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x = 2$

Por tanto, $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) El dominio de la función es $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

• Si $x \neq 0$ y $x \neq 1 \rightarrow$ La función es continua.

• En $x = 0$: Es discontinua, puesto que $f(x)$ no está definida para $x = 0$. Además, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Hay una asíntota vertical en $x = 0$.

• En $x = 1$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x-1) = 1 \\ f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x = 1$, pues $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

PARA RESOLVER

13 a) Calcula el límite de la función $f(x)$ cuando $x \to 0$, $x \to 2$, $x \to 3$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$:

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-5x+6}$$

b) Representa gráficamente los resultados.

a) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-5x+6} = \dfrac{x-3}{(x-3)(x-2)}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

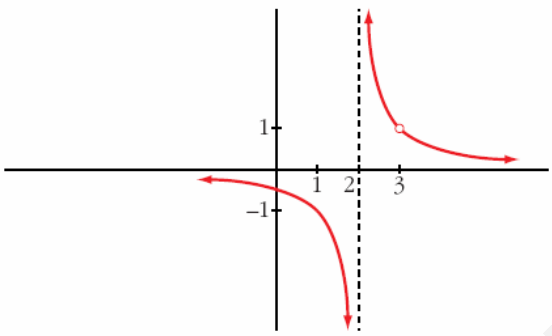
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{(0)}.$$

los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x-2} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

b)



14 **a) Calcula el límite de la función $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$ en los puntos en los que no está definida.**

b) Halla su límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

c) Representa la función con la información que obtengas.

d) ¿Cuáles son los puntos de discontinuidad de esta función?

a) El dominio de la función es: $D = \mathbb{R} - \{0, 3\}$, pues el denominador se anula en:

$$x^2 - 3x = 0 \quad \to \quad x(x-3) = 0 \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}$$

$$y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)}$$

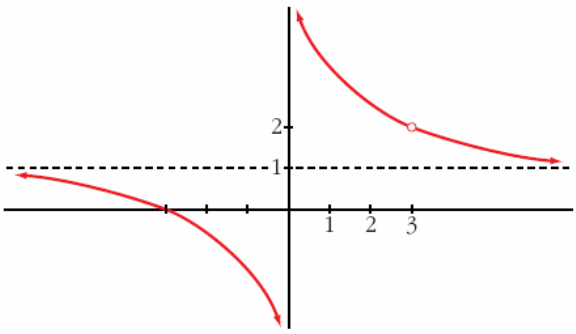
$$\lim_{x \to 0} \frac{x+3}{x} = \frac{3}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x+3}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x+3}{x} = +\infty$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+3}{x} = \frac{6}{3} = 2$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+3}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+3}{x} = 1$

c)



d) La función es discontinua en $x = 0$ (tiene una asíntota vertical) y en $x = 3$ (no está definida; tiene una discontinuidad evitable).

15 **Sea la función** $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^2 - x}$.

a) Calcula: $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) ¿Cuál es la función que coincide con $f(x)$ excepto en $x = 0$ y en $x = 1$?

c) ¿En qué puntos no es continua $f(x)$?

$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^2 - x} = \frac{x^2(x-2)(x-1)}{x(x-1)}$$

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} [x(x-2)] = 0$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} [x(x-2)] = -1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $g(x) = x(x-2) = x^2 - 2x$

c) En $x = 0$ y en $x = 1$. La función no está definida en estos valores (hay discontinuidades evitables).

16 **Calcula el límite de la función** $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{2x^2 - 8}$ **cuando** $x \to 0$, $x \to 2$ **y** $x \to -2$.

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{0}{-8} = 0$

- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{2}{(0)}$. Hallamos los límites laterales:

  $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \dfrac{6}{(0)}$. Hallamos los límites laterales:

  $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

17 **Calcula el límite de la función $f(x) = 2 + \dfrac{x}{x+1}$ cuando $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ y $x \to -1$.**

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2 + 1 = 3$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2 + 1 = 3$
- $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2 + \dfrac{-1}{(0)}$. Hallamos los límites laterales:

  $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

18 **Calcula el valor que debe tener k para que las siguientes funciones sean continuas:**

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \le 2 \\ k - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x + k & \text{si } x \le 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • Si $x \ne 2$, la función es continua.

• En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x + 1) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (k - x) = k - 2 \\ f(2) = 2 + 1 = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ k - 2 = 3 \to k = 5\end{array}$$

b) • Si $x \ne 0$, la función es continua.

• En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x + k) = k \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - 1) = -1 \\ f(0) = 0 + k = k \end{array}\right\} \text{Para que sea continua, ha de ser: } k = -1$$

19 **Calcula el valor de k para que cada una de las siguientes funciones sea continua:**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} & \text{si } x \ne 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ k & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

a) • Si $x \ne 1$, la función es continua.

• Si $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} (x^3 + x^2 + x + 1) = 4$$

$f(1) = k$

Para que sea continua, ha de ser $k = 4$.

b) Para $x \neq 1$, $f(x)$ es continua.

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, ha de ser $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \dfrac{(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \to 1^-} (x + 1) = 2 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} k = k \\ f(1) = k \end{array}\right\}$$

Ha de ser $k = 2$.

20 **S** **Estudia la continuidad de cada una de las siguientes funciones para los distintos valores del parámetro a:**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq 2 \\ a - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \leq 0 \\ x + 2a & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • En $x \neq 2$, la función es continua.

• En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 + ax) = 4 + 2a \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (a - x^2) = a - 4 \\ f(2) = 4 + 2a \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ 4 + 2a = a - 4 \;\rightarrow\; a = -8 \end{array}$$

Por tanto, la función es continua si $a = -8$, y es discontinua (en $x = 2$) si $a \neq -8$.

b) • En $x \neq 0$, la función es continua.

• En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{ax} = 1 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x + 2a) = 2a \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ 1 = 2a \;\rightarrow\; a = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Por tanto, la función es continua si $a = \dfrac{1}{2}$, y es discontinua (en $x = 0$) si $a \neq \dfrac{1}{2}$.

Página 149

21 **Estudia la continuidad de esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ 2x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Si $x \neq -1$ y $x \neq 1$ $\rightarrow$ la función es continua.

- Si $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} |x+2| = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} x^2 = 1 \\ f(-1) = 1 \end{array}\right\} \text{La función es continua en } x = -1.$$

- Si $x = 1$ $\rightarrow$ No es continua, pues no está definida en $x = 1$; no existe $f(1)$.
  Además:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x+1) = 3 \end{array}\right\} \text{La discontinuidad es de salto (finito).}$$

22 **Estudia la continuidad de las siguientes funciones, represéntalas gráficamente y di cuáles son sus límites cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.**

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } 1 \le x \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{si } x \le 3 \\ x-3 & \text{si } 3 < x < 6 \\ 0 & \text{si } x \ge 6 \end{cases}$

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } 1 \le x \end{cases}$

- **Continuidad:**

— Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$ $\rightarrow$ Es continua, pues está formada por funciones continuas.

— En $x = 0$ $\rightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x+1) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 \\ \text{No existe } f(0). \end{array}\right.$

Hay una discontinuidad evitable en $x = 0$.

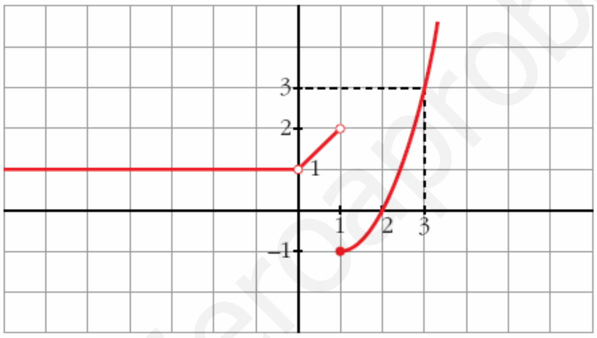
— En $x = 1$ $\rightarrow$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x + 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 2x) = -1 \\ f(1) = -1 \end{cases}$

Discontinuidad de salto finito en $x = 1$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2x) = +\infty$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 1 = 1$

- **Gráfica:**



b) $f(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{si } x \le 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 < x < 6 \\ 0 & \text{si } x \ge 6 \end{cases}$

- **Continuidad:**

— Si $x \ne 3$ y $x \ne 6$ $\rightarrow$ Es continua, pues está formada por funciones continuas.

— En $x = 3$ $\rightarrow$ $\left.\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (3x - x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x - 3) = 0 \\ f(3) = 0 \end{cases}\right\} \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

$f(x)$ es continua en $x = 3$.

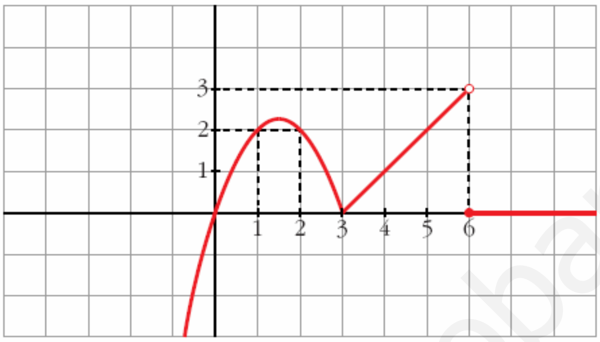
— En $x = 6$ $\rightarrow$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 6^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 6^-} (x - 3) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 6^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 6^+} 0 = 0 \\ f(6) = 0 \end{cases}$

Discontinuidad de salto finito en $x = 6$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 0 = 0$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (3x - x^2) = -\infty$

- **Gráfica:**



23 **S** **Representa gráficamente la función $f(x)$ y estudia su continuidad:**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5x & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ x - 5 & \text{si } 5 \le x \le 10 \end{cases}$$

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} -x^2 + 5x & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ x - 5 & \text{si } 5 \le x \le 10 \end{array}\right\} \text{ Dominio} = [0,\ 10]$$

- **Continuidad:** Si $x \in [0,\ 5) \cup (5,\ 10]$, es continua, pues está formada por funciones continuas.

$$\text{En } x = 5 \;\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^-} (-x^2 + 5x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} (x - 5) = 0 \\ f(5) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 5} f(x) = f(5). \\ \text{Es continua} \end{array}$$

- **Gráfica:**

24 S **Dada la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + b & \text{si } x \le -1 \\ 3x^2 + 4 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -x^3 + 8 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

calcula el valor de b para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$. ¿Es continua en $x = 1$?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + b & \text{si } x \le -1 \\ 3x^2 + 4 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -x^3 + 8 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

- Para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$, ha de tenerse que:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \left(\frac{1}{x^2} + b\right) = 1 + b \\ \displaystyle\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (3x^2 + 4) = 7 \\ f(-1) = 1 + b \end{array}\right\} \text{Ha de ser } 1 + b = 7; \text{ es decir, } b = 6.$$

- Veamos que la función también es continua en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3x^2 + 4) = 7 \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-x^3 + 8) = 7 \\ f(1) = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) \\ f(x) \text{ es continua en } x = 1 \end{array}$$

25 S **Representa, estudia la continuidad y halla los límites para $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$ de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 4x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 4x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- **Continuidad:**

— Si $x \ne 1$ y $x \ne 2$ $\to$ Es continua, pues está formada por funciones continuas.

— En $x = 1$ $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2^x = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2 = 2 \\ f(1) = 2 \end{array} \right\}$ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$. $f(x)$ es continua en $x = 1$.

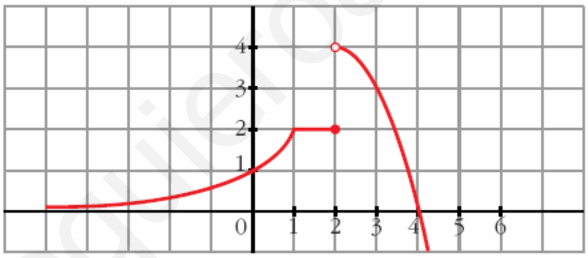
— En $x = 2$ $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (-x^2 + 4x) = 4 \\ f(2) = 2 \end{array} \right.$

Discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2 + 4x) = -\infty$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 2^{-\infty} = 0$

- **Gráfica:**



26 S **Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 8x & \text{si } x > 2 \end{cases}$**

Estudia su continuidad y represéntala gráficamente.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 8x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- **Continuidad:**

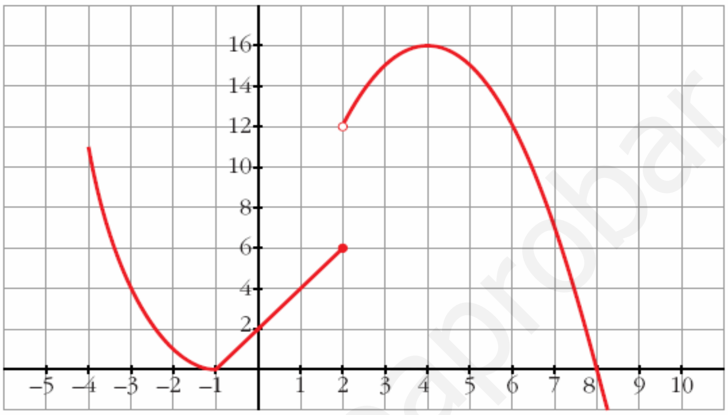
— Si $x \neq -1$ y $x \neq 2$ $\rightarrow$ Es continua, pues está formada por funciones continuas.

— En $x = -1$ $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2 + 2x + 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (2x + 2) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{array} \right\}$ $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$ $f(x)$ es continua en $x = -1$.

— En $x = 2 \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (2x + 2) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (-x^2 + 8x) = 12 \\ f(2) = 6 \end{cases}$

Discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

• **Gráfica:**



27 S **Dada** $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

Estudia su continuidad y represéntala gráficamente.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

• **Continuidad:**

— Si $x \neq 0$ y $x \neq 3 \rightarrow$ Es continua (está formada por funciones continuas).

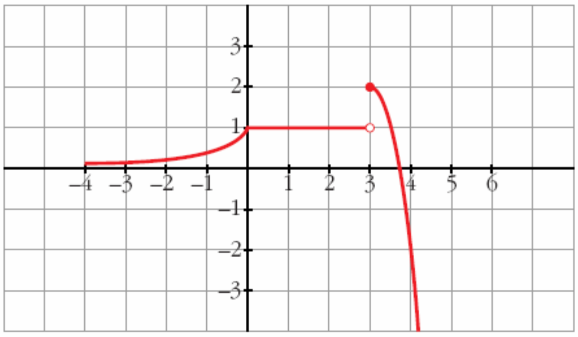
— En $x = 0 \rightarrow \left.\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1 \\ f(0) = 1 \end{cases}\right\}$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

$f(x)$ es continua en $x = 0$.

— En $x = 3 \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (-x^2 + 3x + 2) = 2 \\ f(3) = 2 \end{cases}$

Discontinuidad de salto finito en $x = 3$.

• **Gráfica:**



28 **S** **El número de individuos, en millones, de una población, viene dado por la función:**

$P(t) = \dfrac{15 + t^2}{(t+1)^2}$, donde t se mide en años transcurridos desde $t = 0$.

Calcula la población inicial y el tamaño de la población a largo plazo.

$P(0) = 15$ millones de individuos

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{15 + t^2}{(t-1)^2} = 1 \text{ millón de individuos}$$

29 **S** **Una empresa ha establecido para sus empleados un incentivo (en cientos de euros) en relación con el valor x (en cientos de euros) de lo vendido por cada uno. Dicho incentivo sigue la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}01\,x & \text{si } 0 \le x \le 100 \\ \dfrac{30x}{2x + 2\,300} & \text{si } x > 100 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de $f(x)$. Indicar si el incentivo recibido por un empleado es sensiblemente distinto si el valor de las ventas es ligeramente superior o inferior a 10 000 €.

b) ¿Cuál es la cantidad máxima que un empleado podría recibir como incentivo si sus ventas fueran muy grandes? Justifica tu respuesta.

a) Dominio = $[0, +\infty)$

— Si $x \neq 100$ → La función es continua, pues está formada por funciones continuas en los intervalos definidos.

— En $x = 100$ → $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 100^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 100^-} 0{,}01x = 1 \ \ (100\text{ €}) \\ \lim\limits_{x \to 100^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 100^+} \dfrac{30x}{2x + 2\,300} = 1{,}2 \ \ (120\text{ €}) \\ f(100) = 1 \ \ (100\text{ €}) \end{cases}$

Hay una discontinuidad de salto finito en $x = 100$

Como $\lim_{x \to 100^-} f(x) \neq \lim_{x \to 100^+} f(x)$, el incentivo recibido por un empleado sí es sensiblemente distinto si el valor de sus ventas es ligeramente superior o inferior a 10 000 € ($x = 100$).

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{30x}{2x + 2\,300} = 15 \;\to\; 1\,500$ €

30 S **Las conclusiones de un estudio establecen que el número de individuos de una determinada población de una especie protegida vendrá dado, durante los próximos años, por la función**

$f(t) = \frac{15\,000t + 10\,000}{2t + 2}$, **siendo t el número de años transcurridos. Se pide:**

a) Tamaño actual de la población.

b) ¿Cómo evoluciona el tamaño de la población entre los años 4 y 9?

c) Si esta función fuese válida indefinidamente, ¿se estabilizaría el tamaño de la población? Justifica la respuesta.

a) $f(0) = 5\,000$ individuos.

b) T.V.M. $[4, 9] = \frac{f(9) - f(4)}{9 - 4} = \frac{7\,250 - 7\,000}{5} = \frac{250}{5} = 50$

Aumenta en 250 individuos, lo que supone un aumento medio de 50 por año.

c) $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{15\,000t + 10\,000}{2t + 2} = 7\,500$

Se estabilizaría en 7 500 individuos.

Página 150

31 S **Se ha investigado el tiempo (T, en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento de los deportistas (x, en días), obteniéndose que:**

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{300}{x + 30}, & 0 \le x \le 30 \\ \dfrac{1\,125}{(x - 5)(x - 15)} + 2, & x > 30 \end{cases}$$

a) Justifica que la función T es continua en todo su dominio.

b) Por mucho que se entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 1 minuto? ¿Y en menos de 2?

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{300}{x+30}, & 0 \le x \le 30 \\ \dfrac{1\,125}{(x-5)(x-15)} + 2, & x > 30 \end{cases}$$

a) • La función $y = \dfrac{300}{x+30}$ es continua, salvo en $x = -30$; pero, como solo la consideramos en $0 \le x \le 30$, será continua en el intervalo $(0, 30)$.

• La función $y = \dfrac{1\,125}{(x-5)(x-15)} + 2$ es continua, salvo en $x = 5$ y en $x = 15$; pero como la estamos considerando para $x > 30$, es continua en el intervalo $(30, +\infty)$.

• Por tanto, si $x \ne 30$ $\left(x \in [0, 30) \cup (30, +\infty)\right)$, la función $T(x)$ es continua.

• Si $x = 30$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 30^-} T(x) = \lim\limits_{x \to 30^-} \dfrac{300}{x+30} = 5 \\ \lim\limits_{x \to 30^+} T(x) = \lim\limits_{x \to 30^+} \left(\dfrac{1\,125}{(x-5)(x-15)} + 2\right) = 5 \\ T(30) = 5 \end{array}\right\} \; T(x) \text{ es continua en } x = 30.$$

• Por tanto, $T(x)$ es continua en su dominio.

b) $T(0) = 10$ minutos; y, a mayor tiempo de entrenamiento, menos tardan en realizar la prueba. Además:

$$\lim_{x \to +\infty} T(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1\,125}{(x-5)(x-15)} + 2\right) = 2$$

Por tanto, ningún deportista sería capaz de realizar la prueba en menos de 1 minuto ni en menos de 2 minutos.

32 **Se ha comprobado que las pérdidas o ganancias de una empresa se ajustan a la función $y = \dfrac{2x-4}{x+2}$, siendo x los años de vida de la empresa $(x \ge 0)$ e y en cientos de miles de €.**

a) Representa la función.

b) ¿En qué año deja de tener pérdidas?

c) ¿Están limitados sus beneficios? Si lo están, ¿cuál es su límite?

a)

b) $\dfrac{2x-4}{x+2} = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ (y la función es creciente).

Deja de tener pérdidas en el 2º año $(x = 2)$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-4}{x+2} = 2 \rightarrow 200\,000$ €

El beneficio está limitado a 200 000 €.

33 **Un comerciante vende un determinado producto. Por cada unidad de producto cobra la cantidad de 5 €. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, disminuye el precio por unidad, y por cada x unidades cobra:**

$$C(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 < x \le 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

a) Halla a de forma que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran "muchísimas" unidades?

El precio de una unidad es $C(x)/x$.

a) $\lim\limits_{x \to 10^-} C(x) = \lim\limits_{x \to 10^-} (5x) = 50$

$\lim\limits_{x \to 10^+} C(x) = \lim\limits_{x \to 10^+} \sqrt{ax^2 + 500} = \sqrt{100a + 500}$

$C(10) = 50$

Para que sea continua, ha de ser:

$\sqrt{100a + 500} = 50 \rightarrow 100a + 500 = 2\,500 \rightarrow 100a = 2\,000 \rightarrow a = 20$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{C(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{ax^2 + 500}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{20x^2 + 500}}{x} = \sqrt{20} \approx 4{,}47$ €

UNIDAD DIDÁCTICA 06:
DERIVADAS. TÉCNICAS DE DERIVACIÓN

* Las numeraciones indicadas entre páginas se refieren a las páginas del libro de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II, de segundo de bachillerato de la editorial Anaya, Andalucía, cuyos autores son J. Colera, R. García y M.J.Oliveira

Página 164

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Definición de derivada

1 **Halla la tasa de variación media (TVM) de las siguientes funciones en los intervalos: [–3, –1]; [0, 2]; [2, 5]; [1, 1 + h]**

a) $f(x) = x^2 + 1$ **b)** $f(x) = 7x - 5$

c) $f(x) = 3$ **d)** $f(x) = 2^x$

¿En cuáles de ellas es constante la TVM? ¿Qué tipo de funciones son?

a) $f(x) = x^2 + 1$

En $[-3, -1]$ → $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = -4$

En $[0, 2]$ → $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = 2$

En $[2, 5]$ → $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = 7$

En $[1, 1 + h]$ → $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \dfrac{h^2 + 2h}{h} = -4$

b) $f(x) = 7x - 5$

En $[-3, -1]$ → $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = 7$

En $[0, 2]$ → $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = 7$

En $[2, 5]$ → $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = 7$

En $[1, 1 + h]$ → $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \dfrac{7h}{h} = 7$

c) $f(x) = 3$

En $[-3, -1]$ → $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = 0$

En $[0, 2]$ → $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = 0$

En $[2, 5]$ → $\text{T.V.M.} = \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = 0$

En [1, 1 + h] $\rightarrow$ T.V.M. $= \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0$

d) $f(x) = 2^x$

En [–3, –1] $\rightarrow$ T.V.M. $= \dfrac{f(-1) - f(-3)}{2} = \dfrac{3}{16}$

En [0, 2] $\rightarrow$ T.V.M. $= \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = \dfrac{3}{2}$

En [2, 5] $\rightarrow$ T.V.M. $= \dfrac{f(5) - f(2)}{3} = \dfrac{28}{3}$

En [1, 1 + h] $\rightarrow$ T.V.M. $= \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{2 \cdot (2h^2 - 1)}{h}$

La función b) $f(x) = 7x - 5$ es una función afín y la T.V.M. es constante.

La función c) $f(x) = 3$ es una función afín y la T.V.M. es 0 (constante).

2 **Halla la T.V.M. de la función $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ en el intervalo [2, 2 + h] y, con el resultado obtenido, calcula $f'(2)$.**

$f(x) = -x^2 + 5x - 3$ en [2, 2 + h]

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{-h^2 + h}{h} = -h + 1$$

$$f'(2) = \lim_{x \to 0^-} (-h + 1) = 1$$

3 **Utilizando la definición de derivada, calcula $f'(3)$ en las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{3x - 2}{2}$ **b)** $f(x) = x^2 - 4$ **c)** $f(x) = (x - 5)^2$ **d)** $f(x) = \dfrac{2 + x}{x}$

a) $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3h/7)}{h} = \dfrac{3}{7}$

b) $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 + 6h}{h} = 6$

c) $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 - 4h}{h} = -4$

d) $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2h}{9h + 3h^2} = \dfrac{-2}{9}$

4 **Calcula la función derivada de las siguientes funciones, utilizando la definición:**

a) $f(x) = \dfrac{5x + 1}{2}$ **b)** $f(x) = 3x^2 - 1$ **c)** $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ **d)** $f(x) = x^2 - x$

a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{5h}{2}}{h} = \dfrac{5}{2}$

b) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{3h^2 - 6xh}{h} = 6x$

c) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{-h}{(x-2)\cdot(x+h-2)\cdot h} =$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{-1}{(x-2)\cdot(x+h-2)} = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$

d) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{h^2 + 2xh - h}{h} = 2x - 1$

5 **Calcula, aplicando la definición de derivada, $f'(2)$, $f'(-1)$ y $f'(x)$, siendo $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$.**

- $f'(2) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{2+h-1}{2+h} - \dfrac{1}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{1+h}{2+h} - \dfrac{1}{2}}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{2+2h-2-h}{2(2+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{h}{2(2+h)h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{1}{2(2+h)} = \dfrac{1}{4}$

- $f'(-1) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{-1+h-1}{-1+h} - 2}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{-1+h-1+2-2h}{(-1+h)h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{-h}{(-1+h)h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{-1}{-1+h} = \dfrac{-1}{-1} = 1$

- $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{x+h-1}{x+h} - \dfrac{x-1}{x}}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{x^2+xh-x-x^2+x-xh+h}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{h}{(x+h)xh} = \lim_{h \to 0} \dfrac{1}{(x+h)x} = \dfrac{1}{x^2}$

6 **Comprueba, utilizando la definición de derivada, que la función $f(x) = \sqrt{x}$ no tiene derivada en $x = 0$.**

Intentamos hallar $f'(0)$ usando la definición de derivada:

$f'(0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{h}}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = \dfrac{1}{0} = \pm\infty$. Por tanto, $f(x) = \sqrt{x}$ no tiene derivada en $x = 0$.

7 **Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = e^x$ en el intervalo [2; 2,001] y comprueba que su valor está muy próximo a e^2.**

$$\text{T.V.M. } [2;\ 2{,}001] = \frac{f(2{,}001) - f(2)}{2{,}001 - 2} = \frac{e^{2{,}001} - e^2}{0{,}001} \simeq 7{,}3928$$

$e^2 \simeq 7{,}3891$. Los dos valores están muy próximos.

8 **Dada $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 2 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, halla $f'(1)$ y $f'(3)$ utilizando la definición de derivada.**

- $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[2(1 + h) - 3] - (-1)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 + 2h - 3 + 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h \to 0} 2 = 2$$
- $$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3 + h - 1) - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 + h - 1 - 2}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

Reglas de derivación

9 **Calcula la derivada de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$ **b)** $y = \dfrac{x + 1}{(2 - x)^2}$ **c)** $y = \dfrac{3x^2}{x + \sqrt{x}}$ **d)** $y = \left(0{,}5 - \dfrac{x}{10}\right)^4$

a) $$y' = \frac{2x \cdot (x^2 + 3) - (x^2 - 3) \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{12x}{(x^2 + 3)^2}$$

b) $$y' = \frac{(2 - x)^2 + (x + 1) \cdot 2(2 - x)}{(2 - x)^4} = \frac{x + 4}{(2 - x)^3}$$

c) $$y' = \frac{6x \cdot (x + \sqrt{x}) - 3x^2 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x + \sqrt{x})^2} = \frac{9x^2 + 6x^2 \cdot \sqrt{x})}{2\sqrt{x} \cdot (x + \sqrt{x})^2}$$

d) $$y' = \frac{-4}{10} \cdot \left(0{,}5 - \frac{x}{10}\right)^3 = \frac{-2}{5} \cdot \left(0{,}5 - \frac{x}{10}\right)^3$$

10 **Halla la derivada de estas funciones:**

a) $y = \dfrac{x^3}{(x + 1)^2}$ **b)** $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x}\right)^3$ **c)** $y = \dfrac{1}{sen\ x}$ **d)** $y = \dfrac{sen\ x}{cos\ x}$

a) $$y' = \frac{3x^2 \cdot (x + 1)^2 - x^3 \cdot 2 \cdot (x + 1)}{(x + 1)^4} = \frac{x^2 \cdot (x + 3)}{(x + 1)^3}$$

b) $$y' = 3 \cdot \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^2 \cdot \frac{2x \cdot x - (x^2 + 1)}{x^2} = 3 \cdot \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^2 \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

c) $y' = \dfrac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$ d) $y' = \dfrac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

11 **Deriva las funciones siguientes:**

a) $y = e^{4x}(x-1)$ **b)** $y = \dfrac{(1-x)^2}{e^x}$ **c)** $y = \sqrt{2^x}$ **d)** $y = \ln(2x-1)$

a) $y' = 4 \cdot e^{4x} \cdot (x-1) + e^{4x} \cdot 1 = e^{4x} \cdot (4x-3)$

b) $y' = \dfrac{-2 \cdot (1-x) \cdot e^x - (1-x)^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{-2 \cdot (1-x) - (1-x)^2}{e^x} = \dfrac{-x^2 + 4x - 3}{e^x}$

c) $y' = \dfrac{2^x \cdot \ln 2}{2\sqrt{2^x}} = \dfrac{2^{x-1} \cdot \ln 2}{\sqrt{2^x}}$

d) $y' = \dfrac{2}{2x-1}$

12 **Deriva estas funciones:**

a) $y = \ln(x^2-1)$ **b)** $y = \ln\sqrt{1-x}$ **c)** $y = \dfrac{\ln x}{e^x}$ **d)** $y = \operatorname{sen}^2 x^2$

a) $y' = \dfrac{2x}{x^2-1}$

b) $y' = \dfrac{\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{-1}{2(1-x)}$

c) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{x} \cdot e^x - \ln x \cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{\dfrac{1}{x} - \ln x}{e^x} = \dfrac{1 - x \cdot \ln x}{x \cdot e^x}$

d) $y' = 2x \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} x^2 \cdot \cos x^2 = 4x \cdot \operatorname{sen} x^2 \cdot \cos x^2$

13 **Calcula la derivada de estas funciones:**

a) $y' = 4 \cdot e^{4x} \cdot (x-1) + e^{4x} \cdot 1 = e^{4x} \cdot (4x-3)$

b) $y' = \dfrac{-2 \cdot (1-x) \cdot e^x - (1-x)^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{-2 \cdot (1-x) - (1-x)^2}{e^x} = \dfrac{-x^2 + 4x - 3}{e^x}$

c) $y' = \dfrac{2^x \cdot \ln 2}{2\sqrt{2^x}} = \dfrac{2^{x-1} \cdot \ln 2}{\sqrt{2^x}}$

d) $y' = \dfrac{2}{2x-1}$

14 Deriva las funciones siguientes:

a) $y = log_2 \frac{1}{x}$ **b)** $y = \sqrt[3]{sen\, x^2}$ **c)** $y = \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$ **d)** $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

a) $y = log_2 1 - log_2 x$

$$y' = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{ln\, 2}$$

b) $y' = \dfrac{2x \cdot cos\, x^2}{3\sqrt[3]{sen^2\, x^2}}$

c) $$y' = \frac{\frac{2 \cdot (1-2x) + (1+2x) \cdot 2}{(1-2x)^2}}{2 \cdot \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}} = \frac{\frac{4}{(1-2x)^2}}{2 \cdot \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}} =$$

$$= \frac{2}{(1-2x)^2 \cdot \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}} = \frac{2}{\sqrt{(1-2x)^3(1+2x)}}$$

d) $$y' = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2 \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4 \cdot \sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}}$$

15 Halla la derivada de:

a) $y = \sqrt{x\sqrt{x}}$ **b)** $y = ln \sqrt{\frac{x}{x+1}}$

c) $y = ln\,(sen \sqrt{e^x}\,)$ **d)** $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

a) $y = \sqrt[4]{x^3} \rightarrow y' = \dfrac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x}}$

b) $y = \dfrac{1}{2} \cdot (ln\, x - ln\,(x+1))$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{2x^2 + 2x}$$

c) $y' = \dfrac{e^{x/2} \cdot cos\, \sqrt{e^x}}{2 \cdot sen\, \sqrt{e^x}}$

d) $$y' = \frac{\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}}{2 \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1) \cdot (x+1)^3}}$$

Continuidad y derivabilidad

16 **Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican, y represéntalas:**

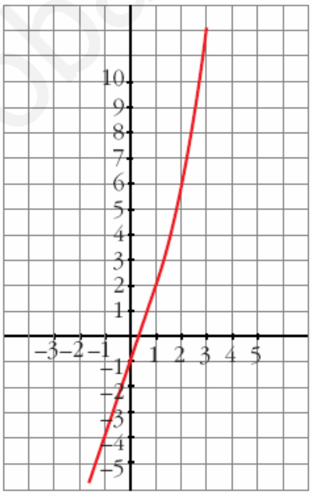
a) $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x<1 \\ x^2+x & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ **en** $x = 1$ **b)** $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ **en** $x = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x<3 \\ x^2-4 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$ **en** $x = 3$ **d)** $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{si } x\leq 2 \\ 3x+1 & \text{si } x> 2 \end{cases}$ **en** $x = 2$

a) **Continuidad en** $x = 1$**:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (3x-1) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2+x) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \; f(x) \text{ es continua en } x = 1.$$

Gráfico:



Derivabilidad en $x = 1$**:**

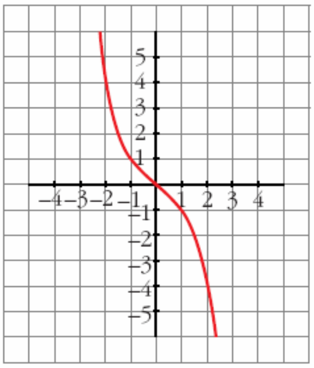
$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x<1 \\ 2x+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 3 \\ f'(1^+) = 3 \end{array}\right\} \; f(x) \text{ es derivable en } x = 1 \text{ y } f'(1) = 3.$$

b) **Continuidad en** $x = 0$**:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \; f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

Gráfico:



Derivabilidad en $x = 0$**:**

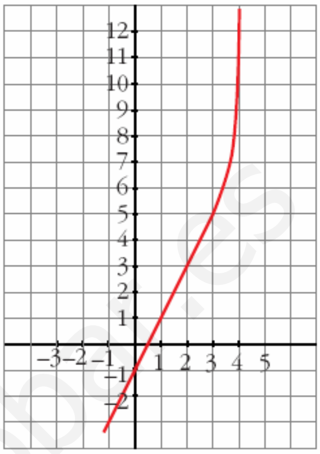
$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x<0 \\ 2x & \text{si } x>0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 0 \end{array}\right\} \; f(x) \text{ es derivable en } x = 0 \text{ y } f'(0) = 0.$$

c) **Continuidad en $x = 3$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x - 1) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x^2 - 4) = 5 \\ f(3) = 5 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x = 3.$$

Gráfico:



Derivabilidad en $x = 3$:

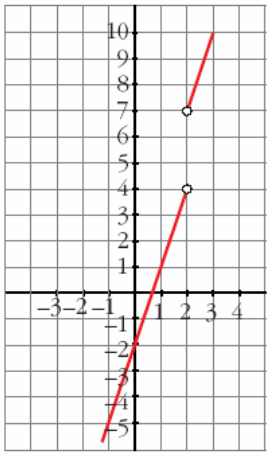
$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 3 \\ 2x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = 2 \\ f'(3^+) = 6 \end{array}\right\} f(x) \text{ } \textit{no} \text{ es derivable en } x = 3.$$

d) **Continuidad en $x = 2$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x - 2) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (3x + 1) = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f(x) \text{ no es continua} \\ \text{en } x = 2 \\ \text{(tiene una discontinui-} \\ \text{dad de salto finito).} \end{array}$$

Gráfico:



Derivabilidad en $x = 2$:

Como $f(x)$ no es continua en $x = 2$, tampoco es derivable en ese punto.

17 **Comprueba que $f(x)$ es continua, pero no derivable, en $x = 2$:**

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x - 1) & \text{si } x < 2 \\ 3x - 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Continuidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \ln(x - 1) = \ln 1 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (3x - 6) = 0 \\ f(2) = 0 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x = 2.$$

Derivabilidad en $x = 2$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 1 \\ f'(2^+) = 3 \end{array}\right\}$ Como las derivadas laterales no coinciden, $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

18 S **Estudia la continuidad y derivabilidad de esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Continuidad:

- **Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$** $\rightarrow$ Es continua, pues está formada por funciones continuas.
- **En $x = 0$:**

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$. Por tanto, la función es continua en $x = 0$.

- **En $x = 1$:**

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$. Por tanto, la función es continua en $x = 1$.

La función es continua en $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$** $\rightarrow$ La función es derivable. Su derivada es, en esos puntos:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = 0 = f'(0^+)$. Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$; y $f'(0) = 0$.

- **En $x = 1$:**

$f'(1^-) = 2 \neq f'(1^+) = 1$. Por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

19 **Prueba que la función $f(x) = |x + 1|$ no es derivable en $x = -1$.**

Continuidad en $x = 2$:

$$f(x) = |x + 1| = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \le -1 \\ x + 1 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$$

$f(x)$ es una función continua, pues es la composición de dos funciones continuas. Su derivada, si $x \ne -1$, es:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Las derivadas laterales en $x = -1$ son:

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1^-) = -1 \\ f'(-1^+) = 1 \end{array}\right\} \text{No coinciden; por tanto, } f(x) \text{ no es derivable en } x = -1.$$

20 **Estudia la continuidad y derivabilidad de la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Continuidad:

Si $x \ne 1$ $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.

En $x = 1$ $\rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x - 1) = 0 \\ f(1) = 0 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x = 1.$$

Por tanto, $f(x)$ es una función continua.

Derivabilidad:

Si $x \ne 1$: $f(x)$ es derivable y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En $x = 1$: Hallamos las derivadas laterales:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 2 \\ f'(1^+) = 1 \end{array}\right\} \text{No coinciden, luego, } f(x) \text{ } \textit{no} \text{ es derivable en } x = 1.$$

21 **Estudia la continuidad y derivabilidad de esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Continuidad:

Si $x \neq 0$: $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

En $x = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^{-x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (1 - x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

Por tanto, $f(x)$ es una función continua.

Derivabilidad:

Si $x \neq 0$: $f(x)$ es derivable y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

En $x = 0$: Hallamos las derivadas laterales:

$$\left. \begin{array}{l} f'(-0^-) = -1 \\ f'(-0^+) = -1 \end{array} \right\} \text{Coinciden, luego, } f(x) \text{ es derivable en } x = 0.$$

Por tanto, $f(x)$ es una función derivable.

22 **¿En qué puntos no es derivable la función $f(x) = |x^2 - 4|$?**

$f(x)$ es una función continua, pues es la composición de funciones continuas. La definimos a trozos:

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Si $x \neq -2$ y $x \neq 2$, $f'(x)$ es derivable y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En $x = -2$: Hallamos las derivadas laterales:

$$\left. \begin{array}{l} f'(-2^-) = -4 \\ f'(-2^+) = 4 \end{array} \right\} f(x) \textit{ no} \text{ es derivable en } x = -2.$$

En $x = 2$: Hallamos las derivadas laterales:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = -4 \\ f'(2^+) = 4 \end{array}\right\} \quad f(x) \ \textit{no} \text{ es derivable en } x = -2.$$

Por tanto, $f'(x)$ no es derivable en los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

PARA RESOLVER

23 **Dada $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \le 2 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$:**

a) Calcula $f'(1)$ y $f'(3)$.

b) Comprueba que $f'(2^-) \neq f'(2^+)$.

Si $x \neq -2$: $f'(x)$ es una función continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.

En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x - 1) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 + 1) = 5 \\ f(2) = 5 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x = 2.$$

Por tanto, $f(x)$ es una función continua.

Si $x \neq 2$: $f(x)$ es derivable y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

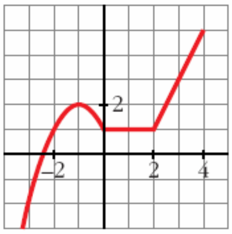
a) $f'(1) = 3$; $f'(3) = 6$

b) $\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 3 \\ f'(2^+) = 4 \end{array}\right\}$ no coinciden

24 **Esta es la gráfica de una función $y = f(x)$. Observándola, di el valor de:**

$$f'(-1), f'(1) \text{ y } f'(3)$$

¿En qué puntos no es derivable?



$f'(-1) = 0$; $f'(1) = 0$; $f'(3) = 2$

No es derivable en $x = 0$ ni en $x = 2$.

25 **¿Cuántos puntos hay en esta función que no tengan derivada?**

$$y = |x^2 + 6x + 8|$$

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = -2 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \text{si} \quad x < -4 \\ -x^2 - 6x - 8 & \text{si} \quad -4 \le x \le 4 \\ x^2 + 6x + 8 & \text{si} \quad x > -2 \end{cases} \qquad y' = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si} \quad x < -4 \\ -2x - 6 & \text{si} \quad -4 < x < -2 \\ 2x + 6 & \text{si} \quad x > -2 \end{cases}$$

La función es continua, pues es el valor absoluto de una función continua.

En $x = -4 \rightarrow y'(-4^-) = -2 \neq y'(-4^+) = 2$

En $x = -2 \rightarrow y'(-2^-) = -2 \neq y'(-2^+) = 2$

La función no es derivable en $x = -4$ ni en $x = -2$; es decir, en $(-4, 0)$ y en $(-2, 0)$. Son dos puntos "angulosos".

26 **S** **Calcula a y b para que la siguiente función sea derivable en todo ℝ:**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1x & \text{si} \quad x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable, en primer lugar, ha de ser continua.

- **Si $x \neq 2$** $\rightarrow$ La función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- **En $x = 2$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 - bx - 4) = -2b \\ f(2) = 4a + 6 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser $4a + 6 = -2b$, es decir, $2a + 3 = b$, o bien $b = -2a - 3$.

Derivabilidad:

Si $x \neq 2$ $\rightarrow$ la función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{si} \quad x < 2 \\ 2x - b & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4a + 3 \\ f'(2^+) = 4 - b \end{array}\right\}$$ Para que sea derivable ha de ser $4a + 3 = 4 - b$, es decir, $b = -4a + 1$.

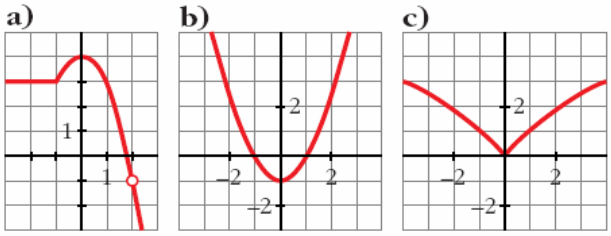
Teniendo en cuenta las dos condiciones obtenidas:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4a + 3 \\ f'(2^+) = 4 - b \end{array}\right\}$$

Por tanto, para que $f'(x)$ sea derivable en todo ℝ, ha de ser $a = 2$ y $b = -7$.

27 **Observa las gráficas de las siguientes funciones e indica en qué puntos no son derivables.**

¿Alguna de ellas es derivable en todo $\mathbb{R}$?



a) No es derivable en $x = -1$ (tiene un punto "anguloso") ni en $x = 2$ (no está de
finida la función).

b) Es derivable en todo $\mathbb{R}$

c) No es derivable en $x = 0$ (tiene un punto "anguloso").

28 **S** **La función $f(x)$ está definida por:** $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si} \quad x \le 0 \\ ax + b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

Calcula a y b para que f sea continua y derivable.

Continuidad:

- **En $x \neq 0$** $\rightarrow$ La función es continua, pues está formada por dos polinomios

- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^3 - x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax + b) = b \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \text{Para que sea continua ha de ser } b = 0$$

Derivabilidad:

Si $x \neq 0$: $\rightarrow$ La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^3 - 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ a & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(-0^-) = -1 \\ f'(-0^+) = a \end{array}\right\} \text{Para que sea derivable, ha de ser } a = -1.$$

Por tanto, $f'(x)$ será continua y derivable si $a = -1$ y $b = 0$.

29 **S** **La función $f(x)$ está definida de la siguiente manera:**

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0 \\ 1, & 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2, & x \ge 3 \end{cases}$$

Estudia su continuidad y derivabilidad.

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0 \\ 1, & 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2, & x > 1 \end{cases}$$

Continuidad:

Si $x \neq 0$ y $x \neq 3$ $\rightarrow$ Es continua, pues está formada por funciones continuas.

En $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0). \text{ La función es continua en } x = 0.$$

En $x = 3$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (-x^2 + 3x + 2) = 2 \\ f(3) = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)\, f(0). \\ \text{No es continua en } x = 3. \end{array}$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$.

Derivabilidad:

Si $x \neq 0$ y $x \neq 3$. Es derivable y:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ 1, & 0 < x < 3 \\ -2x + 3, & x > 3 \end{cases}$$

En $x = 0$

$f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = 0 \rightarrow$ No es derivable en $x = 0$.

En $x = 3$ $\rightarrow$ No es derivable pues no es continua.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{0, 3\}$.

Página 166

30 **Averigua para qué valores de x es $f'(x) = 0$ en cada una de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{x^2(3x-8)}{12}$ **b)** $f(x) = x^4 + 2x^2$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ **d)** $f(x) = e^x(x-1)$

a) $f(x) = \dfrac{3x^3 - 8x^2}{12} \rightarrow f'(x) = \dfrac{9x^2 - 16x}{12}$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 9x^2 - 16x = 0 \rightarrow x(9x - 16) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{16}{9} \end{cases}$$

b) $f'(x) = 4x^3 + 4x = 4x\,(x^2 + 1)$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 4x(x^2+1) = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

c) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

d) $f'(x) = e^x(x-1) + e^x \cdot 1 = e^x\,(x-1+1) = e^x\,x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

31 **Halla los puntos en los que la pendiente de la recta tangente es igual a 0 en cada una de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ **c)** $f(x) = \dfrac{2x^2-3x}{2-x}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

Debemos hallar los puntos en los que $f'(x) = 0$ en cada caso:

a) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-1)-(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2x^3-2x-2x^3-2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -4x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = -1$ Punto $(0, -1)$

b) $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^4-3x^2 = 0 \;\rightarrow\; x^2(x^2-3) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; (0, 0) \\ x^2-3 = 0 \begin{cases} x = -\sqrt{3} \;\rightarrow\; \left(-\sqrt{3}, \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right) \\ x = \sqrt{3} \;\rightarrow\; \left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases} \end{cases}$$

c) $f'(x) = \dfrac{(4x-3)(2-x)-(2x^2-3x)\cdot(-1)}{(2-x)^2} = \dfrac{8x-4x^2-6+3x+2x^2-3x}{(2-x)^2} =$

$= \dfrac{-2x^2+8x-6}{(2-x)^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x^2+8x-6 = 0 \;\rightarrow\; x^2-4x+3 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = 1 \;\rightarrow\; (1, -1) \\ x = 3 \;\rightarrow\; (3, -9) \end{cases}$$

d) $f'(x) = \dfrac{2x\cdot x-(x^2+1)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{2x^2-x^2-1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2-1 = 0 \begin{cases} x = -1 \;\rightarrow\; (-1, -2) \\ x = 1 \;\rightarrow\; (1, 2) \end{cases}$$

32 **Averigua si en las siguientes funciones existen puntos en los que $f'(x) = 0$:**

a) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+1}$ **c)** $f(x) = \ln(x+1)$ **d)** $f(x) = 10-(x-2)^4$

a) $f'(x) = \dfrac{2(x+1)-(2x-3)\cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{2x+2-2x+3}{(x+1)^2} = \dfrac{5}{(x+1)^2}$

$f'(x) \neq 0$ para cualquier valor de x.

b) $f'(x) = \dfrac{6(x^2+1) - 6x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{6x^2+6-12x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-6x^2+6}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow -6x^2 + 6 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \rightarrow (-1, -3) \\ x = 1 \rightarrow (1, 3) \end{cases}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} \neq 0$ para cualquier valor de x.

d) $f'(x) = -4(x-2)^3$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 10)$

33 **Las siguientes funciones tienen algún punto donde la derivada no existe. Hállalos en cada caso:**

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **b)** $f(x) = \sqrt{x+2}$ **c)** $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

d) $f(x) = |x-3|$ **e)** $f(x) = \left|\dfrac{4x-5}{2}\right|$ **f)** $f(x) = |x^2 - 2x|$

a) $f(x) = x^{1/3} \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f'(x)$ no existe si $x = 0$; es decir, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$

$f'(x)$ no existe si $x = -2$; el dominio de $f(x)$ es $[-2, +\infty)$.

Por tanto, en los puntos en los que la función está definida, no es derivable en $x = -2$.

c) El dominio de la función es $[-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

$f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

En los puntos en los que $f(x)$ está definida, no es derivable en $x = -1$ ni en $x = 1$.

d) $f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x < 3 \\ x-3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$; pero no es derivable en $x = 3$, pues sus derivadas laterales no coinciden:

$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = -1 \\ f'(3^+) = 1 \end{array}\right\}$ Son distintas.

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-4x+5}{2} & \text{si } x < \dfrac{5}{4} \\ \dfrac{4x-5}{2} & \text{si } x \geq \dfrac{5}{4} \end{cases}$ $f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 5/4 \\ 2 & \text{si } x > 5/4 \end{cases}$

$f(x)$ es continuo en $\mathbb{R}$; pero no es derivable en $x = \dfrac{5}{4}$, pues sus derivadas laterales no coinciden:

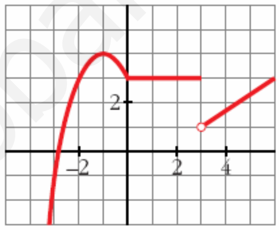
$$\left.\begin{array}{l} f'(5/4^-) = -2 \\ f'(5/4^+) = 2 \end{array}\right\} \text{Son distintas}$$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ -x^2 + 2x & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$ $\qquad f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ -2x + 2 & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ 2x - 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

$f(x)$ es continuo en $\mathbb{R}$; pero no es derivable en $x = 0$ ni en $x = 0$, pues sus derivadas laterales no coinciden:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -2 \\ f'(0^+) = 2 \end{array}\right\} \text{Son distintas} \qquad \left.\begin{array}{l} f'(2^-) = -2 \\ f'(2^+) = 2 \end{array}\right\} \text{Son distintas}$$

34 **Esta es la gráfica de una función $y = f(x)$. Estudia su continuidad y derivabilidad.**



$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$. En $x = 3$ presenta una discontinuidad de salto finito.

$f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0, 3\}$. En $x = 0$ hay un punto anguloso (las derivadas laterales no coinciden) y en $x = 3$ no es continua, por tanto, no puede ser derivable.

35 **Considera la función:** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si} \quad x \le 1 \\ -x^2 + nx & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

Calcula m y n para que f sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

Continuidad:

- **Si $x \ne 1$:** $f(x)$ es continua, pues está formada por polinomios, que son funciones continuas.
- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 5x + m) = -4 + m \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (-x^2 + nx) = -1 + n \\ f(1) = -4 + m \end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, ha de ser $-4 + m = -1 + n$.

Derivabilidad:

- **Si $x \ne 1$:** $f(x)$ es derivable y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si} \quad x < 1 \\ -2x + n & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

- **En $x = 1$:** Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 1$, las derivadas laterales han de coincidir, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = -3 \\ f'(1^+) = -2 + n \end{array}\right\} -3 = -2 + n$$

Uniendo las dos condiciones anteriores tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} -4 + m = -1 + n \\ -3 = -2 + n \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} m = n + 3 \\ n = -1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} m = 2 \\ n = -1 \end{array}$$

36 **Estudia la continuidad y derivabilidad de esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿Existe algún punto en el que $f'(x) = 0$? Represéntala gráficamente.

Continuidad:

- **En $x \neq 1$:** La función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2x - 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1). \text{ Por tanto, la función es continua en } x = 1.$$

La función es continua en todo $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 1$:** La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- **En $x = 1$:**

$f'(1^-) = 4 \neq f'(1^+) = 1$

La función no es derivable en $x = 1$.

Por tanto, la función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

Puntos en los que $f'(x) = 0$:

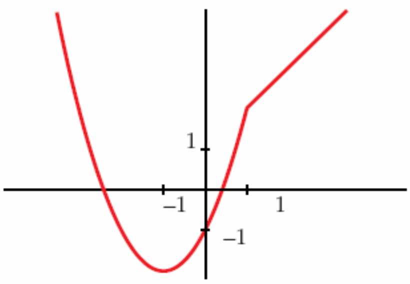
$f'(x) = 2x + 2$ si $x < 1$

$2x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$

$f'(x) = 1$ si $x > 1 \quad \rightarrow \quad f'(x) \neq 0$ si $x > 1$

Por tanto, la derivada se anula en $x = -1$.

Gráfica de $f(x)$:



37 **Halla a y b para que la función $f(x)$ sea continua:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos, estudia la derivabilidad de f.

- **Si $x \ne -1$ y $x \ne 0$:** La función es continua, pues está formada por polinomios.
- **En $x = -1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + a) = -2 + a \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (ax + b) = -a + b \\ f(-1) = -a + b \end{array}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser $-2 + a = -a + b$, es decir: $b = 2a - 2$.

- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax + b) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (3x^2 + 2) = 2 \\ f(0) = 2 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser $b = 2$.

Por tanto, $f(x)$ será continua si $a = 2$ y $b = 2$.

Para estos valores, queda:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x < 0; \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \le x \end{cases} \text{ es decir:}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Derivabilidad:

- **Si $x \ne 0$:** Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 6x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = 2 \ne f'(0^+) = 0$

La función no es derivable en $x = 0$.

Por tanto, es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

38 **Calcula $f'(0)$, siendo $f(x) = ln \sqrt{\dfrac{e^x + e^{-x}}{2x + 1}}$.**

☛ ***Aplica las propiedades de los logaritmos antes de derivar.***

Hallamos $f'(x)$ y después sustituimos en $x = 0$.

$$f(x) = \frac{1}{2}\,[ln(e^x + e^{-x}) - ln(2x + 1)]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - \frac{2}{2x + 1}\right]$$

$$f'(0) = \frac{1}{2} = (-2) = -1$$

39 **Halla la pendiente de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos indicados:**

a) $y = sen\,x\,cos\,x$ **en** $x = \dfrac{\pi}{4}$ **b)** $y = x\,ln\,x$ **en** $x = e$

c) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$ **en** $x = 0$ **y** $x = 1$ **d)** $y = e^{x^2-1}$ **en** $x = 1$

Debemos hallar la derivada en los puntos indicados en cada caso:

a) $y' = cos x \cdot cos x + sen x(-sen x) = cos^2 x + sen^2 x$

$$y' = \left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

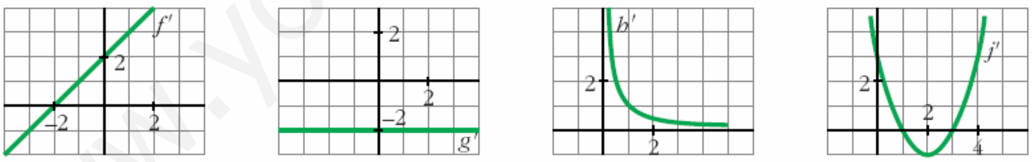
b) $y' = 1 \cdot ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = ln x + 1;\quad y'(e) = ln\, e + 1 = 1 + 1 = 2$

c) $y' = \dfrac{2xe^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{e^x(2x - x^2)}{(e^x)^2} = \dfrac{2x - x^2}{e^x}$

$$y'(0) = 0;\quad y'(1) = \frac{1}{e}$$

d) $y' = 2xe^{x^2-1};\quad y' = (1) = 2$

40 **Estas gráficas representan las funciones derivadas de las funciones** ***f, g, h*** **y** ***j*****:**



a) ¿Cuáles de estas funciones tienen puntos de tangente horizontal?

b) ¿Cuál de estas gráficas es la función derivada de una función polinómica de primer grado?

c) ¿Cuál de ellas corresponde a una función polinómica de segundo grado?

a) Los puntos de tangente horizontal son los puntos en los que se anula la derivada.

f tiene un punto de tangente horizontal en $x = -2$, pues $f'(-2) = 0$.

j tiene dos puntos de tangente horizontal en $x = 1$ y en $x = 3$, pues $j'(1) = j'(3) = 0$.

g y h no tienen ningún punto de tangente horizontal.

b) La derivada de una función polinómica de primer grado es una función constante. Por tanto, es g'.

c) La derivada de una función polinómica de segunda grado es una función polinómica de primer grado. Por tanto, es f'.

UNIDAD DIDÁCTICA 07:
APLICACIONES DE LA DERIVADA.

* Las numeraciones indicadas entre páginas se refieren a las páginas del libro de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II, de segundo de bachillerato de la editorial Anaya, Andalucía, cuyos autores son J. Colera, R. García y M.J.Oliveira

Página 182

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Recta tangente

1 **Halla la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos cuya abscisa se indica:**

a) $y = \dfrac{1-3x^2}{2}$ en $x = 1$ b) $y = 0{,}3x - 0{,}01x^2$ en $x = 10$

c) $y = \sqrt{x+12}$ en $x = -3$ d) $y = \dfrac{1}{x}$ en $x = 2$

e) $y = \dfrac{x+5}{x-5}$ en $x = 3$ f) $y = sen^2\, x$ en $x = \dfrac{\pi}{2}$

g) $y = e^{-x}$ en $x = 0$ h) $y = sen\, x\, cos\, x$ en $x = \dfrac{\pi}{4}$

i) $y = ln\,(x+1)$ en $x = 0$ j) $y = x\, ln\, x$ en $x = e$

a) • Ordenada en el punto: $x = 1 \rightarrow y = -1$

• Pendiente de la recta: $y' = -3x \rightarrow y'(1) = -3$

Recta tangente: $y = -1 - 3 \cdot (x-1) = -3x + 2$

b) • Ordenada en el punto: $x = 10 \rightarrow y = 2$

• Pendiente de la recta: $y' = 0{,}3 - 0{,}02x \rightarrow y'(10) = 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}1$

Recta tangente: $y = 2 + 0,1 \cdot (x - 10) = 0,1x + 1$

c) • Ordenada en el punto: $x = -3 \quad \to \quad y = 3$

• Pendiente de la recta: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+12}} \quad \to \quad y'(-3) = \dfrac{1}{6}$

Recta tangente: $y = 3 + \dfrac{1}{6}(x + 3) = \dfrac{1}{6}x + \dfrac{7}{2}$

d) • Ordenada en el punto: $x = 2 \quad \to \quad y = \dfrac{1}{2}$

• Pendiente de la recta: $y' = \dfrac{-1}{x^2} \quad \to \quad y'(2) = \dfrac{-1}{4}$

Recta tangente: $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} \cdot (x - 2) = \dfrac{-1}{4}x + 1$

e) • Ordenada en el punto: $x = 3 \quad \to \quad y = -4$

• Pendiente de la recta: $y' = \dfrac{-10}{(x-5)^2} \quad \to \quad y'(3) = \dfrac{-10}{4} = \dfrac{-5}{2}$

Recta tangente: $y = -4 - \dfrac{5}{2} \cdot (x - 3) = \dfrac{-5}{2}x + \dfrac{7}{2}$

f) • Ordenada en el punto: $x = \dfrac{\pi}{2} \quad \to \quad y = 1$

• Pendiente de la recta: $y' = 2 \cdot sen\, x \cdot cos\, x \quad \to \quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

Recta tangente: $y = 1$

g) • Ordenada en el punto: $x = 0 \quad \to \quad y = 1$

• Pendiente de la recta: $y' = -e^{-x} \quad \to \quad y'(0) = -1$

Recta tangente: $y = 1 - 1 \cdot x = -x + 1$

h) • Ordenada en el punto: $x = \dfrac{\pi}{4} \quad \to \quad y = \dfrac{1}{2}$

• Pendiente de la recta: $y' = cos^2\, x - sen^2\, x \quad \to \quad y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

Recta tangente: $y = \dfrac{1}{2}$

i) • Ordenada en el punto: $x = 0 \quad \to \quad y = 0$

• Pendiente de la recta: $y' = \dfrac{1}{x+1} \quad \to \quad y'(0) = 1$

Recta tangente: $y = x$

j) • Ordenada en el punto: $x = e \;\rightarrow\; y = e$

• Pendiente de la recta: $y' = ln\, x + 1 \;\rightarrow\; y'(e) = 2$

Recta tangente: $y = e + 2 \cdot (x - e) = 2x - e$

2 **S** **Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y = x^2 + 4x + 1$, que es paralela a la recta $4x - 2y + 5 = 0$.**

Calculamos la pendiente de la recta $4x - 2y + 5 = 0$:

$$4x - 2y + 5 = 0 \;\rightarrow\; y = 2x + \frac{5}{2} \;\rightarrow\; \text{Pendiente } 2.$$

$$y' = 2x + 4 = 2 \;\rightarrow\; x = -1$$

La recta tangente tiene pendiente 2 y pasa por $(-1, -2)$:

$$y = -2 + 2 \cdot (x + 1) = 2x \;\rightarrow\; y = 2x$$

3 **S** **Halla las tangentes a la curva $y = \dfrac{2x}{x - 1}$ paralelas a la recta $2x + y = 0$.**

La pendiente de la recta $2x + y = 0$ es $m = -2$.

Buscamos los puntos en los que la derivada sea igual a -2:

$$y' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{-2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$y' = -2 \;\rightarrow\; \frac{-2}{x^2 - 2x + 1} = -2 \;\rightarrow\; -2 = -2(x^2 - 2x + 1)$$

$$x^2 - 2x + 1 \;\rightarrow\; x^2 - 2x = 0 \;\rightarrow\; x(x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto } (0, 0) \\ x = 2 \;\rightarrow\; \text{Punto } (2, 4) \end{cases}$$

Recta tangente en $(0, 0)$: $y = -2x$

Recta tangente en $(2, 4)$: $y = 4 - 2(x - 2) \;\rightarrow\; y = -2x + 8$

4 **S** **Escribe las ecuaciones de las tangentes a la función $y = 4x - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.**

Los puntos de corte son $(0, 0)$ y $(4, 0)$.

$$y' = 4 - 2x \begin{cases} y'(0) = 4 \;\; \text{pendiente en } (0, 0) \\ y'(4) = -4 \;\; \text{pendiente en } (4, 0) \end{cases}$$

Rectas tangentes:

En $(0, 0) \;\rightarrow\; y = 4x$

En $(4, 0) \;\rightarrow\; y = -4 \cdot (x - 4) = -4x + 16$

5 **Halla los puntos de tangente horizontal en las siguientes funciones y escribe la ecuación de la tangente en esos puntos:**

a) $y = x^3 - 2x^2 + x$ **b)** $y = -x^4 + x^2$

c) $y = \dfrac{6x}{x^2+1}$ **d)** $y = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x}$

a) $y' = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \begin{cases} x = 1 \rightarrow y = 0 \\ x = 1/3 \rightarrow y = 4/27 \end{cases}$

b) $y' = -4x^3 + 2x = x \cdot (-4x^2 + 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = +\sqrt{2}/2 \rightarrow y = 1/4 \\ x = -\sqrt{2}/2 \rightarrow y = 1/4 \end{cases}$

c) $y' = \dfrac{6 \cdot (x^2+1) - 6x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow -6x^2 + 6 = 0 \begin{cases} x = 1 \rightarrow y = 3 \\ x = -1 \rightarrow y = -3 \end{cases}$

d) $y' = \dfrac{(2x-5) \cdot x - (x^2 - 5x + 4) \cdot 1}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = 2 \rightarrow y = -1 \\ x = -2 \rightarrow y = -9 \end{cases}$

6. **Dada la parábola $y = -x^2 + 4x - 3$:**

a) Halla la pendiente de la recta r que une los puntos de la parábola de abscisas $x = 0$ y $x = 3$.

b) Escribe la ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a la recta r del apartado a).

a) El punto de la parábola de abscisa $x = 0$ es el $(0, -3)$ y el de $x = 3$ es el $(3, 0)$.

Por tanto, la pendiente de la recta que los une es:

$$m = \frac{3-0}{0-(-3)} = \frac{3}{3} = 1$$

La ecuación de la recta es $y = x - 3$.

b) Cualquier paralela a la recta r de a) será de la forma $y = x + k$. Como debe ser tangente a la parábola:

$$\left.\begin{array}{l} y = x + k \\ y = -x^2 + 4x - 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x + k = -x^2 + 4x - 3 \\ x^2 - 3x + (3x + k) = 0 \end{array}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (3+k)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-3-4k}}{2}$$

Para que la solución sea única, el discriminante tiene que ser nulo:

$-3 - 4k = 0 \;\rightarrow\; -3 = 4k \;\rightarrow\; k = \frac{-3}{4}$

Por tanto, la recta pedida es $y = x - \frac{3}{4}$ tangente a la parábola en el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

Máximos y mínimos. Puntos de inflexión

7 **Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - 3x^2 + 9x + 22$ **b)** $y = \frac{x^3(3x-8)}{12}$ **c)** $y = x^4 - 2x^3$

d) $y = x^4 + 2x^2$ **e)** $y = \frac{1}{x^2+1}$ **f)** $y = e^x(x-1)$

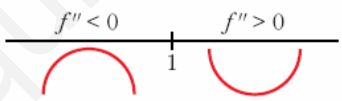
a) $y = x^3 - 3x^2 + 9x + 22$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 9$

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 3x^2 - 6x + 9 = 0 \;\rightarrow\;$ No tiene solución.

No tiene ni máximos ni mínimos.

$f''(x) = 6x - 6 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$

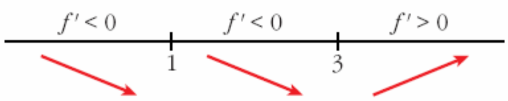


Hay un punto de inflexión en $(1, 29)$.

b) $y = \frac{3x^4 - 8x^3}{12}$

$f'(x) = \frac{12x^3 - 24x^2}{12} = x^3 - 2x^2$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x-2) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 2 \;\rightarrow\; y = -(4/3) \end{cases}$



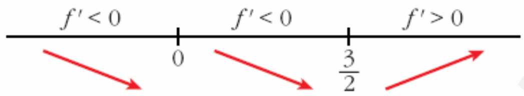
Hay un mínimo en $\left(2, \frac{-4}{3}\right)$.

$f''(x) = 3x^2 - 4x = 0 \;\rightarrow\; x(3x-4) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 4/3 \;\rightarrow\; y = -(64/81) \end{cases}$

Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y otro en $\left(\frac{4}{3}, \frac{-64}{81}\right)$.

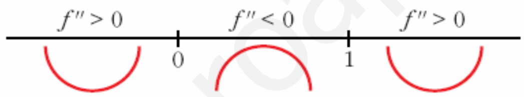
c) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(4x - 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 3/2 \rightarrow y = -(27/16) \end{cases}$$



Hay un mínimo en $\left(\frac{3}{2}, \frac{-27}{16}\right)$.

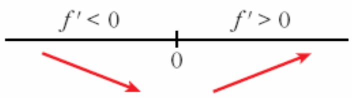
$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 1 \rightarrow y = -1 \end{cases}$$



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y otro en $(1, -1)$.

d) $f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 4x(x^2 + 1) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0$



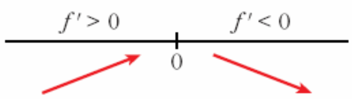
Hay un mínimo en $(0, 0)$.

$f''(x) = 12x^2 + 4 \neq 0$ para todo x.

No hay puntos de inflexión.

e) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 1$



Hay un máximo en $(0, 1)$.

$$f''(x) = \frac{-2(x^2 + 1)^2 + 2x \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-2(x^2 + 1) + 8x^2}{(x^2 + 1)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; y = \frac{3}{4}$$

$f'' > 0$ $\quad$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad$ $f'' < 0$ $\quad$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad$ $f'' > 0$

Hay un punto de inflexión en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$ y otro en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$.

f) $f'(x) = e^x(x-1) + e^x = e^x(x-1+1) = xe^x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; xe^x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$ (pues $e^x \neq 0$ para todo x)

$y = -1$

$f'' < 0$ $\quad$ 0 $\quad$ $f'' > 0$

Hay un mínimo en $(0, -1)$.

$f''(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = -1 \;\rightarrow\; y = \frac{-2}{e}$

$f'' < 0$ $\quad$ -1 $\quad$ $f'' > 0$

Hay un punto de inflexión en $\left(-1, \frac{-2}{e}\right)$.

8 **Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones y di si tienen máximos o mínimos:**

a) $y = \frac{1}{x^2-4}$ $\qquad$ **b)** $y = \frac{2x-3}{x+1}$ $\qquad$ **c)** $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ $\qquad$ **d)** $y = \frac{x^2-1}{x}$

a) $y = \frac{1}{x^2-4}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-4)^2} = 0 \;\rightarrow\; x = 0$$

Signo de la derivada:

$f' > 0$ $\quad$ -2 $\quad$ $f' > 0$ $\quad$ 0 $\quad$ $f' < 0$ $\quad$ 2 $\quad$ $f' < 0$

La función: crece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

decrece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

tiene un máximo en $\left(0, \dfrac{-1}{4}\right)$

b) $y = \dfrac{2x-3}{x+1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - (2x-3)}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x+3}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$$

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq -1$.

Por tanto, la función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

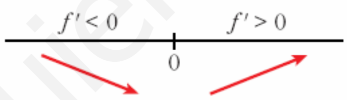
No tiene máximos ni mínimos.

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x \cdot x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x) > 0 \;\rightarrow\; 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de la derivada:



La función: decrece en $(-\infty, 0)$

crece en $(0, +\infty)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$

d) $y = \dfrac{x^2-1}{x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2-1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$$

$f'(x) \neq 0$ para todo $x \neq 0$.

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.

La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

No tiene máximos ni mínimos.

9 **Halla los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{8-3x}{x(x-2)}$ **b)** $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

d) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$ **e)** $y = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x(x-3)(x-4)}$ **f)** $y = \dfrac{8}{x^2(x-3)}$

a) $y = \dfrac{8 - 3x}{x(x-2)} = \dfrac{8-3x}{x^2 - 2x}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0, 2\}$

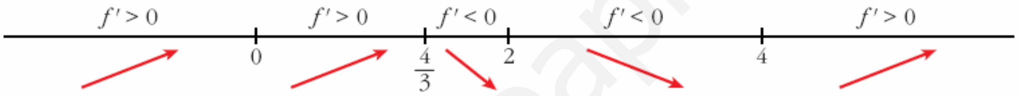
$$f'(x) = \frac{-3(x^2 - 2x) - (8 - 3x) \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{-3x^2 + 6x - 16x + 16 + 6x^2 - 6x}{(x^2 - 2x)^2} =$$

$$= \frac{-3x^2 - 16x + 16}{(x^2 - 2x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 16x + 16 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 192}}{6} = \frac{16 \pm \sqrt{64}}{6} =$$

$$= \frac{16 \pm 8}{6} \begin{cases} x = 4 \\ x = 4/3 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, 0) \cup \left(0, \dfrac{4}{3}\right) \cup (4, +\infty)$

es decreciente en $\left(\dfrac{4}{3}, 2\right) \cup (2, 4)$

tiene un máximo en $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{9}{2}\right)$

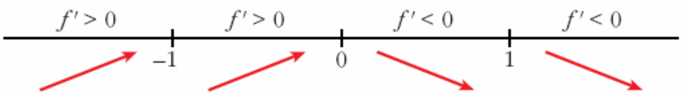
tiene un mínimo en $\left(4, -\dfrac{1}{2}\right)$

b) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -4x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

tiene un máximo en $(0, -1)$

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(x^2-3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

Signo de la derivada:

$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$f' > 0$	$f' < 0$	$f' < 0$	$f' < 0$	$f' < 0$	$f' > 0$
↗	↘	↘	↘	↘	↗

La función: es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

es decreciente en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

tiene un máximo en $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

tiene un mínimo en $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$

d) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{(4x-3)\cdot(2-x) - (2x^2-3x)\cdot(-1)}{(2-x)^2} = \frac{8x - 4x^2 - 6 + 3x + 2x^2 - 3x}{(2-x)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2 + 8x - 6}{(2-x)^2} = \frac{-2(x^2 - 4x + 3)}{(2-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de la derivada:

$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
$f' < 0$	$f' > 0$	$f' > 0$	$f' < 0$
↘	↗	↗	↘

La función: es creciente en $(1, 2) \cup (2, 3)$

es decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

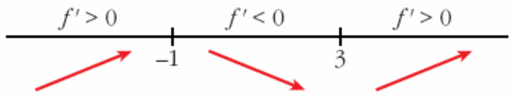
tiene un mínimo en $(1, -1)$

tiene un máximo en $(3, -9)$

e) $y = x^3 - 3x^2 - 9x$. *Dominio* $= \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$



La función: es creciente en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

es decreciente en $(-1, 3)$

tiene un máximo en $(-1, 5)$

tiene un mínimo en $(3, -27)$

f) $y = \dfrac{8}{x^2(x-3)} = \dfrac{8}{x^3 - 3x^2}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0, 3\}$

$$f'(x) = \frac{-8(3x^2 - 6x)}{x^4(x-3)^2} = \frac{-8x(3x-6)}{x^4(x-3)^2} = \frac{-8(3x-6)}{x^3(x-3)^2}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x - 6 = 0 \rightarrow x = 2$

Signo de la derivada:

La función: es creciente en $(0, 2)$

es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$

tiene un máximo en $(2, -2)$

10 **Estudia la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - 3x + 4$ **b)** $y = x^4 - 6x^2$ **c)** $y = (x-2)^4$

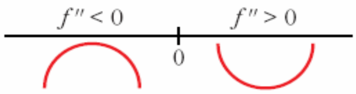
d) $y = x\,e^x$ **e)** $y = \dfrac{2-x}{x+1}$ **f)** $y = ln(x+1)$

a) $y = x^3 - 3x + 4$. *Dominio* $= \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 3$; $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0$

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, 0)$

es cóncava en $(0, +\infty)$

tiene un punto de inflexión en $(0, 4)$

b) $y = x^4 - 6x^2$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 12x$; $f''(x) = 12x^2 - 12$

$f''(x) = 0 \rightarrow 12(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Signo de $f''(x)$:

La función: es cóncava en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

es convexa en $(-1, 1)$

tiene un punto de inflexión en $(-1, -5)$ y otro en $(1, -5)$

c) $y = (x - 2)^4$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4(x - 2)^3$; $f''(x) = 12(x - 2)^2$

$f''(x) = 0 \rightarrow x = 2$

$f''(x) > 0$ para $x \neq 2$

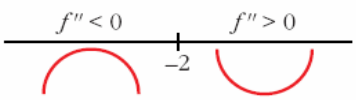
Por tanto, la función es cóncava. No tiene puntos de inflexión.

d) $y = x\,e^x$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = e^x + x\,e^x = (1 + x)e^x$; $f''(x) = e^x + (1 + x)e^x = (2 + x)e^x$

$f''(x) = 0 \rightarrow x = -2$ ($e^x \neq 0$ para todo x)

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, -2)$

es cóncava en $(-2, +\infty)$

tiene un punto de inflexión en $\left(-2, -\dfrac{2}{e^2}\right)$

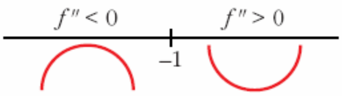
e) $y = \dfrac{2-x}{x+1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{-1(x+1)-(2-x)}{(x+1)^2} = \frac{-x-1-2+x}{(x+1)^2} = \frac{-3}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6}{(x+1)^3}$$

$f''(x) \neq 0$ para todo x.

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, -1)$

es cóncava en $(-1, +\infty)$

no tiene puntos de inflexión

f) $y = ln(x+1)$. *Dominio* = $(-1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

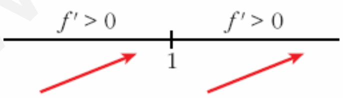
$f''(x) < 0$ para $x \in (-1, +\infty)$

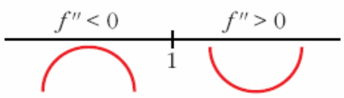
Por tanto, la función es convexa en $(-1, +\infty)$.

11 **Estudia si las siguientes funciones tienen máximos, mínimos o puntos de inflexión en el punto de abscisa $x = 1$:**

a) $y = 1 + (x-1)^3$ **b)** $y = 2 + (x-1)^4$ **c)** $y = 3 - (x-1)^6$

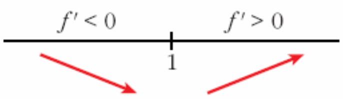
a) $f'(x) = 3(x-1)^2$; $f''(x) = 6(x-1)$

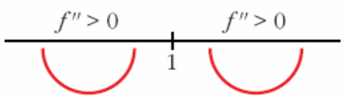




Hay un punto de inflexión en $x = 1$.

b) $f'(x) = 4(x-1)^3$; $f''(x) = 12(x-1)^2$





Hay un mínimo en $x = 1$.

Hay un máximo en $x = 1$.

Página 183

PARA RESOLVER

12 **Prueba que la recta $y = -x$ es tangente a $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Halla el punt de tangencia y estudia si esa recta corta a la curva en otro punto distinto a de tangencia.**

$$y' = 3x^2 - 12x + 8$$

Veamos para qué valor de x tiene pendiente -1:

$$3x^2 - 12x + 8 = -1$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \begin{cases} x = 3 \ \rightarrow \ y = -3 \\ x = 1 \ \rightarrow \ y = 3 \end{cases}$$

El punto $(3, -3)$ verifica la ecuación.

Veamos los puntos de corte:

$$x^3 - 6x^2 + 8x = -x \ \rightarrow \ x^3 - 6x^2 + 9x = 0$$

$$x \cdot (x^2 - 6x + 9) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \ \rightarrow \ y = 0 \\ x = 3 \ \rightarrow \ y = -3 \end{cases}$$

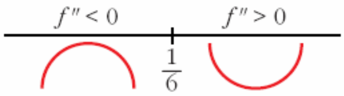
El otro punto de corte es $(0, 0)$.

13 **S** **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4x^3 - 2x^2 - 10$ en s punto de inflexión.**

- Hallamos su punto de inflexión:

$$f'(x) = 12x^2 - 4x; \quad f''(x) = 24x - 4$$

$$f''(x) = 24x - 4 = 0 \ \rightarrow \ x = \frac{1}{6}$$



Hay un punto de inflexión en $\left(\frac{1}{6}, -\frac{271}{27}\right)$.

- Pendiente de la recta tangente en ese punto: $f'\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3}$

- Ecuación de la recta tangente: $y = -\frac{271}{27} - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}\right)$

14 S **Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto $A(2, 1)$ y que pasa por el punto $B(5, -2)$.**

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\left.\begin{array}{l} y' = 2ax + b \;\rightarrow\; y'(2) = 2 \;\rightarrow\; 4a + b = 2 \\ \text{Pasa por } A(2, 1) \;\rightarrow\; y(2) = 4a + 2b + c = 1 \\ \text{Pasa por } B(5, -2) \;\rightarrow\; y(5) = 25a + 5b + c = -2 \end{array}\right\}$$

Solución del sistema: $a = -1$, $b = 6$, $c = -7 \;\Rightarrow\; y = -x^2 + 6x - 7$

15 **La curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ corta al eje de abscisas en $x = -1$ y tiene un punto de inflexión en $(2, 1)$. Calcula a, b y c.**

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$
$$f''(x) = 6x + 2a$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 0 \;\rightarrow\; -1 + a - b + c = 0 \\ f(2) = 1 \;\rightarrow\; 8 + 4a + 2b + c = 1 \\ f''(2) = 0 \;\rightarrow\; 12 + 2a = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} a - b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = -7 \\ a = -6 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a = -6 \\ b = \dfrac{10}{3} \\ c = \dfrac{31}{3} \end{array}$$

16 **De la función $f(x) = ax^3 + bx$ sabemos que pasa por $(1, 1)$ y en ese punto tiene tangente paralela a la recta $3x + y = 0$.**

a) Halla a y b.

b) Determina sus extremos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

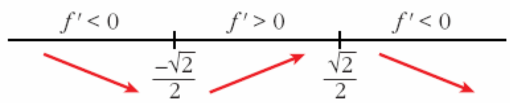
a) $f(x) = ax^3 + bx$; $\quad f'(x) = 3ax^2 + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \;\rightarrow\; a + b = 1 \\ f'(1) = -3 \;\rightarrow\; 3a + b = -3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 3 \end{array}\right\} \quad f(x) = -2x^3 + 3x$$

b) $f'(x) = -6x^2 + 3$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -3(2x^2 - 1) = 0 \;\Big\langle\; \begin{array}{l} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}$$

Signo de la derivada:



La función: es decreciente en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

es creciente en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

tiene un mínimo en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$

tiene un máximo en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$

17 **De la función $f(x) = x^2 + ax + b$ se sabe que:**
S **— Tiene un mínimo en $x = 2$.**
— Su gráfica pasa por el punto (2, 2).
Teniendo en cuenta estos datos, ¿cuánto vale la función en $x = 1$?

$f'(x) = 2x + a$

Además:

"Tiene un mínimo en $x = 2$" $\rightarrow f'(2) = 0 \rightarrow 2 \cdot 2 + a = 0 \rightarrow a = 4$

"Su gráfica pasa por (2, 2)" $\rightarrow f(2) = 2 \rightarrow 2^2 + (-4) \cdot 2 + b = 2 \rightarrow b - 4 = 2 \rightarrow$
$\rightarrow b = 6$

Por tanto: $f(1) = 1^2 + a + b = 1 + (-4) + 6 = 3$

18 **Calcula p y q de modo que la curva $y = x^2 + px + q$ contenga al punto (–2, 1)**
S **y presente un mínimo en $x = -3$.**

$y = x^2 + px + q \rightarrow f'(x) = 2x + p$

$f(-2) = 4 - 2p + q = 1$

$f'(-3) = 2(-3) + p = 0 \rightarrow p = 6 \overset{(1)}{\rightarrow} 4 - 2 \cdot 6 + q = 1 \rightarrow q = 9$

Por tanto: $p = 6$ y $q = 9$

19 **Estudia los intervalos de crecimiento y de concavidad de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{3x}{1 + x^2}$ **b)** $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 10$

a) $f(x) = \dfrac{3x}{1 + x^2} \rightarrow f'(x) = \dfrac{3(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow 1 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

Signo de la derivada:

$f' < 0$	-1	$f' > 0$	1	$f' < 0$
↘		↗		↘

$f''(x) = \dfrac{6x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3}$

$f''(x) = 0 \rightarrow x = 0, \quad x = \sqrt{3}, \quad x = -\sqrt{3}$

$f'' < 0$		$f'' > 0$		$f'' < 0$		$f'' > 0$
$\cap$	$-\sqrt{3}$	$\cup$	0	$\cap$	$\sqrt{3}$	$\cup$

b) $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 10 \rightarrow f'(x) = 4x^3 + 24x^2 + 36x$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = -3$

Signo de la derivada: $f' < 0$ (decreciente) | -3 | $f' < 0$ (decreciente) | 0 | $f' > 0$ (creciente)

$f''(x) = 12x^2 + 48x + 36$

$f''(x) = 0 \rightarrow x = -3,\ x = -1$

Signo de la segunda derivada: $f'' > 0$ $\cup$ | -3 | $f'' < 0$ $\cap$ | -1 | $f'' > 0$ $\cup$

20 **Comprueba y justifica que la función $f(x) = e^{-3x}$ es siempre decreciente y cóncava.**

$f(x) = e^{-3x}$

$f'(x) = -3e^{-3x} < 0$ para cualquier valor de x

Por tanto, $f(x)$ es siempre decreciente.

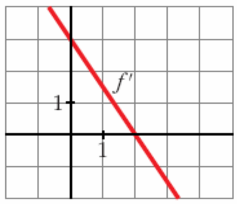
$f''(x) = -9e^{-3x} > 0$ para todo x

Así, $f(x)$ es cóncava en todo su dominio.

21 **Observando la gráfica de la función f', derivada de f, di:**

a) Cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

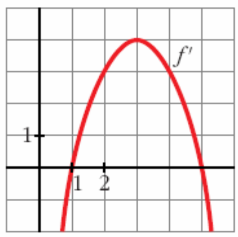
b) ¿Tiene f máximo o mínimo?



a) f es creciente $(f' > 0)$ en el intervalo $(-\infty, 2)$ y decreciente $(f' < 0)$ en $(2, +\infty)$

b) f tiene un máximo en $x = 2$.

22 **Esta es la gráfica de la función derivada de $f(x)$. Explica si $f(x)$ tiene máximos, mínimos o puntos de inflexión en $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$.**



$x = 1$: en este punto la función tiene un mínimo, porque pasa de ser decreciente$(f' < 0)$ a creciente $(f' > 0)$.

$x = 3$: en este punto f tiene un punto de inflexión, ya que $f''(3) = 0$.

$x = 5$: en este punto f tiene un máximo, pues pasa de ser creciente a decreciente.

23 **Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$:**

a) Halla su función derivada.

b) ¿Tiene f algún punto en el que $f'(x) = 0$?

c) Estudia el crecimiento y decrecimiento de f.

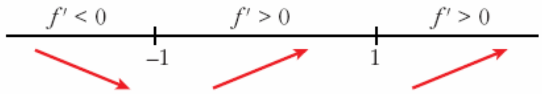
d) Escribe la ecuación de la recta tangente a f en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x + 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) $f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

b) $f'(x) = 0$ solo puede darse para $2x + 2 = 0 \;\to\; x = -1$

c) Signo de la derivada:

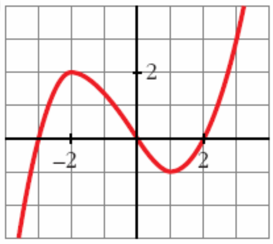


d) La pendiente de la recta en $x = 0$ es: $m = f'(0) = 2$

Por tanto:

$y - f(0) = m(x - 0)$
$y - (-1) = 2(x - 0)$
$y = 2x - 1$

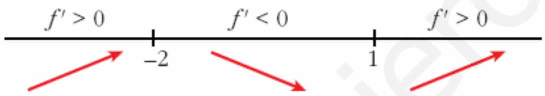
24 **Esta es la gráfica de una función $y = f(x)$.**



a) Indica el signo que tendrá f' en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$ y $(1, +\infty)$.

b) ¿En qué puntos la gráfica de f' cortará al eje OX?

a)



b) En $x = -2$ y en $x = 1$

25 **Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^3 - 24x^2 + 72\,x - 15$ en su punto de inflexión.**

$y = 2x^3 - 24x^2 + 72x - 15$
$y' = 6x^2 - 48x + 72$
$y'' = 12x - 48$

El punto de inflexión será: $f''(x) = 0 \;\to\; 12x - 48 = 0 \;\to\; x = 4 \;\to\; (4, 17)$

En ese punto, la pendiente de la recta tangente es: $m = f'(4) = -24$

Así, la ecuación de la recta pedida es:

$y - f(4) = m(x - 4)$
$y - 17 = -24(x - 4)$
$y = -24x + 113$

26 **Dada la curva $y = x^4 - 4x^3$:**

a) ¿Cuál es la función que nos da la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera?

b) Halla el punto en el que la pendiente de la recta tangente es máxima.

a) La función pedida es la de su función derivada: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$

b) Para ello hay que hallar el máximo de la funcón f':

$f''(x) = 12x^2 - 24x$

$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 12x^2 - 24x = 12x(x - 2) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$ y $x = 2$

Hallamos la tercera derivada:

$f'''(x) = 24x - 24$

$f'''(0) = -24 < 0 \;\rightarrow\; (0, 0)$ es un máximo

$f'''(2) = 24 > 0 \;\rightarrow\; (2, -16)$ es un mínimo

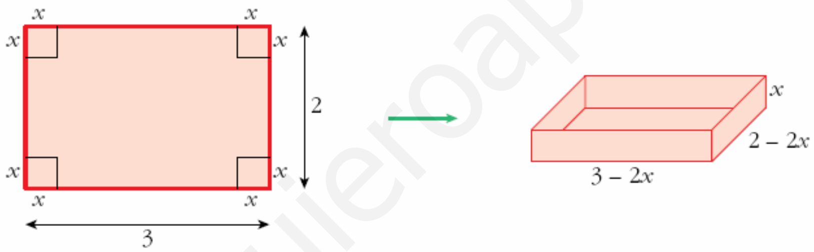
El punto pedido es el $(0, 0)$.

Página 184

Problemas de optimización

27 **Con una cartulina rectangular de 2 m × 3 m se quiere construir una caja sin tapa. Para ello se recorta un cuadrado de cada uno de los vértices.**

Calcula el lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo.



El volumen de la caja es:

$$V(x) = (3 - 2x) \cdot (2 - 2x) \cdot x, \quad x \in (0, 1)$$

$$V(x) = 6x - 10x^2 + 4x^3$$

$$V'(x) = 6 - 20x + 12x^2$$

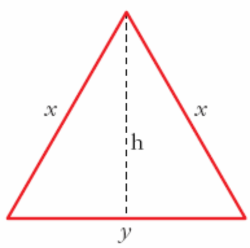
$$V'(x) = 0 \;\rightarrow\; 6 - 20x + 12x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{12} \begin{cases} 1{,}27 \text{ (no vale)} \\ 0{,}39 \end{cases}$$

$$V''(x) = -20 + 24x; \quad V''(0{,}39) < 0 \;\Rightarrow\; x = 0{,}39 \text{ es máximo.}$$

28 **S** **Entre todos los triángulos isósceles de perímetro 30 cm, ¿cuál es el de área máxima?**

Perímetro $= 2x + y = 30 \;\rightarrow\; y = 30 - 2x$

Altura $= \mathrm{h} = \sqrt{x^2 - \dfrac{y^2}{4}}$



$$\textit{Área} = \frac{y \cdot \mathrm{h}}{2} = \frac{(30 - 2x) \cdot \sqrt{x^2 - \dfrac{(3c - 2x)^2}{4}}}{2} =$$

$$= \frac{(30-2x)\cdot\sqrt{30x-225}}{2} = (15-x)\sqrt{30x-225} = \sqrt{(15-x)^2(30x-225)} =$$

$$= \sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}$$

Tenemos que maximizar la función área:

$$f(x) = \sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}$$

$$f'(x) = \frac{90x^2 - 2\,250x + 13\,500}{2\sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 90x^2 - 2\,250x + 13\,500 = 0$$

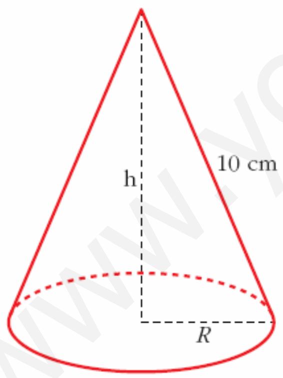
$$90(x^2 - 25x + 150) = 0$$

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{625-600}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{25 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 15 \quad \text{(no vale)} \\ x = 10 \end{cases}$$

($f'(x) > 0$ a la izquierda de $x = 10$ y $f'(x) < 0$ a la derecha de $x = 10$. Por tanto, en $x = 10$ hay un máximo).

Luego, el triángulo de área máxima es el equilátero de lado 10 cm, cuya área es $25\sqrt{3} \approx 43{,}3$ cm^2.

29 **Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10 cm y de capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?**



$$h^2 + R^2 = 100 \;\rightarrow\; R^2 = 100 - h^2$$

$$Volumen = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(100-h^2)h = \frac{1}{3}\pi(100h - h^3)$$

Tenemos que maximizar la función volumen:

$$f(h) = \frac{1}{3}\pi(100h - h^3)$$

$$f'(h) = \frac{1}{3}\pi(100 - 3h^2)$$

$$f'(h) = 0 \;\rightarrow\; 100 - 3h^2 = 0 \;\rightarrow\; h = \sqrt{\frac{100}{3}}$$

(consideramos la raíz positiva, pues $h \geq 0$).

$\Big(f'(h) > 0$ a la izquierda de $h = \sqrt{\frac{100}{3}}$ y $f'(h) < 0$ a la derecha de $h = \sqrt{\frac{100}{3}}$.

Luego, en $h = \sqrt{\frac{100}{3}}$ hay un máximo$\Big)$.

Por tanto, el radio de la base será: $R^2 = 100 - h^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3} \;\rightarrow\; R = \sqrt{\frac{200}{3}}$

30 **Se sabe que el rendimiento, r en %, de un estudiante que realiza un examen de una hora viene dado por $r(t) = 300t(1-t)$ siendo $0 \le t \le 1$, t en horas.**

a) Explica cuándo aumenta y cuándo disminuye el rendimiento.

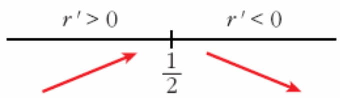
b) ¿Cuándo se anula?

c) ¿Cuándo es máximo?

$r(t) = 300t(1-t)$, $0 \le t \le 1$, t en horas.

a) $r'(t) = 300 - 600t$

$r'(t) = 0 \;\rightarrow\; t = \dfrac{1}{2}$



$r(t)$ aumenta entre 0 y $\dfrac{1}{2}$, pues r es creciente.

$r(t)$ disminuye entre $\dfrac{1}{2}$ y 1, pues r es decreciente.

b) $r(t) = 0 \;\rightarrow\; 300t \cdot (1-t) = 0 \;\rightarrow\; t = 0$ y $t = 1$

c) $r'(t) = 0 \;\rightarrow\; t = \dfrac{1}{2}$. (Es máximo pues $r' > 0$ a su izquierda y $r' < 0$ a su derecha).

31 **S** **Un comerciante compra artículos a 350 € la unidad y sabe que si el precio de venta es 750 €, vende 30 unidades al mes y que por cada descuento de 20 € en el precio de venta, incrementa las ventas de cada mes en 3 unidades. Determina el precio de venta que hace máximos los beneficios del comerciante.**

Llamamos: x = nº de veces que se descuentan 20 €.

Así, el precio por unidad será de: $750 - 20x$, y por tanto se venderán $30 + 3x$ unidades al mes; luego el dinero obtenido por las ventas vendrá dado por la función:

$$f(x) = (750 - 20x) \cdot (30 + 3x) = -60x^2 + 1\,650x + 22\,500$$

Maximizar los beneficios es equivalente a maximizar esta función:

$$f'(x) = -120x + 1\,650$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{1\,650}{120} = 13{,}75$$

Comprobamos que, efectivamente, se trata de un máximo:

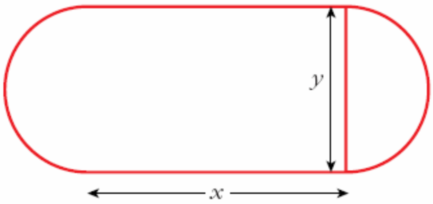
$$f''(x) = -120$$

$$f''(13{,}75) = -120 < 0 \;\Rightarrow\; x = 13{,}75 \text{ es máximo}$$

Por tanto, el precio de venta que hace máximos los beneficios es:

$$750 - 20 \cdot x = 750 - 20 \cdot 13{,}75 = 750 - 275 = 475 \text{ €/unidad}$$

32 S **Se quiere construir una pista de entrenamiento que consta de un rectángulo y de dos semicírculos adosados a dos lados opuestos del rectángulo. Si se desea que el perímetro de dicha pista sea de 200 m, halla las dimensiones que hacen máxima el área de la región rectangular.**



Perímetro de la pista $= 2x + \pi \cdot y = 200$

Despejamos: $y = \dfrac{200 - 2x}{\pi}$

Área del rectángulo $= x \cdot y = x \cdot \dfrac{200 - 2x}{\pi} = \dfrac{200x - 2x^2}{\pi}$

Derivamos:

$$A' = \frac{200}{\pi} - \frac{4x}{\pi} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 50 \text{ m} \quad \rightarrow \quad y = \frac{100}{\pi} \text{ m}$$

$$\left(A'' = -\frac{4}{\pi};\ A''(50) < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 50 \text{ es máximo}\right)$$

33 S **El saldo, en millones de euros, de una empresa en función del tiempo viene dado por la función:**

$$f(t) = \begin{cases} 4 - 0{,}2t & \text{si } 0 \le t < 4 \\ 3{,}2 + 0{,}04(t-4) & \text{si } 4 \le t < 8 \\ 3{,}36 + 0{,}1(t-8)^2 & \text{si } 8 \le t \le 12 \end{cases}$$

Deduce razonadamente el valor de t en el que el capital fue máximo.

$$f(t) = \begin{cases} 4 - 0{,}2t & \text{si } 0 \le t < 4 \\ 3{,}2 + 0{,}04(t-4) & \text{si } 4 \le t < 8 \\ 3{,}36 + 0{,}1(t-8)^2 & \text{si } 8 \le t \le 12 \end{cases}$$

En el primer intervalo se trata de una función afín decreciente que alcanza el máximo valor en 0, $f(0) = 4$.

En el segundo intervalo tenemos otra función afín creciente, por lo que alcanza su máximo valor en 8^-, $f(8^-) = 3{,}36$.

En el tercer intervalo, derivamos:

$$f'(t) = 0{,}2 \cdot (t - 8)$$

Tiene un mínimo en $t = 8$, por lo que alcanza el máximo en el otro extremo del intervalo: $f(12) = 4{,}96$.

Por tanto, el capital fue máximo en $t = 12$.

34
S **Se ha estudiado el rendimiento de los empleados de una oficina a medida que transcurre la jornada laboral. (Dicho rendimiento corresponde al número de instancias revisadas en una hora). La función que expresa dicho rendimiento es: $R(t) = 30t - 10{,}5t^2 + t^3$ siendo t el número de horas transcurridas desde el inicio de la jornada laboral.**

a) Determina cuándo se produce el máximo rendimiento y cuándo se produce el mínimo rendimiento.

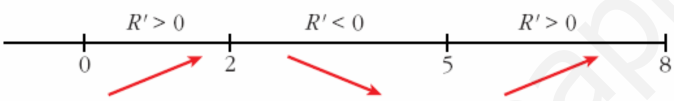
b) Halla la tasa de variación media del rendimiento $R(t)$ entre $t = 2$ y $t = 4$.

Vamos a suponer una jornada laboral de 8 horas; es decir:

$$R(t) = 30t - 10{,}5t^2 + t^3; \quad t \in [0, 8]$$

a) $R'(t) = 30 - 21t + 3t^2$

$$R'(t) = 0 \quad \rightarrow \quad 30 - 21t + 3t^2 = 0 \;\begin{cases} t = 5 \\ t = 2 \end{cases}$$



$R(0) = 0 \qquad R(2) = 26$

$R(5) = 12{,}5 \quad R(8) = 80$

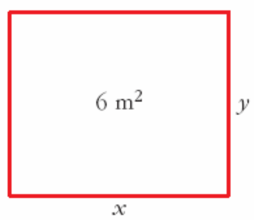
Hay un mínimo relativo en $t = 5$ y un máximo relativo en $t = 2$, pero el mínimo absoluto corresponde a $t = 0$ y el máximo absoluto a $t = 8$ horas.

b) T.V.M.$[2, 4] = \dfrac{R(4) - R(12)}{4 - 2} = \dfrac{16 - 26}{2} = \dfrac{-10}{2} = -5$

35 **Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m² de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 2,5 € y el de tramo vertical 3 €.**

a) Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.

b) ¿Cuál será ese coste mínimo?



a) Área $= x \cdot y = 6 \quad \rightarrow \quad y = \dfrac{6}{x}$

Coste $= 2{,}5 \cdot 2x + 3 \cdot 2y = 5x + 6y$

$$C = 5x + \frac{36}{x}$$

$$C' = 5 - \frac{36}{x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{6\sqrt{5}}{5} \approx 2{,}68 \text{ m} \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{5} \approx 2{,}24 \text{ m}$$

$$\left(C'' = \frac{72}{x^3};\; C''\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ es mínimo}\right)$$

b) $C = 5 \cdot \dfrac{6\sqrt{5}}{5} + 6\sqrt{5} = 12\sqrt{5} \approx 26{,}83$ €

36 **Un banco lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad $R(x)$ en miles de euros viene dada en función de la cantidad que se invierte, x en miles de euros, por medio de la siguiente expresión:**

$$R(x) = -0{,}001x^2 + 0{,}4x + 3{,}5$$

a) Deduce y razona qué cantidad de dinero convendrá invertir en ese plan.

b) ¿Qué rentabilidad se obtendrá?

$$R(x) = -0{,}001x^2 + 0{,}4x + 3{,}5$$

a) $R'(x) = -0{,}002x + 0{,}4$

$R'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 200$ miles de €.

$(R''(x) = -0{,}002, \quad R''(200) < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 200$ es máximo$)$

Invirtiendo 200 000 € se obtiene la máxima rentabilidad.

b) $R(200) = 43{,}5$ miles de € $= 43\,500$ €.

37 **Un artículo ha estado 8 años en el mercado. Su precio $P(t)$, en miles de euros, estaba relacionado con el tiempo, t, en años, que este llevaba en el mercado por la función:**

$$P(t) = \begin{cases} 4t^2 + 4 & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ -(5/2)t + 25 & \text{si } 2 < t \le 8 \end{cases}$$

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de $P(t)$.

b) ¿Cuál fue el precio máximo que alcanzó el artículo?

c) ¿Cuál fue la tasa de variación media del precio durante los últimos 6 años?

$$P(t) = \begin{cases} 4t^2 + 4 & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ -(5/2)t + 25 & \text{si } 2 < t \le 8 \end{cases}$$

a) $P'(t) = \begin{cases} 8t & 0 < t < 2 \\ -5/2 & 2 < t < 8 \end{cases}$ (No existe $P'(2)$, pues $P'(2^-) \ne P'(2^+)$).

$P(t)$ es creciente en $0 < t < 2$ pues $P'(t) > 0$.

$P(t)$ es decreciente en $2 < t < 8$ pues $P'(t) < 0$.

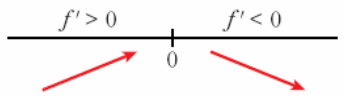
b) El máximo se alcanza en $t = 2$, $P(2) = 20$.

c) $\text{T.V.M.}[2,\ 8] = \dfrac{P(8) - P(2)}{8 - 2} = \dfrac{5 - 20}{6} = \dfrac{-15}{6} = \dfrac{-5}{2} = -2{,}5$

38 S **La función f tiene derivadas primera y segunda y es $f'(a) = 0$ y $f''(a) = 0$. ¿Puede presentar f un máximo relativo en el punto a? En caso afirmativo, pon un ejemplo.**

Sí puede presentar un máximo. Por ejemplo:

$f(x) = -x^4$ en $x = 0$ es tal que:



$f'(x) = -4x^3$ $\quad f''(x) = -12x^2$

Por tanto: $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$

En $(0, 0)$ hay un máximo relativo.

39 **Una función f es decreciente en el punto a y derivable en él.**

S **¿Puede ser $f'(a) > 0$?**

¿Puede ser $f'(a) = 0$?

¿Puede ser $f'(a) < 0$? Razónalo.

Si f es decreciente en $x = a$ y es derivable en él, entonces $f'(a) \leq 0$.

Lo probamos:

$$f \text{ decreciente en } a \;\rightarrow\; \text{signo de } [f(x) - f(a)] \neq \text{signo de } (x - a) \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$$

Por tanto, $f'(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$; es decir: $f'(a) \leq 0$

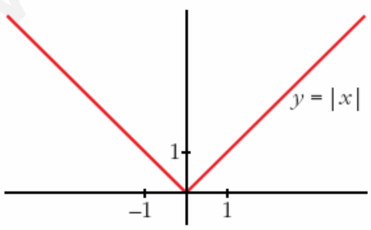
Ejemplo: $f'(a) = -x^3$ es decreciente en $\mathbb{R}$ y tenemos que:

$$f'(x) = -3x^2 \;\rightarrow\; \begin{cases} f'(0) = 0 & (\text{y } f(x) \text{ es decreciente en } x = 0) \\ f'(0) < 0 & \text{para } x \neq 0 \end{cases}$$

40 **La función $|x|$ (valor absoluto de x), ¿presenta un mínimo relativo en algún punto? ¿En qué puntos es derivable? Razónalo.**

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ no es derivable en $x = 0$, pues $f'(0^-) = -1 \neq f'(0^+) = 1$.



Por tanto, f es derivable para $x \neq 0$.

Pero $f(x)$ presenta un mínimo relativo en $x = 0$, pues $f(0) = 0 < f(x)$ si $x \neq 0$. De hecho, es el mínimo absoluto de $f(x)$.

41 **La derivada de una función f es positiva para todos los valores de la variable. ¿Puede haber dos números distintos, a y b, tales que $f(a) = f(b)$? Razónalo.**

No es posible, si la función es derivable (y nos dicen que lo es, pues $f'(x) > 0$ para todo x).

Lo probamos por reducción al absurdo:

Supongamos que existen dos números distintos, a y b, tales que $f(a) = f(b)$.

$f(x)$ es derivable para todo x. Por el teorema de Rolle, habría un punto c, en el que $f'(c) = 0$.

Esto contradice el que $f'(x) > 0$ para todo x.

42 **De una función f sabemos que $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ y $f'''(a) = 5$. ¿Podemos asegurar que f tiene máximo, mínimo o punto de inflexión en $x = a$?**

f tiene un punto de inflexión en $x = a$.

Veamos por qué:

$f'''(a) = 5 > 0 \quad \to \quad f''$ es creciente en $x = a$.

Como, además, $f''(a) = 0$, tenemos que $f''(x) < 0$ a la izquierda de a y $f''(x) > 0$ a su derecha. Es decir, $f(x)$ cambia de convexa a cóncava en $x = a$.

Por tanto, hay un punto de inflexión en $x = a$.

43 **Si $f'(a) = 0$, ¿cuál de estas proposiciones es cierta?**

a) f tiene máximo o mínimo en $x = a$.

b) f tiene una inflexión en $x = a$.

c) f tiene en $x = a$ tangente paralela al eje OX.

Si $f'(a) = 0$, solo podemos asegurar que f tiene en $x = a$ tangente horizontal (paralela al eje OX).

Podría tener un máximo, un mínimo o un punto de inflexión en $x = a$.

Por tanto, solo es cierta la proposición c).

44 S **De una función $f(x)$ se sabe que:**

$$f(1) = f(3) = 0; \; f'(2) = 0; \; f''(2) > 0$$

¿Qué puedes decir acerca de la gráfica de esta función?

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = f(3) = 0 \\ f'(2) = 0 \\ f''(2) > 0 \end{array}\right\} \; f \text{ tiene un mínimo en } x = 2.$$

45 S **La representación gráfica de la función derivada de una función f, es una recta que pasa por los puntos (2, 0) y (0, 2).**

Utilizando la gráfica de la derivada:

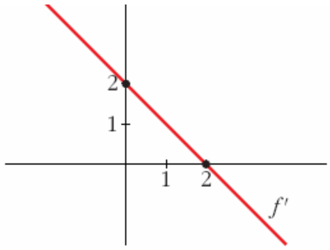
a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función f.

b) Estudia si la función f tiene máximo o mínimo.

a) $x < 2 \rightarrow f' > 0 \rightarrow f$ creciente

$x > 2 \rightarrow f' < 0 \rightarrow f$ decreciente

b) $x = 2 \rightarrow f' = 0$ y tiene un máximo



46 **S** **Si la gráfica de la derivada de g es una parábola que corta al eje OX en (0,0) y (4, 0) y tiene por vértice (2, 1), ¿qué puedes decir del crecimiento y decrecimiento de g?**

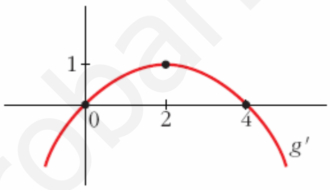
Determina si la función g presenta máximos o mínimos.

Si $x < 0 \rightarrow g' < 0 \rightarrow g$ decreciente

Si $0 < x < 4 \rightarrow g' > 0 \rightarrow g$ creciente

Si $x > 4 \rightarrow g' < 0 \rightarrow g$ decreciente

En $x = 0$ tiene un mínimo y en $x = 4$ un máximo.



47 **Estudia la existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $y = |x^2 - 4|$.**

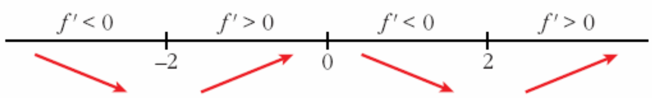
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En $x = -2$ no es derivable, pues $f'(-2^-) = -4 \neq f'(-2^+) = 4$.

En $x = 2$ no es derivable, pues $f'(2^-) = -4 \neq f'(2^+) = 4$.

- La derivada se anula en $x = 0$.
- Signo de la derivada:



- La función tiene un máximo relativo en $(0, 4)$.

  No tiene máximo absoluto $\left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \right)$.

- Tiene un mínimo relativo en $(-2, 0)$ y otro en $(2, 0)$. En estos puntos, el mínimo también es absoluto, puesto que $f(x) \geq 0$ para todo x.

48 **Estudia los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de la función dada por: $y = |x^2 + 2x - 3|$**

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x < -3 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{si } -3 \le x \le 1 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -3 \\ -2x - 2 & \text{si } -3 < x < 1 \\ 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En $x = -3$ no es derivable, pues $f'(-3^-) = -4 \neq f'(-3^+) = 4$.

En $x = 1$ no es derivable, pues $f'(1^-) = -4 \neq f'(1^+) = 4$.

- Veamos dónde se anula la derivada:

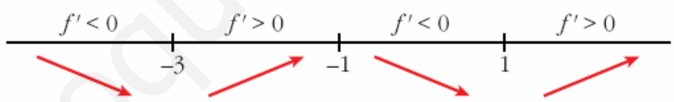
  $2x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$

  Pero $f'(x) = 2x + 2$ para $x < -3$ y $x > 1$.

  $-2x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$ y $f'(x) = -2x - 2$ para $-3 < x < 1$

  Por tanto, $f'(x)$ se anula en $x = -1$.

- Signo de la derivada:



- La función: es creciente en $(-3, -1) \cup (1, +\infty)$

  es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-1, 1)$

  tiene un máximo en $(-1, -4)$

  tiene un mínimo en $(-3, 0)$ y otro en $(1, 0)$.

49 **La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y que f no tiene extremo relativo en $x = 1$. Calcula a, b y c.**

☛ ***Si es $f'(1) = 0$ y no hay extremo relativo, tiene que haber una inflexión en $x = 1$.***

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = 1 & \rightarrow & 1 + a + b + c = 1 \\ f'(1) = 0 & \rightarrow & 3 + 2a + b = 0 \\ f''(1) = 0 & \rightarrow & 6 + 2a = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -3 \\ b = 3 \\ c = 0 \end{array}\right\} f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

50 **Una empresa de mensajería ofrece estas tarifas:**

— Si la carga es menor de 2 kg, costará 8 € por kilo.

— A partir de 2 kg, el precio por kilo se obtiene restando de 8 el número d kilos que exceden de 2.

La carga máxima que puede llevar un mensajero es 6 kg. Sea x el peso d la carga, $P(x)$ la función que nos da el precio por kilo de carga e $I(x)$ l función que nos da los ingresos de la empresa.

a) Halla las expresiones algebraicas de $P(x)$ e $I(x)$ y represéntalas.

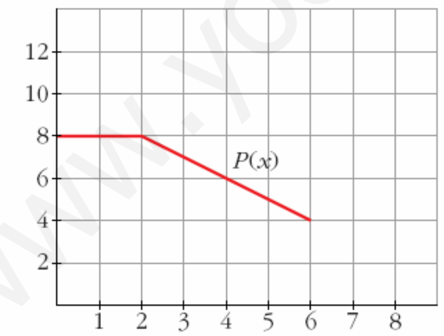
b) ¿Para qué valor de x se obtiene el máximo ingreso?

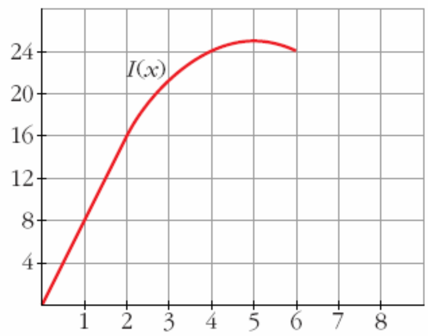
a) Precio por kilogramo de carga:

$$P(x) = \begin{cases} 8, & 0 \le x < 2 \\ 8 - (x - 2), & 2 \le x \le 6 \end{cases} = \begin{cases} 8, & 0 \le x < 2 \\ 10 - x, & 2 \le x \le 6 \end{cases}$$

Ingresos en función de los kilos de carga:

$$I(x) = \begin{cases} 8x, & 0 \le x < 2 \\ (10 - x)x, & 2 \le x \le 6 \end{cases} = \begin{cases} 8x, & 0 \le x < 2 \\ 10x - x^2, & 2 \le x \le 6 \end{cases}$$





b) Se obtiene el máximo ingreso para $x = 5$.

UNIDAD DIDÁCTICA 08:
REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES.

* Las numeraciones indicadas entre páginas se refieren a las páginas del libro de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II, de segundo de bachillerato de la editorial Anaya, Andalucía, cuyos autores son J. Colera, R. García y M.J.Oliveira

Página 204

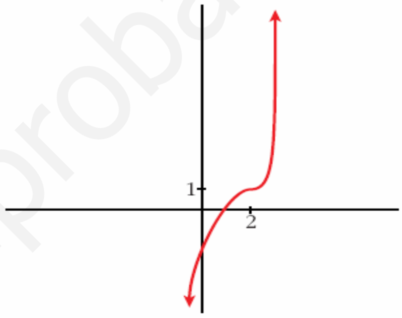
EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 Representa una función continua y derivable en $\mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad f'(2) = 0$$

$f(2) = 1$, $f'(x) \geq 0$ para cualquier x.

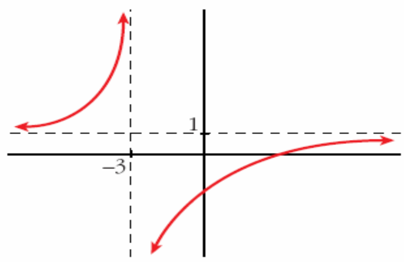


2 Representa una función que no esté definida en $x = -3$ y tal que:

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 \begin{cases} \text{si } x \to +\infty, & f(x) < 1 \\ \text{si } x \to -\infty, & f(x) > 1 \end{cases}$$

No tiene puntos singulares y es creciente.



3 De una función $y = f(x)$ tenemos esta información:

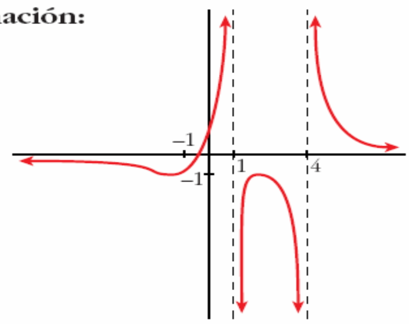
$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}$; $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

(si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$; si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$)

$f'(2) = 0$, $f(2) = -1$; $f'(-1) = 0$, $f(-1) = -1$

Represéntala.

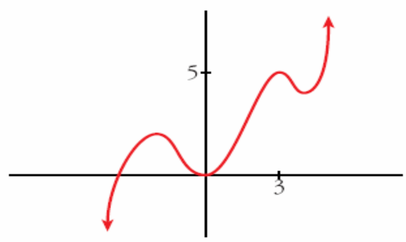


4 **S** Dibuja la gráfica de una función de la que se conocen las siguientes propiedades:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$f'(x) = 0$ si $x = -2$, $x = 0$, $x = 3$, $x = 4$

$f(-2) = 2$; $f(0) = 0$; $f(3) = 5$; $f(4) = 4$



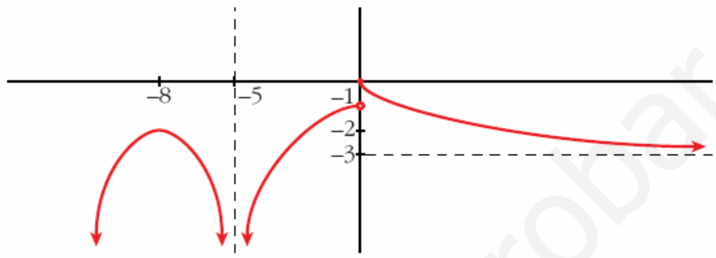
5 **S** **Dibuja la gráfica de una función que cumpla las siguientes propiedades:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -3, \quad \lim_{x \to -5} f(x) = -\infty$$

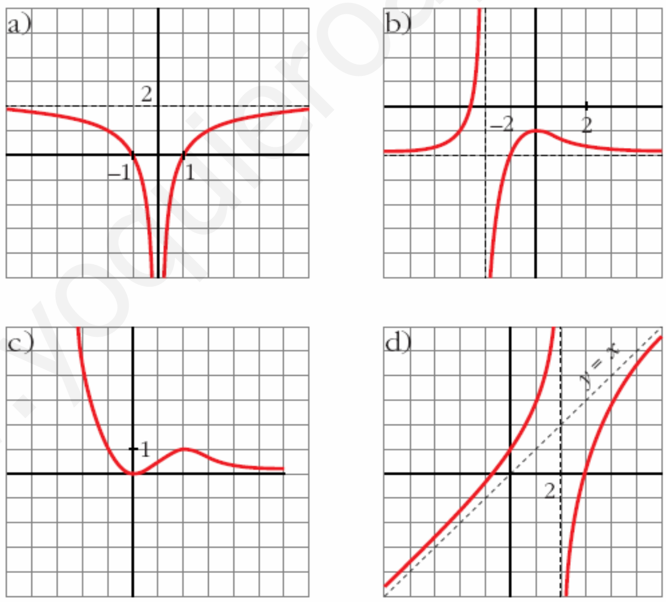
$f(-8) = -2$, $f(0) = 0$ es el único punto donde $f(x)$ se anula.

$f'(-8) = 0$ y la derivada no se anula en ningún otro punto. Además, $f'(x) < 0$ para todo x positivo.

La función es continua en toda la recta real, salvo en los puntos $x = -5$ y $x = 0$.



6 **Describe las siguientes funciones indicando sus asíntotas y ramas infinitas, sus puntos singulares y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.**



a) • Asíntota vertical: $x = 0$. Asíntotal horizontal: $y = 2$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 2$)

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

• $f(x)$ no tiene puntos singulares.

• Decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

b) • Asíntota vertical: $x = -2$. Asíntotal horizontal: $y = -2$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -2$

(si $x \to -\infty$, $f(x) > -2$; si $x \to +\infty$, $f(x) > -2$)

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

• Puntos singulares: $f'(0) = 0$; $f(0) = -1$. Máximo en $(0, -1)$

• Creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.

c) • Asíntota horizontal si $x \to +\infty$: $y = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

• Puntos singulares:

$f'(0) = 0$; $f(0) = 0$. Mínimo en $(0, 0)$

$f'(2) = 0$; $f(2) = 1$. Máximo en $(2, 1)$

• Decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y creciente en $(0, 2)$.

d) • Asíntota vertical: $x = 2$

Asíntota oblicua: $y = x$

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x$)

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

• Puntos singulares: no tiene.

• Creciente en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

7 S **Se considera la función $f(x) = x^3 + 2x + 4$. ¿Tiene máximos y/o mínimos? ¿Tiene algún punto de inflexión? Haz una gráfica aproximada de esta función.**

$f(x) = x^3 + 2x + 4$

• $f'(x) = 3x^2 + 2$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 = -2 \;\rightarrow\;$ no tiene solución.

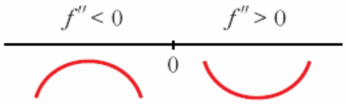
$f'(x) > 0$ para todo $x \;\rightarrow\; f(x)$ es creciente.

No tiene máximos ni mínimos.

• $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

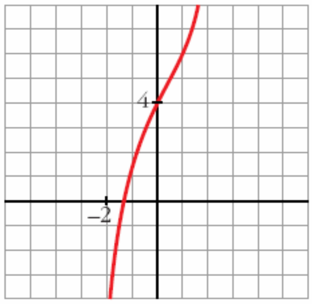
Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(0, 4)$.

- Además, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Gráfica:**



8
S

Dada la función $y = x^3 - 3x + 1$, se pide:

a) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Extremos relativos.

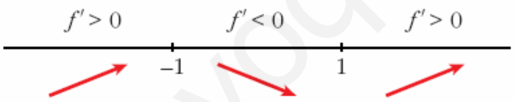
b) Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

c) Dibuja la gráfica a partir de los resultados anteriores.

a) $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 3 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

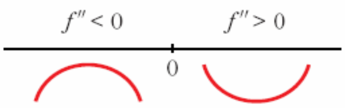
es decreciente en $(-1, 1)$

tiene un máximo en $(-1, 3)$ y un mínimo en $(1, -1)$

b) $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de $f''(x)$:

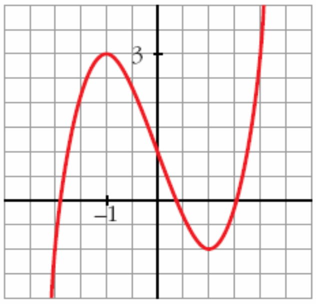


$f(x)$ es convexa en $(-\infty, 0)$

es cóncava en $(0, +\infty)$

tiene un punto de inflexión en $(0, 1)$

c)



9 **En las siguientes funciones, estudia su dominio, asíntotas y posición de la curva respecto de estas, y represéntalas a partir de los resultados obtenidos:**

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ **b)** $y = \dfrac{-1}{x^2 + 1}$ **c)** $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ **e)** $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ **f)** $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

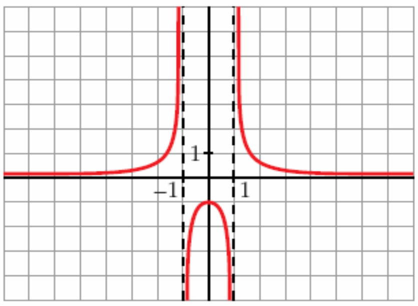
$y = 0$ es asíntota horizontal.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{-1}{x^2 + 1}$

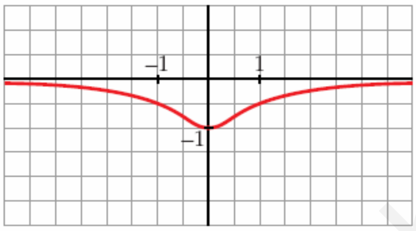
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

  (si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 0$)

- **Gráfica:**



c) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- **Asíntotas:**

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

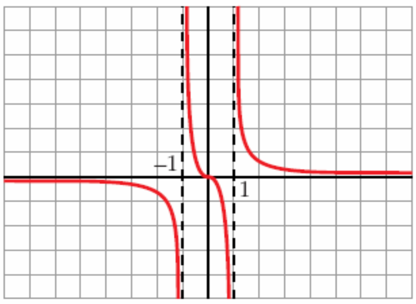
  (si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

  $y = 0$ es asíntota horizontal.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

- **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x} = x - \dfrac{1}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

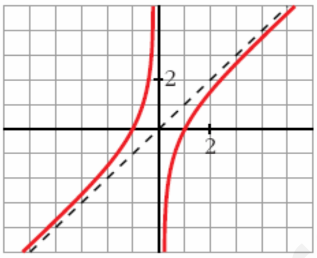
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x$)

- **Gráfica:**



e) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

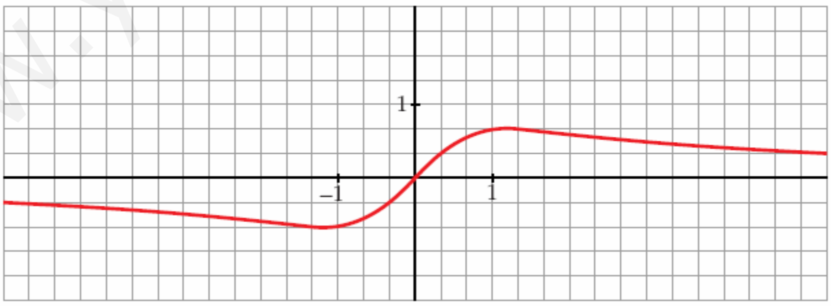
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

- **Gráfica:**



f) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

- **Dominio:**

$x^2 + x + 1 = 0 \;\to\; x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} \;\to\;$ No tiene solución.

$D = \mathbb{R}$

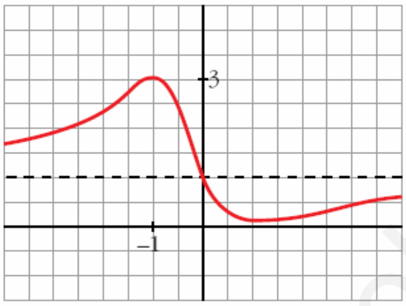
- **Asíntotas:**

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

  (si $x \to -\infty$, $f(x) > 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 1$)

  $y = 1$ es asíntota horizontal.

- **Gráfica:**



Página 205

10 **Dibuja la gráfica de las siguientes funciones estudiando ramas infinitas, máximos y mínimos y puntos de inflexión:**

a) $y = x^3 - 3x + 1$ **b)** $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

c) $y = x^3 - x^2$ **d)** $y = x^3 - 3x$

a) $y = x^3 - 3x + 1$

- **Ramas infinitas:**

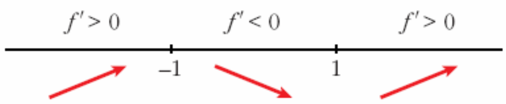
  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Máximos y mínimos:**

  $f'(x) = 3x^2 - 3$

  $f'(x) = 0 \;\to\; 3(x^2 - 1) = 0 \;\to\; x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

  Signo de $f'(x)$:



Máximo en $(-1, 3)$.

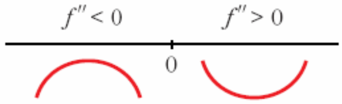
Mínimo en $(1, -1)$.

- **Puntos de inflexión:**

  $f''(x) = 6x$

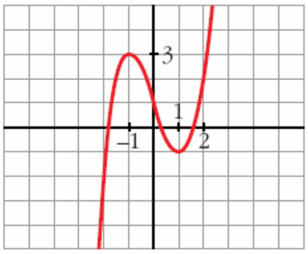
  $f''(x) = 0 \;\to\; 6x = 0 \;\to\; x = 0$

  Signo de $f''(x)$:



Punto de inflexión en $(0, 1)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

- **Ramas infinitas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- **Máximos y mínimos:**

$f'(x) = x^3 - 4x$

$$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ x(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

Máximo en $(0, 0)$. Mínimos en $(-2, -4)$ y en $(2, -4)$.

- **Puntos de inflexión:**

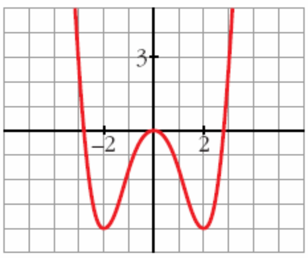
$f''(x) = 3x^2 - 4$

$$f''(x) = 0 \ \rightarrow \ x^2 = \frac{4}{3} \ \rightarrow \ x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} \approx \pm 1{,}15$$

Signo de $f''(x)$:

Puntos de inflexión: $\left(-1{,}15; -\frac{20}{9}\right)$; $\left(1{,}15; -\frac{20}{9}\right)$

- **Gráfica:**



c) $y = x^3 - x^2$

- **Ramas infinitas:**

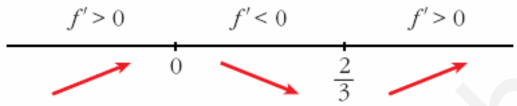
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- **Máximos y mínimos:**

$f'(x) = 3x^2 - 2x$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x(3x - 2) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 2/3 \end{cases}$

Signo de $f'(x)$:



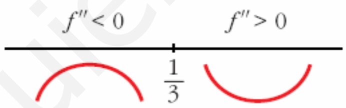
Máximo en $(0, 0)$ y mínimo en $\left(\frac{2}{3}, \frac{-4}{27}\right)$.

- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = 6x - 2$

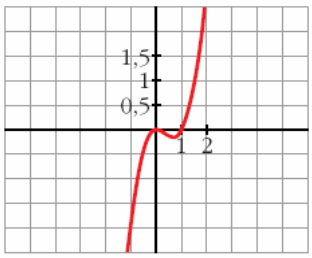
$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 6x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Signo de $f''(x)$:



Punto de inflexión: $\left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{27}\right)$

- **Gráfica:**



d) $y = x^3 - 3x$

- **Ramas infinitas:**

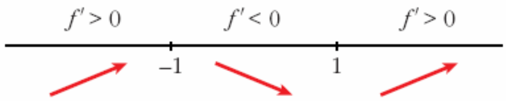
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- **Máximos y mínimos:**

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 3(x^2 - 1) = 0 \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Signo de $f'(x)$:



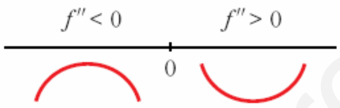
Máximo en $(-1, 2)$ y mínimo en $(1, -2)$.

- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = 6x$

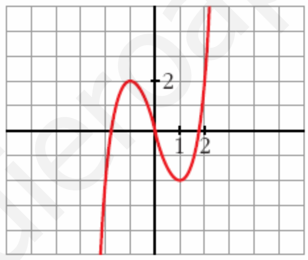
$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de $f''(x)$:



Punto de inflexión en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



11 **S** **Representa las siguientes funciones determinando previamente sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus máximos y mínimos:**

a) $f(x) = -3x^2 + 6x$

b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

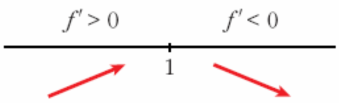
c) $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 32$

a) $f(x) = -3x^2 + 6x$

$f'(x) = -6x + 6$

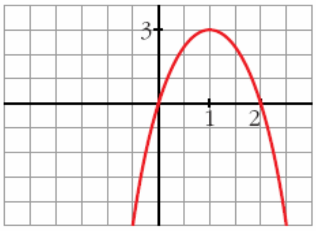
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -6x + 6 = 0 \;\rightarrow\; x = 1$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$; es decreciente en $(1, +\infty)$. Tiene un máximo en $(1, 3)$.

Gráfica:

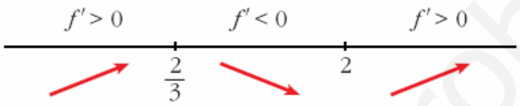


b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{6} = \dfrac{8 \pm \sqrt{16}}{6} = \dfrac{8 \pm 4}{6}$ $\begin{cases} x = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \\ x = 2 \end{cases}$

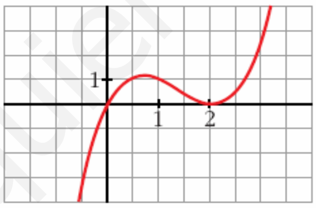
Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $\left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty)$; es decreciente en $\left(\dfrac{2}{3}, 2\right)$.

Tiene un máximo en $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{32}{27}\right)$ y un mínimo en $(2, 0)$.

Gráfica:

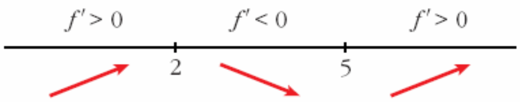


c) $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 32$

$f'(x) = 6x^2 - 42x + 60$

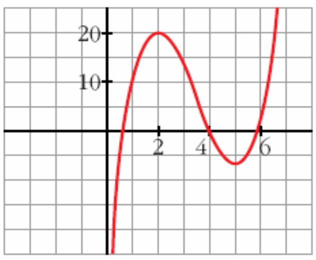
$f'(x) = 0 \rightarrow 6(x^2 - 7x + 10) = 0 \rightarrow x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2}$ $\begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$; es decreciente en $(2, 5)$. Tiene un máximo en $(2, 20)$ y un mínimo en $(5, -7)$.

Gráfica:



12 **Estudia las ramas infinitas y los puntos singulares de las siguientes funci nes. Con la información obtenida, represéntalas:**

a) $y = \dfrac{1}{x+1}$ **b)** $y = \dfrac{1}{4+x^2}$ **c)** $y = \dfrac{1}{4-x^2}$

d) $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ **e)** $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ **f)** $y = \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$

a) $y = \dfrac{1}{x+1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1\}$

- **Ramas infinitas:**

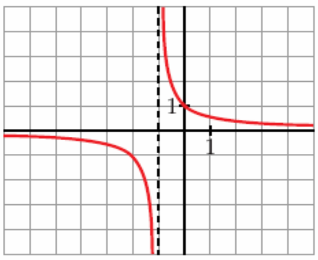
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) > 0 \text{ si } x \to +\infty,\ f(x) < 0 \text{ si } x \to -\infty) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2} < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en su dominio. No tiene má: mos ni mínimos.

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{1}{4+x^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) > 0 \rightarrow \text{ la curva está por encima de la asíntota).} \end{array}$$

No tiene asíntotas verticales.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{-2x}{(4+x^2)^2}$$

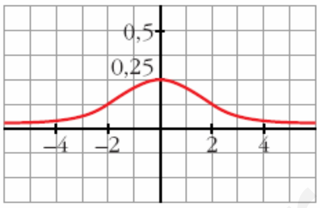
$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$$

Signo de $f'(x)$:

$f' > 0$	0	$f' < 0$
$\nearrow$		$\searrow$

Máximo en $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

- **Gráfica:**



c) $y = \dfrac{1}{4 - x^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) < 0 \text{ si } x \to +\infty \text{ y si } x \to -\infty) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{(4-x^2)^2}$$

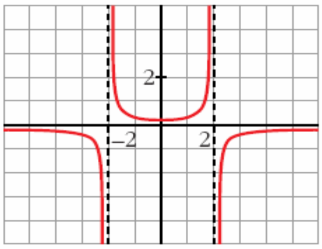
$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$$

Signo de $f'(x)$:

$f' < 0$	–2	$f' < 0$	0	$f' > 0$	2	$f' > 0$
$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

Mínimo en $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

- **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$

- **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) > 0 \quad \to \quad \text{la curva está por encima de la asíntota).} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

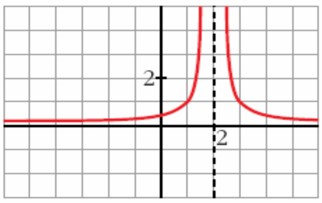
- **Puntos singulares:**

$f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^3}$

$f'(x) \neq 0$. Signo de $f'(x)$:

No tiene puntos singulares.

- **Gráfica:**



e) $y = \dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

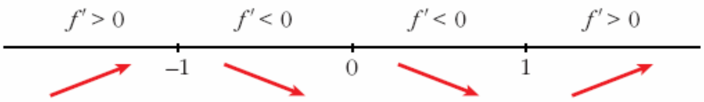
$(f(x) < x$ si $x \to -\infty$; $f(x) > x$ si $x \to +\infty)$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

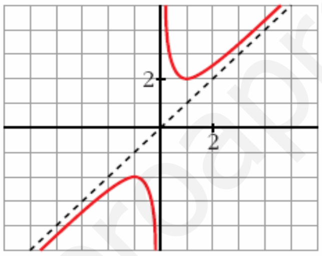
$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2 - 1 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



Máximo en $(-1, -2)$ y mínimo en $(1, 2)$.

- **Gráfica:**



f) $y = \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{3\}$

- **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 1 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) < 1 \text{ si } x \to -\infty;\ f(x) > 1 \text{ si } x \to +\infty) \end{array}$$

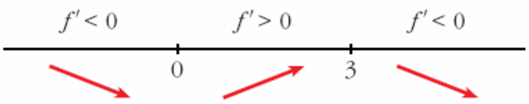
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x(x-3)^2 - x^2 \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{2x(x-3-x)}{(x-3)^3} = \frac{-6x}{(x-3)^3}$$

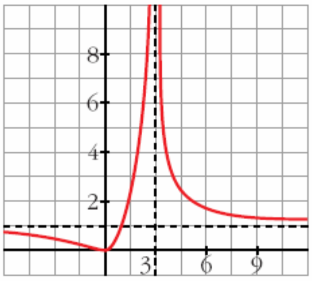
$$f'(x) = 0 \quad \to \quad -6x = 0 \quad \to \quad x = 0$$

Signo de $f'(x)$:



Mínimo en $(0, 0)$.

• **Gráfica:**



13 S **En las siguientes funciones se pide: dominio de definición, cortes con los ejes, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los posibles máximos o mínimos.**

Con la información obtenida, represéntalas:

a) $y = \dfrac{2x+2}{3x-3}$ **b)** $y = \dfrac{x}{x-4}$ **c)** $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2-2x+2}$ **e)** $y = \dfrac{(x+2)^2}{x^2+1}$ **f)** $y = \dfrac{x^2+1}{3x}$

a) $y = \dfrac{2x+2}{3x-3}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

• **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \dfrac{-2}{3} \rightarrow$ Punto $\left(0, \dfrac{-2}{3}\right)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow$ Punto $(-1, 0)$

• **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \frac{2(3x-3)-(2x+2)\cdot 3}{(3x-3)^2} = \frac{6x-6-6x-6}{(3x-3)^2} = \frac{-12}{(3x-3)^2}$$

$f'(x) \neq 0$ para todo x

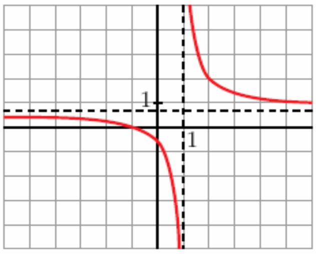
$f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en todo su dominio.

• **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{2}{3} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{2}{3} \text{ es asíntota horizontal.} \\ \left(f(x) < \dfrac{2}{3} \text{ si } x \to -\infty;\ f(x) > \dfrac{2}{3} \text{ si } x \to +\infty\right) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{x}{x-4}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{4\}$

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

- **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \frac{x - 4 - x}{(x-4)^2} = \frac{-4}{(x-4)^2}$$

$f'(x) \neq 0$ para todo x.

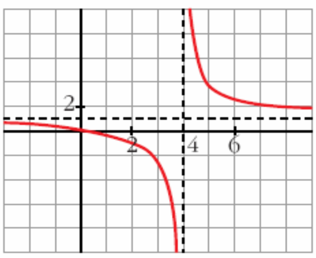
$f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en todo su dominio. No tiene máximos ni mínimos.

- **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 1 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) < 1 \text{ si } x \to -\infty;\ f(x) > 1 \text{ si } x \to +\infty) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = 4 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Gráfica:**



c) $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

- **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2 - x \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x-1-2x}{(x-1)^3} = \frac{-x-1}{(x-1)^3}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow -x - 1 = 0 \rightarrow x = -1$

Signo de $f'(x)$:

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, crece en $(-1, 1)$.

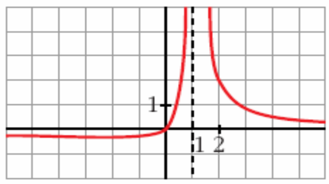
Tiene un mínimo en $\left(-1, \frac{-1}{4}\right)$.

- **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) < 0 \text{ si } x \to -\infty;\ f(x) > 0 \text{ si } x \to +\infty) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$

- **Dominio:**

$x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$. No tiene solución. Por tanto:

Dominio: $\mathbb{R}$

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2} \rightarrow$ Punto $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Como $y \neq 0$, no corta al eje X.

- **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \frac{-(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x-2=0 \;\rightarrow\; x=1$$

Signo de $f'(x)$: $f' > 0$ (creciente) en $(-\infty, 1)$; 1; $f' < 0$ (decreciente) en $(1, +\infty)$

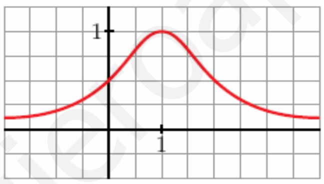
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$, es decreciente en $(1, +\infty)$. Tiene un máximo en $(1, 1)$.

- **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 0 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) > 0 \;\rightarrow\; \text{la curva está por encima de la asíntota}) \end{array}$$

No tiene asíntotas verticales.

- **Gráfica:**



e) $y = \dfrac{(x+2)^2}{x^2+1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje Y $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ $y = 4$ $\rightarrow$ Punto $(0, 4)$

— Con el eje X $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ $x = -2$ $\rightarrow$ Punto $(-2, 0)$

- **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \frac{2(x+2)(x^2+1)-(x+2)^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{(x+2)[2x^2+2-2x(x+2)]}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{(x+2)(2x^2+2-2x^2-4x)}{(x^2+1)^2} = \frac{(x+2)(2-4x)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; (x+2)(2-4x) = 0 \;\begin{cases} x = -2 \\ x = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$: $f' < 0$ (decreciente); -2; $f' > 0$ (creciente); $\frac{1}{2}$; $f' < 0$ (decreciente)

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$; es creciente en $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$.

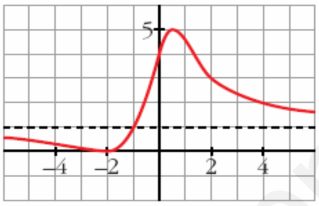
Tiene un mínimo en $(-2, 0)$ y un máximo en $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$.

- **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 1 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) < 1 \text{ si } x \to -\infty;\ f(x) > 1 \text{ si } x \to +\infty) \end{array}$$

No tiene asíntotas verticales.

- **Gráfica:**



f) $y = \dfrac{x^2 + 1}{3x} = \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{3x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Cortes con los ejes:**

— No corta al eje Y, pues $x = 0$ no está en el dominio.

— No corta al eje X, pues $x^2 + 1 \neq 0$ para todo x.

- **Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:**

$$f'(x) = \frac{2x \cdot 3x - (x^2 + 1) \cdot 3}{9x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{3x^2} = \frac{x^2 - 1}{3x^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 1 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

Signo de $f'(x)$:

$f' > 0$ -1 $f' < 0$ 0 $f' < 0$ 1 $f' > 0$

$\nearrow \quad \searrow \quad \searrow \quad \nearrow$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; es decreciente en $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

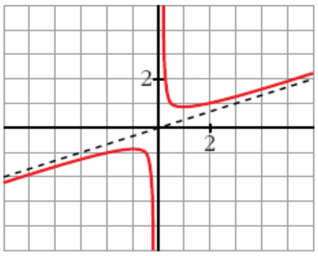
Tiene un máximo en $\left(-1, \frac{-2}{3}\right)$ y tiene un mínimo en $\left(1, \frac{2}{3}\right)$.

- **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical.} \quad y = \frac{x}{3} \text{ es asíntota oblicua.}$$

$\left(f(x) < \frac{x}{3} \text{ si } x \to -\infty;\ f(x) > \frac{x}{3} \text{ si } x \to +\infty\right)$

- **Gráfica:**



PARA RESOLVER

14 S **Representa las siguientes funciones estudiando previamente:**

— Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto de esta

— Intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y extremos relativos.

a) $y = 2x + \frac{8}{x}$

b) $y = \frac{2x}{(x+1)^2}$

c) $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

d) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

e) $y = \frac{4x - 12}{(x-2)^2}$

f) $y = \frac{x}{(x-2)^2}$

g) $y = \frac{(x-1)(x-3)}{x-2}$

h) $y = \frac{x^2}{9 - x^2}$

i) $y = \frac{x^2 + 4}{x}$

j) $y = \frac{x^2}{(x-3)^2}$

k) $y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$

l) $y = \frac{x^4}{x^2 - 4}$

m) $y = \frac{x^3}{x + 2}$

n) $y = \frac{(x-2)^2}{x - 1}$

a) $y = 2x + \frac{8}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = 2x$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 2x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 2x$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$f'(x) = 2 - \dfrac{8}{x^2}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad \dfrac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \quad \to \quad x^2 = 4 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

Signo de la derivada:

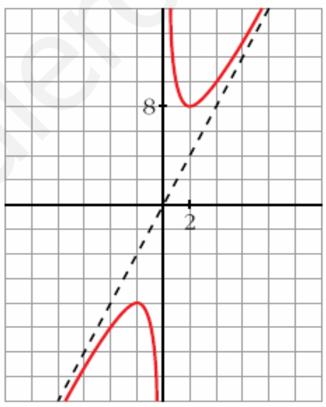
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$

tiene un máximo en $(-2, -8)$

tiene un mínimo en $(2, 8)$

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1\}$

- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

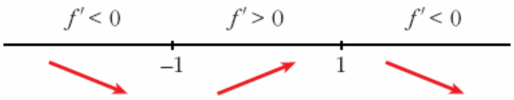
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \; x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2(x+1)^2 - 2x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)(2x+2-4x)}{(x+1)^4} = \frac{-2x+2}{(x+1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -2x+2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1$$

Signo de $f'(x)$:

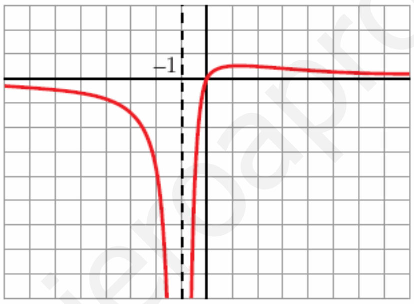


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

es creciente en $(-1, 1)$

tiene un máximo en $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

- **Gráfica:**



c) $y = \dfrac{x^3}{x^2-4} = x + \dfrac{4x}{x^2-4}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

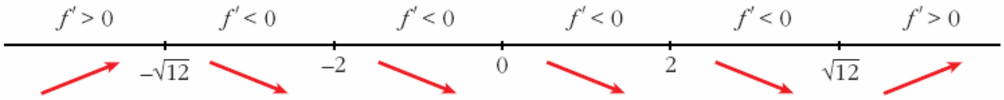
(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > x$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2(x^2-12) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{12} \\ x = \sqrt{12} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



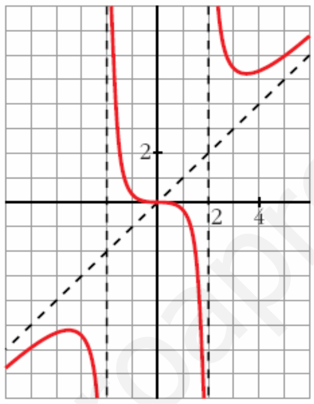
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, +\infty)$

es decreciente en $(-\sqrt{12}, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \sqrt{12})$

tiene un máximo en $(-\sqrt{12}, -3\sqrt{3})$

tiene un mínimo en $(\sqrt{12}, 3\sqrt{3})$

- **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \dfrac{1}{x - 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x - 1$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) < x - 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x - 1$)

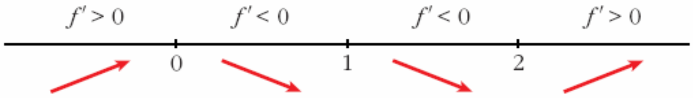
- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x(x-2) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Signo de $f'(x)$:



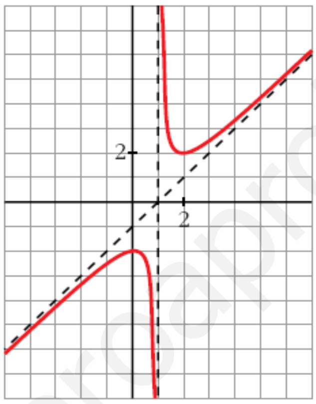
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$

tiene un máximo en $(0, -2)$

tiene un mínimo en $(2, 2)$

• **Gráfica:**



e) $y = \dfrac{4x - 12}{(x - 2)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$

• **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty,\ f(x) < 0$; si $x \to +\infty,\ f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota oblicua.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{4(x-2)^2 - (4x-12) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{4(x-2) - 2(4x-12)}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{4x - 8 - 8x + 24}{(x-2)^3} = \frac{-4x + 16}{(x-2)^3}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad -4x + 16 = 0 \quad \to \quad x = 4$

Signo de $f'(x)$:

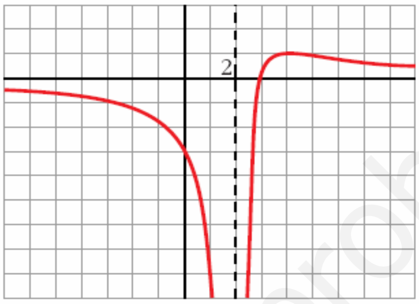
$f' < 0$	2	$f' > 0$	4	$f' < 0$
$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

es creciente en $(2, 4)$

tiene un máximo en $(4, 1)$

- **Gráfica:**



f) $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$
- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{(x-2)^2 - x \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{x - 2 - 2x}{(x-2)^3} = \frac{-x-2}{(x-2)^3}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad -x - 2 = 0 \quad \to \quad x = -2$

Signo de $f'(x)$:

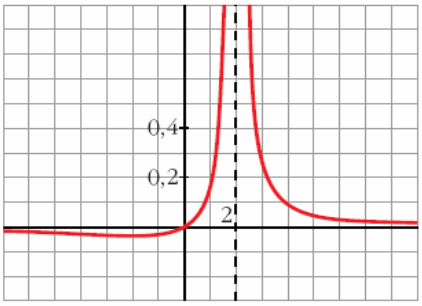
$f' < 0$	–2	$f' > 0$	2	$f' < 0$
$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es creciente en $(-2, 2)$

tiene un mínimo en $\left(-2, \dfrac{-1}{8}\right)$

- **Gráfica:**



g) $y = \dfrac{(x-1)(x-3)}{x-2} = \dfrac{x^2-4x+3}{x-2} = x - 2 - \dfrac{1}{x-2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x - 2$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x - 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x - 2$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

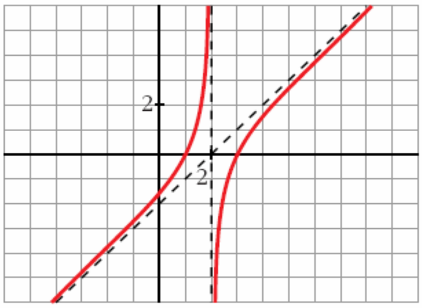
$f'(x) = 1 + \dfrac{1}{(x-2)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow (x-2)^2 + 1 = 0 \rightarrow$ no tiene solución

$f(x)$ no tiene extremos relativos.

$f'(x) > 0$ para todo $x \rightarrow f(x)$ es creciente en todo su dominio.

- **Gráfica:**



h) $y = \dfrac{x^2}{9 - x^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < -1$; si $x \to +\infty$, $f(x) < -1$)

$y = -1$ es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = -3 \text{ es asíntota vertical}$$

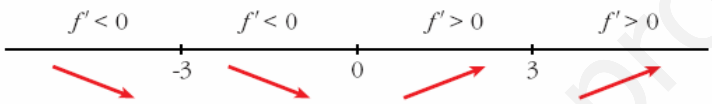
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2x(9 - x^2) - x^2 \cdot (-2x)}{(9 - x^2)^2} = \frac{18x - 2x^3 + 2x^3}{(9 - x^2)^2} = \frac{18x}{(9 - x^2)^2}$$

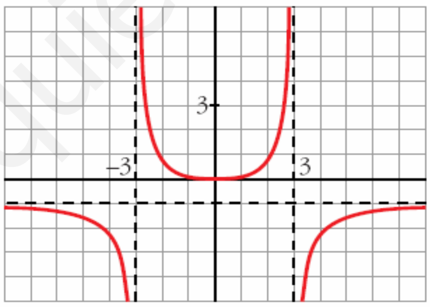
$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 18x = 0 \quad \to \quad x = 0$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$
es creciente en $(0, 3) \cup (3, +\infty)$
tiene un mínimo en $(0, 0)$

- **Gráfica:**



i) $y = \dfrac{x^2 + 4}{x} = x + \dfrac{4}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) < x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 4 = 0 \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

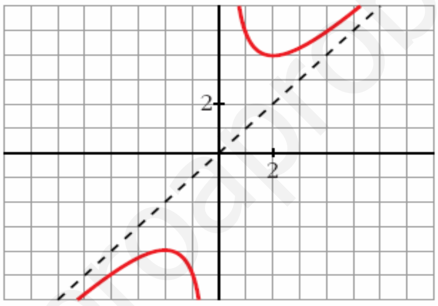
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$

tiene un máximo en $(-2, -4)$

tiene un mínimo en $(2, 4)$

- **Gráfica:**



j) $y = \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{3\}$

- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 1$)

$y = 1$ es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2x(x-3)^2 - x^2 \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{2x(x-3) - 2x^2}{(x-3)^3} =$$

$$= \frac{2x^2 - 6x - 2x^2}{(x-3)^3} = \frac{-6x}{(x-3)^3}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -6x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$$

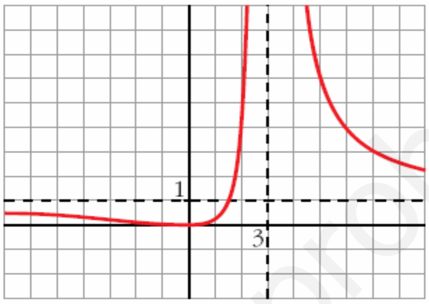
Signo de $f'(x)$:

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

es creciente en $(0, 3)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$

- **Gráfica:**



k) $y = \dfrac{2x^3}{x^2+1} = 2x - \dfrac{2x}{x^2+1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$y = 2x$ es asíntota oblicua.

(Si $x \to -\infty$, $f(x) > 2x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 2x$).

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2+1) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{6x^4 + 6x^2 - 4x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^4 + 6x^2}{(x^2+1)^2}$$

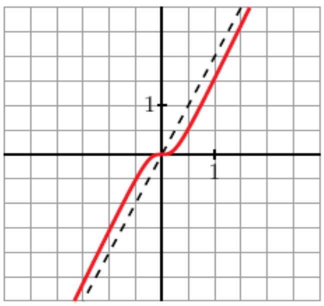
$f'(x) = 0 \;\to\; 2x^2(x^2+3) = 0 \;\to\; x = 0$

Signo de $f'(x)$:

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$

$f(x)$ es creciente en todo $\mathbb{R}$.

- **Gráfica:**



l) $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 4}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{Ramas parabólicas}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2-4) - x^4 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{4x^5 - 16x^3 - 2x^5}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^5 - 16x^3}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{2x^3(x^2 - 8)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x^3(x^2 - 8) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{8} \\ x = \sqrt{8} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

$f' < 0$	$-\sqrt{8}$	$f' > 0$	-2	$f' > 0$	0	$f' < 0$	2	$f' < 0$	$\sqrt{8}$	$f' > 0$
↘		↗		↗		↘		↘		↗

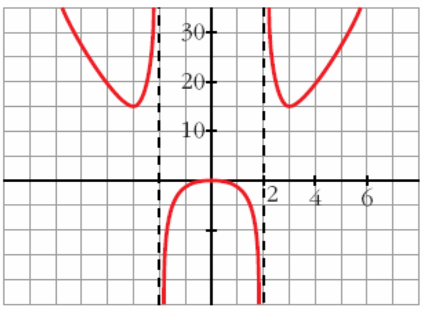
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{8}) \cup (0, 2) \cup (2, \sqrt{8})$

es creciente en $(-\sqrt{8}, -2) \cup (-2, 0) \cup (\sqrt{8}, +\infty)$

tiene un mínimo en $(-\sqrt{8}, 16)$ y otro en $(\sqrt{8}, 16)$

tiene un máximo en $(0, 0)$

- **Gráfica:**



m) $y = \dfrac{x^3}{x+2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; & \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; & \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{array}\right\} \text{Ramas parabólicas}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+2) - x^3}{(x+2)^2} = \frac{3x^3 + 6x^2 - x^3}{(x+2)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x^2(x+3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

$f' < 0$	-3	$f' > 0$	-2	$f' > 0$	0	$f' > 0$
$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

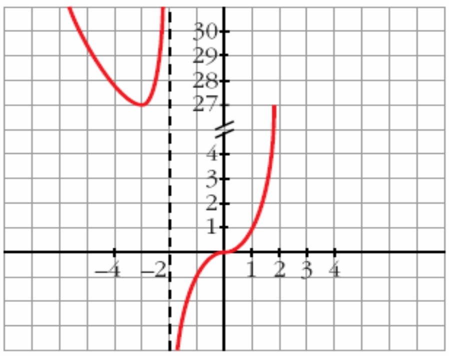
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3)$

es creciente en $(-3, -2) \cup (-2, +\infty)$

tiene un mínimo en $(-3, 27)$

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$

- **Gráfica:**



n) $y = \dfrac{(x-2)^2}{x-1} = x - 3 + \dfrac{1}{x-1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x - 3$ es asíntota oblicua.

(Si $x \to -\infty$, $f(x) < x - 3$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x - 3$).

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

$$\begin{array}{ccccccc} f' > 0 & & f' < 0 & & f' < 0 & & f' > 0 \\ \nearrow & 0 & \searrow & 1 & \searrow & 2 & \nearrow \end{array}$$

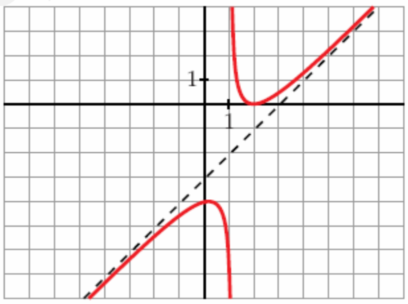
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$

tiene un máximo en $(0, -4)$

tiene un mínimo en $(2, 0)$

- **Gráfica:**



15 **a) Halla las asíntotas de la gráfica de la función definida para $x > 0$ por**

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{x}.$$

b) Halla las regiones de crecimiento y de decrecimiento de f indicando sus máximos y mínimos locales y globales, si los hay.

c) Esboza la gráfica de f.

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \rightarrow x = 0$ es asíntota vertical.

$f(x) = x + \dfrac{1}{x} \quad \rightarrow \quad y = x$ es asíntota oblicua.

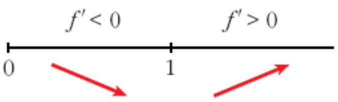
(Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > x$)

b) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \quad \begin{cases} x = -1 & \text{(no vale)} \\ x = 1 \end{cases}$

($x = -1$ no vale, pues $f(x)$ está definida solamente para $x > 0$)

Signo de $f'(x)$:



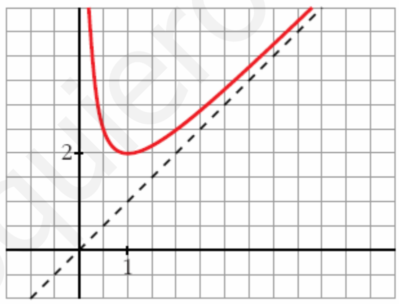
$f(x)$ es decreciente en $(0, 1)$

es creciente en $(1, +\infty)$

tiene un mínimo (local y global) en $(1, 2)$

no tiene un máximo

c)



16 **Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, se pide:**

a) Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto a estas.

b) Máximos y mínimos relativos, e intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) Dibuja la gráfica de f.

a) • **Dominio:** $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

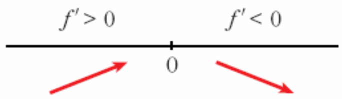
$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\}$ $y = 0$ es asíntota horizontal.

($f(x) > 0 \quad \rightarrow \quad$ la curva está por encima de la asíntota).

b) $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

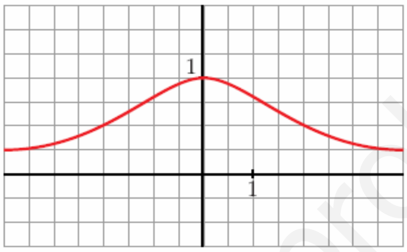
$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$; es decreciente en $(0, +\infty)$. Tiene un máximo en $(0, 1)$.

c)



Página 206

17 **S** **Representa gráficamente la función: $p(x) = x^4 + 4/3\,x^3 + 2x^2 - 2$**

¿Cuántas raíces reales tiene este polinomio $p(x)$?

$p(x) = x^4 + \dfrac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 2$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$

- $p'(x) = 4x^3 + 4x^2 + 4x = 4x(x^2 + x + 1)$

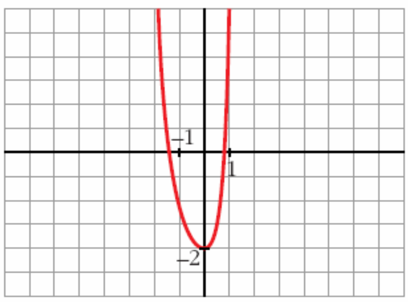
  $p'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad$ Hay un punto singular en $(0, -2)$.

- $p''(x) = 12x^2 + 8x + 4 = 4(3x^2 + 2x + 1)$

  $p''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{6} \quad \rightarrow \quad$ no tiene solución.

  $p(x)$ no tiene puntos de inflexión.

- **Gráfica:**



- $f(x)$ tiene dos raíces reales.

18 **Dadas las siguientes funciones, halla sus asíntotas, estudia el crecimiento y la existencia de máximos y mínimos. Dibuja su gráfica:**

a) $y = \dfrac{e^x}{x^2+3}$ **b)** $y = \dfrac{x^3}{4x^2+1}$

c) $y = x + \dfrac{4}{(x-1)^2}$ **d)** $y = \dfrac{x^3+8}{x^3-1}$

a) $y = \dfrac{e^x}{x^2+3}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad \to \quad y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > 0)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to$ Rama parabólica

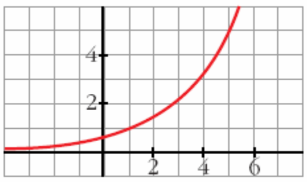
- **Crecimiento, máximos y mínimos:**

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+3) - e^x 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+3)}{(x^2+3)^2}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2 - 2x + 3 = 0 \quad \to \quad x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2}$. No tiene solución.

$f'(x) > 0$ para todo $x \quad \to \quad f(x)$ es creciente en todo $\mathbb{R}$. No tiene máximos ni mínimos.

- Corta al eje Y en $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$.
- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{x^3}{4x^2+1} = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{(1/4)x}{4x^2+1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$y = \dfrac{1}{4}x$ es asíntota oblicua.

(Si $x \to -\infty$, $f(x) > \dfrac{1}{4}x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < \dfrac{1}{4}x$)

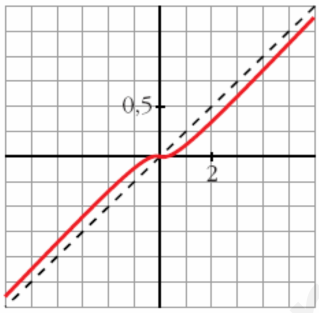
- **Crecimiento, máximos y mínimos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(4x^2+1) - x^3 \cdot 8x}{(4x^2+1)^2} = \frac{12x^4 + 3x^2 - 8x^4}{(4x^2+1)^2} = \frac{4x^4 + 3x^2}{(4x^2+1)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(4x^2+3) = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; (0, 0)$

$f'(x) > 0$ si $x \neq 0 \;\rightarrow\; f(x)$ es creciente (tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$

- **Gráfica:**



c) $y = x + \dfrac{4}{(x-1)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

(Si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x$).

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^3 - 8}{(x-1)^3}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; (x-1)^3 = 8 \;\rightarrow\; x - 1 = 2 \;\rightarrow\; x = 3$

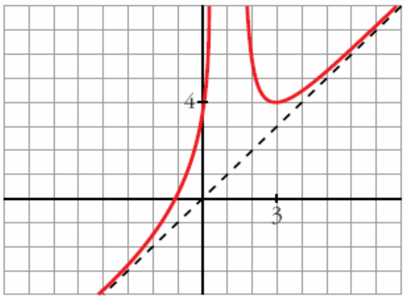
Signo de $f'(x)$:

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

es decreciente en $(1, 3)$

tiene un mínimo en $(3, 4)$

- **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{x^3 + 8}{x^3 - 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 1 \text{ es asíntota horizontal.} \\ (f(x) < 1 \text{ si } x \to -\infty;\ f(x) > 1 \text{ si } x \to +\infty) \end{array}$$

- **Crecimiento, máximos y mínimos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^3 - 1) - (x^3 + 8) \cdot 3x^2}{(x^3 - 1)^2} = \frac{3x^2(x^3 - 1 - x^3 - 8)}{(x^3 - 1)^2} = \frac{-27x^2}{(x^3 - 1)^2}$$

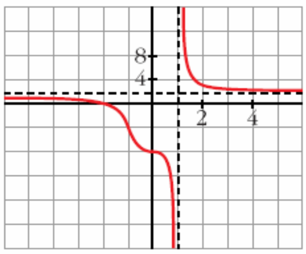
$f'(x) = 0 \quad \to \quad -27x^2 = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:

$f'(x) < 0 \quad \to \quad f(x)$ es decreciente en su dominio.

(Tiene un punto de inflexión en $(0, -8)$).

- **Gráfica:**



19 **Estudia los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:**

a) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ **b)** $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ **c)** $y = sen\ x + cos\ x$ **para** $0 \le x \le 2\pi$

a) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = senh\ x$. Esta función se denomina seno hiperbólico de x.

- $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

  $f'(x) = 0 \ \rightarrow \ e^x + e^{-x} = 0 \ \rightarrow$ no tiene solución $\rightarrow$

  $\rightarrow$ no hay máximos ni mínimos

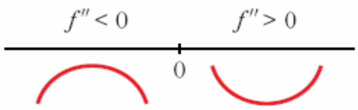
  $f'(x) > 0$ para todo $x \ \rightarrow \ f(x)$ es creciente

- $f''(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

  $f''(x) = 0 \ \rightarrow \ e^x - e^{-x} = 0 \ \rightarrow \ e^x - \dfrac{1}{e^x} = 0 \ \rightarrow \ e^{2x} - 1 = 0$

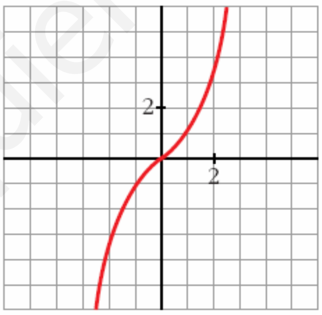
  $e^{2x} = 1 \ \rightarrow \ 2x = 0 \ \rightarrow \ x = 0 \ \rightarrow \ y = 0$

  Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**

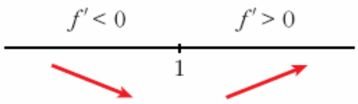


b) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = cosh\ x$. Esta función se denomina coseno hiperbólico de x.

- $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

  $f'(x) = 0 \ \rightarrow \ e^x - e^{-x} = 0 \ \rightarrow \ x = 0 \ \rightarrow \ y = 1$

  Signo de $f'(x)$:

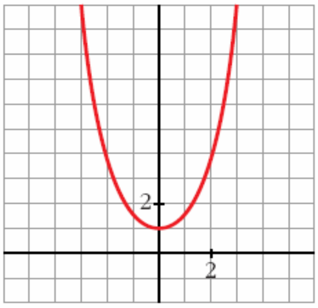


Hay un mínimo en $(0, 1)$.

- $f''(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

  $f''(x) = 0 \ \rightarrow$ no tiene solución $\rightarrow$ no hay puntos de inflexión

- **Gráfica:**



c) $y = sen\, x + cos\, x$ para $0 \le x \le 2\pi$

- $f'(x) = cos\, x - sen\, x$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; cos\, x = sen\, x \;\rightarrow\; tg\, x = 1 \left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} \end{array} \right.$$

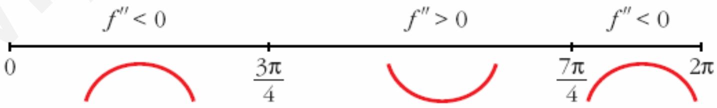
Signo de $f'(x)$:

Hay un máximo en $\left(\dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ y un mínimo en $\left(\dfrac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$.

- $f''(x) = -sen\, x - cos\, x$

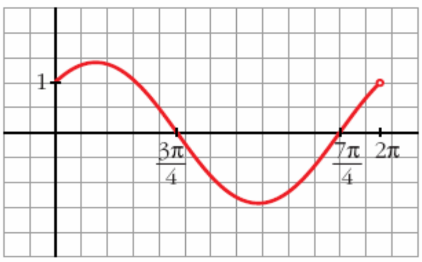
$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; sen\, x = -cos\, x \;\rightarrow\; tg\, x = -1 \left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{4} \\ x = \dfrac{7\pi}{4} \end{array} \right.$$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $\left(\dfrac{3\pi}{4}, 0\right)$ y otro en $\left(\dfrac{7\pi}{4}, 0\right)$.

- **Gráfica:**



20 **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{x}{e^x}$ **b)** $y = \dfrac{ln\ x}{x}$ **c)** $y = x\ ln\ x$

d) $y = (x - 1)e^x$ **e)** $y = xe^{x+1}$ **f)** $y = x^2 e^{-x}$

g) $y = \dfrac{x^2}{ln\ x}$ **h)** $y = ln(x^2 - 1)$

a) $y = \dfrac{x}{e^x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

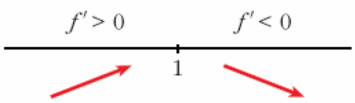
$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1 - x)}{e^{2x}} = \frac{1 - x}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 1 - x = 0 \quad \to \quad x = 1$$

Signo de $f'(x)$

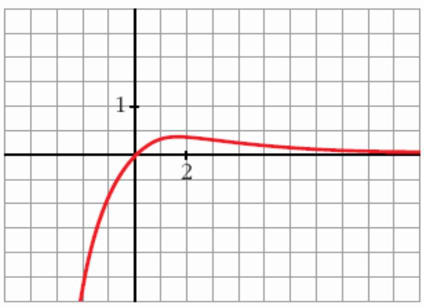


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$

es decreciente en $(1, +\infty)$

tiene un máximo en $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$

- Corta a los ejes en el punto $(0, 0)$.
- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

- **Dominio:** $(0, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \quad \to \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{x} = 0$$

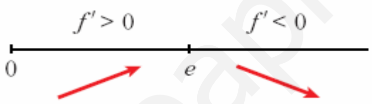
$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{(1/x) \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad \ln x = 1 \quad \to \quad x = e$$

Signo de $f'(x)$:



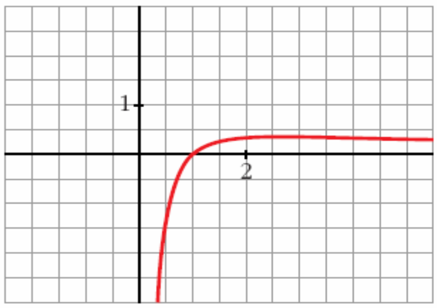
$f(x)$ es creciente en $(0, e)$

es decreciente en $(e, +\infty)$

tiene un máximo en $\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$

- Corta al eje X en $(1, 0)$.

- **Gráfica:**



c) $y = x \ln x$

- **Dominio:** $(0, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

No tiene asíntotas verticales.

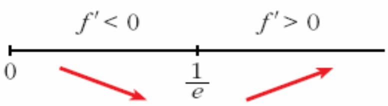
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad \ln x = -1 \quad \to \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Signo de $f'(x)$:



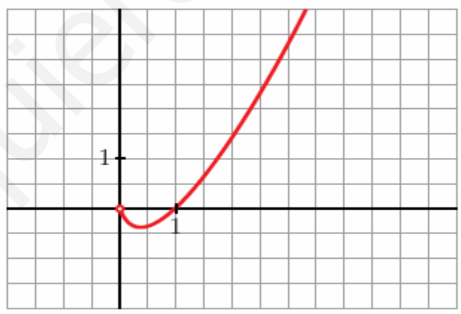
$f(x)$ es decreciente en $\left(0, \frac{1}{e}\right)$

es creciente en $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

tiene un mínimo en $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$

- Corta al eje X en $(1, 0)$.

- **Gráfica:**



d) $y = (x - 1)e^x$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x - 1)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x-1}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) < 0)$.

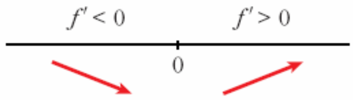
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = e^x + (x-1)e^x = e^x(1 + x - 1) = xe^x$$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$

es creciente en $(0, +\infty)$

tiene un mínimo en $(0, -1)$

- Corta al eje X en $(1, 0)$.
- **Gráfica:**

e) $y = xe^{x+1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

$(f(x) < 0$ si $x \to -\infty)$

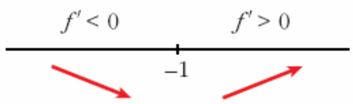
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \quad \rightarrow$ Rama parabólica

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = e^{x+1} + xe^{x+1} = (1 + x)e^{x+1}$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$

Signo de $f'(x)$:



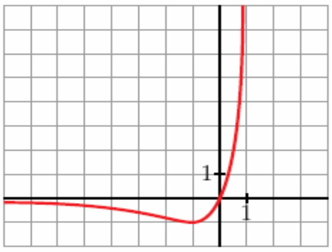
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1)$

es creciente en $(-1, +\infty)$

tiene un mínimo en $(-1, -1)$.

- Corta a los ejes en el punto $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



f) $y = x^2e^{-x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

- **Puntos singulares:** $y = \dfrac{x^2}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x\,(2x - x^2)}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x - x^2 = 0 \quad \to \quad x(2 - x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

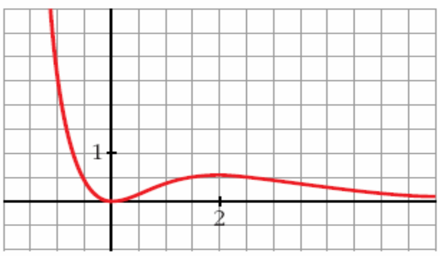
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

es creciente en $(0, 2)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$

tiene un máximo en $\left(2, \dfrac{4}{e^2}\right)$

- **Gráfica:**



g) $y = \dfrac{x^2}{ln\, x}$

- **Dominio:**

  $ln\, x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1$. Además, ha de ser $x > 0$.

  Dominio: $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

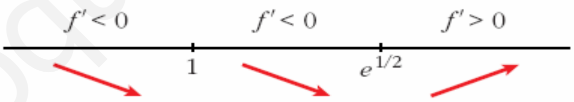
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \rightarrow \quad \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x\, ln\, x - x^2 \cdot \dfrac{1}{x}}{(ln\, x)^2} = \frac{2x\, ln\, x - x}{(ln\, x)^2} = \frac{x(2ln\, x - 1)}{(ln\, x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x(2ln\, x - 1) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \quad \text{(no vale)} \\ ln\, x = \dfrac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x = e^{1/2} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

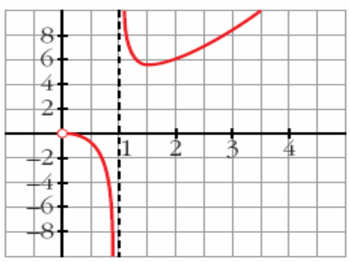


$f(x)$ es decreciente en $(0, 1) \cup (1, e^{1/2})$

es creciente en $(e^{1/2}, +\infty)$

tiene un mínimo en $(e^{1/2}, 2e)$.

- **Gráfica:**



h) $y = ln(x^2 - 1)$

- **Dominio:** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \quad \to \quad x = -1$ es asíntota vertical

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \quad \to \quad x = 1$ es asíntota vertical

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{Ramas parabólicas}$$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x = 0 \quad \to \quad x = 0$

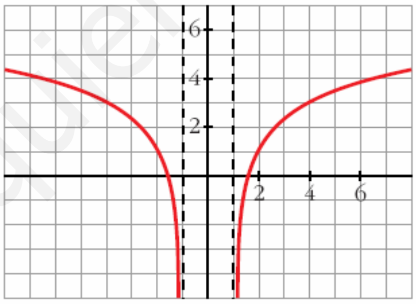
No hay puntos singulares ($x = 0$ no pertenece al dominio).

- **Puntos de corte con el eje X:**

$ln(x^2 - 1) = 0 \quad \to \quad x^2 - 1 = 1 \quad \to \quad x^2 = 2 \quad \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$

Puntos: $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$

- **Gráfica:**



21 **Estudia y representa las siguientes funciones:**

a) $y = \sqrt{4 - x^2}$ **b)** $y = \sqrt{x^2 - 4}$ **c)** $y = \sqrt[3]{x^2}$ **d)** $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$

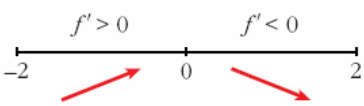
a) $y = \sqrt{4 - x^2}$

- **Dominio:** $[-2, 2]$
- **Asíntotas:** No tiene.
- **Puntos singulares:**

$f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$

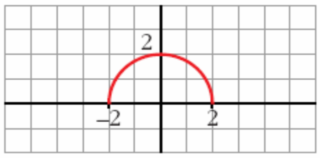
$f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en el intervalo $(-2, 0)$ y decreciente en el intervalo $(0, 2$
Tiene un máximo en $(0, 2)$.

- Corta al eje X en $(-2, 0)$ y en $(2, 0)$.
- **Gráfica:**



b) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

- **Dominio:** $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
- **Simetría:**

$f(-x) = f(x) \quad \to \quad$ Es par $\quad \to \quad$ Simétrica respecto al eje Y.

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - 4} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4} - x)(\sqrt{x^2 - 4} + x)}{\sqrt{x^2 - 4} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = 0$$

$y = x$ es asíntota oblícua cuando $x \to +\infty$. $(f(x) < x)$

Por simetría (pues $f(x)$ es par), deducimos que:

$y = -x$ es asíntota oblícua cuando $x \to -\infty$.

$(f(x) < -x)$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

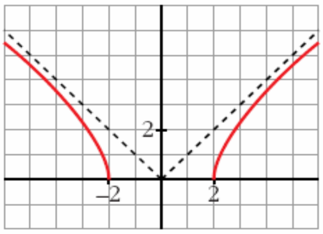
$f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 0$ (que no está en el dominio)

No tiene puntos singulares.

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2)$ y es creciente en $(2, +\infty)$.

- Pasa por $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

- **Gráfica:**



c) $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Simetría:**

  $f(-x) = \sqrt[3]{x^2} = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- No tiene asíntotas.

- **Ramas infinitas:**

  $$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{Ramas parabólicas}$$

- **Puntos singulares:**

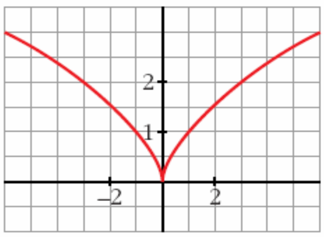
  $f'(x) = \dfrac{2}{3}x^{-1/3} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

  No existe $f'(0)$ $\rightarrow$ $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

  $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$.

- Pasa por $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



d) $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

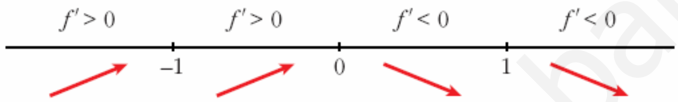
$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{ Ramas parabólicas}$$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = \dfrac{-2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} \;\to\; f(x)$ no es derivable en $x = -1$ ni en $x = 1$.

$f'(x) = 0 \;\to\; -2x = 0 \;\to\; x = 0$

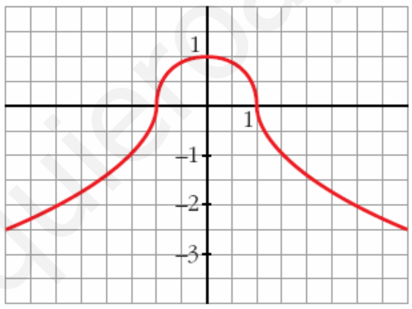
Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$, es decreciente en $(0, +\infty)$; tiene un máximo en $(0, 1)$.

- Corta al eje X en $(-1, 0)$ y en $(1, 0)$.

- **Gráfica:**

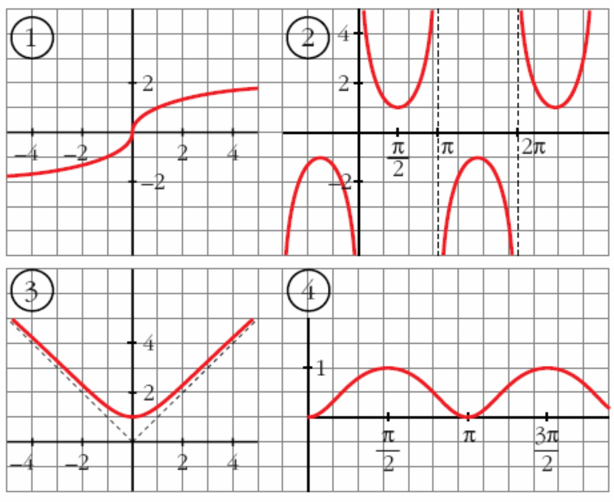


22 **Estudia el dominio de definición, las asíntotas y los extremos de cada una de las siguientes funciones y, con esa información, trata de encontrar su gráfica entre las que están representadas a continuación:**

a) $y = \dfrac{1}{\text{sen } x}$

b) $y = x\,e^x$

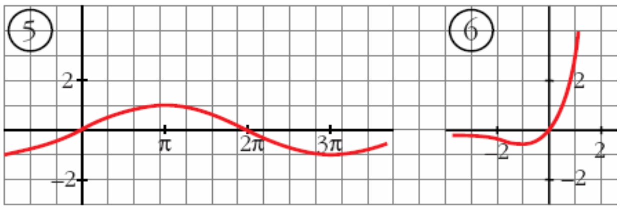
c) $y = \text{sen } \dfrac{x}{2}$



d) $y = \sqrt[3]{x}$

e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

f) $y = sen^2\, x$



a) $y = \dfrac{1}{sen\, x}$

- **Dominio:**

  $sen\, x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$

  $D = \mathbb{R} - \{\pi k\}, \quad k \in \mathbb{Z}$

- **Asíntotas:**

  $x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$ son asíntotas verticales.

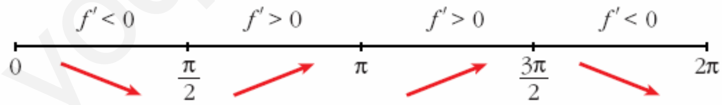
  No hay más asíntotas.

- **Extremos:**

  $f'(x) = \dfrac{-cos\, x}{sen^2\, x}$

  $f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad cos\, x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = \pi/2 + 2\pi k \\ x = 3\pi/2 + 2\pi k \end{array} \right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

  Signo de $f'(x)$ en $(0, 2\pi)$:



  $f(x)$ es periódica de periodo 2π.

  $f(x)$ es decreciente en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

  es creciente en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

  tiene un mínimo en $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$

  tiene un máximo en $\left(\dfrac{3\pi}{2}, -1\right)$

- **Gráfica** $\rightarrow$ 2

b) $y = xe^x$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -xe^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

  $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) < 0)$.

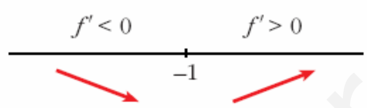
  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

- **Extremos:**

  $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

  $f'(x) = 0 \quad \to \quad 1 + x = 0 \quad \to \quad x = -1$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1)$

es creciente en $(-1, +\infty)$

tiene un mínimo en $\left(-1, \frac{-1}{e}\right)$

- **Gráfica** $\to$ 6

c) $y = sen\ \dfrac{x}{2}$

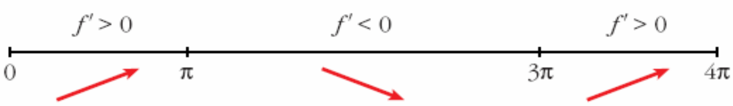
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:** No tiene.
- **Extremos:**

$f'(x) = \dfrac{1}{2} \cos \dfrac{x}{2}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad \cos \dfrac{x}{2} = 0 \quad \to \quad \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \quad \to \quad x = \pi + 2\pi k$

$f(x)$ es periódica de periodo 4π.

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$

es decreciente en $(\pi, 3\pi)$

tiene un máximo en $(\pi, 1)$

tiene un mínimo en $(3\pi, -1)$

- **Gráfica** $\rightarrow$ 5

d) $y = \sqrt[3]{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:** No tiene.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{ Ramas parabólicas}$$

- **Extremos:**

$f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \rightarrow \quad f(x)$ no es derivable en $x = 0$

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.

$f(x)$ es creciente.

- **Gráfica** $\rightarrow$ 1

e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Simetría:**

$f(-x) = f(x) \quad \rightarrow \quad f(x)$ es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 + 1} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

$y = x$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ $(f(x) > x)$.

Por simetría:

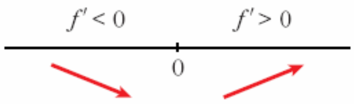
$y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > -x)$.

- **Extremos:**

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$

es creciente en $(0, +\infty)$

tiene un mínimo en $(0, 1)$

- **Gráfica** $\to$ 3

f) $y = sen^2\, x$

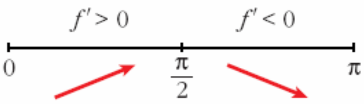
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:** No tiene.
- **Extremos:**

$f'(x) = 2sen\, x \cos x = sen\, 2x$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad sen\, 2x = 0 \quad \to \quad 2x = 0 + \pi k \quad \to \quad x = \dfrac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}$

$f(x)$ es periódica de periodo π.

Signo de $f'(x)$ en $(0, \pi)$:



$f(x)$ es creciente en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

es decreciente en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$

tiene un máximo en $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$ y otro en $(\pi, 0)$

- **Gráfica** $\to$ 4

23 **S** **La recta $y = 2x + 6$ es una asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x - k}$. Halla el valor de k y representa la función.**

- **Hallamos k:**

Si $y = 2x + 6$ es asíntota oblicua, tenemos que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2; \qquad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = 6$$

Por tanto:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - kx} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x^2 + 1}{x - k} - 2x\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 1 - 2x^2 + 2kx}{x - k} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2kx + 1}{x - k} = 2k = 6 \quad \to \quad k = 3$$

Luego: $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x - 3}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{3\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = 2x + 6$ es asíntota oblicua.

(Si $x \to -\infty$, $f(x) < 2x + 6$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 2x + 6$)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{4x(x - 3) - (2x^2 + 1)}{(x - 3)^2} = \frac{4x^2 - 12x - 2x^2 - 1}{(x - 3)^2} = \frac{2x^2 - 12x - 1}{(x - 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x^2 - 12x - 1 = 0 \quad \to \quad x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 8}}{4} \begin{cases} x = 6{,}08 \\ x = -0{,}08 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

$f' > 0$ | $-0{,}08$ | $f' < 0$ | 3 | $f' < 0$ | $6{,}08$ | $f' > 0$

$$\nearrow \qquad \searrow \qquad \searrow \qquad \nearrow$$

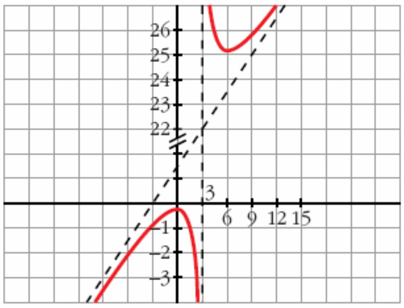
$f(x)$ es creciente en $(-\infty; -0{,}08) \cup (6{,}08; +\infty)$

es decreciente en $(-0{,}08; 3) \cup (3; 6{,}08)$

tiene un máximo en $(-0{,}08; -0{,}33)$

tiene un mínimo en $(6{,}08; 24{,}32)$

- **Gráfica:**



24
S

Una partícula se mueve a lo largo de la gráfica de la curva $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$ para $x > 1$.

En el punto $P\left(2, -\dfrac{4}{3}\right)$ la deja y se desplaza a lo largo de la recta tangente a dicha curva.

a) Halla la ecuación de la tangente.

b) Si se desplaza de derecha a izquierda, halla el punto en el que la partícula encuentra a la asíntota vertical más próxima al punto P.

c) Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, halla el punto en el que la partícula encuentra el eje OX.

a) $f'(x) = \dfrac{2(1-x^2) - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{2 - 2x^2 + 4x^2}{(1-x^2)^2} = \dfrac{2x^2+2}{(1-x^2)^2}$

$f'(2) = \dfrac{10}{9}$

La ecuación de la recta tangente en P es:

$y = -\dfrac{4}{3} + \dfrac{10}{9}(x-2) \quad \to \quad y = \dfrac{10}{9}x - \dfrac{32}{9}$

b) La asíntota vertical más próxima a P es $x = 1$. Tenemos que hallar el punto de intersección de $x = 1$ con la recta tangente anterior:

$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{10}{9}x - \dfrac{32}{9} \\ x = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{-22}{9} \\ x = 1 \end{array}\right\}$ El punto es $\left(1, \dfrac{-22}{9}\right)$

c) Tenemos que hallar el punto en el que la recta anterior corta al eje OX:

$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{10}{9}x - \dfrac{32}{9} \\ y = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \dfrac{10}{9}x = \dfrac{32}{9} \quad \to \quad x = \dfrac{32}{10} = \dfrac{16}{5} \\ y = 0 \end{array}\right\}$ El punto es $\left(\dfrac{16}{5}, 0\right)$

25 **Dada la función $f(x) = x^2 |x - 3|$ halla:**

S **a) Los puntos en los que f no es derivable.**

b) Calcula sus máximos y mínimos.

c) Represéntala gráficamente.

a) $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -x^2(-x+3) & \text{si } x < 3 \\ x^2(x-3) & \text{si } x \geq 3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} -x^3 + 3x^2 & \text{si } x < 3 \\ x^3 - 3x^2 & \text{si } x \geq 3 \end{array} \right.$

– **Si $x \pm 3$, tenemos que:** $f(x)$ es derivable. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 6x & \text{si } x < 3 \\ 3x^2 - 6x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Por tanto:

$\left. \begin{array}{l} f'(3^-) = -9 \\ f'(3^+) = 9 \end{array} \right\}$ $\begin{array}{l} f'(3^-) \neq f'(3^+) \\ f(x) \text{ no es derivable en } x = 3 \text{ (Punto } (3, 0)). \end{array}$

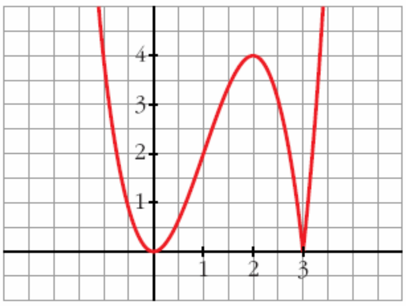
b) $f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} -3x^2 + 6x = 0 \text{ si } x < 3 \\ 3x(-x+2) = 0 \begin{array}{l} \nearrow x = 0 \rightarrow (0, 0) \\ \searrow x = 2 \rightarrow (2, 4) \end{array} \\ 3x^2 - 6x = 0 \text{ si } x > 3 \rightarrow \text{ninguno} \end{cases}$

Como $f(x) \geq 0$ para todo x, tenemos que:

$f(x)$ tiene un mínimo en $(0, 0)$ y otro en $(3, 0)$, y tiene un máximo en $(2, 4)$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Uniendo todo lo anterior, llegamos a la gráfica:



Página 207

26 **Halla los puntos de corte, los máximos y mínimos, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los puntos de inflexión de las siguientes funciones definidas en el intervalo $[0, 2\pi]$.**

Utilizando la información obtenida, represéntalas gráficamente:

a) $y = 1 - 2 \cos x$ **b) $y = 1 + 2 \operatorname{sen} x$**

c) $y = \operatorname{sen} x - \cos x$ **d) $y = (\operatorname{sen} x)^2$**

a) $y = 1 - 2\cos x$

- **Dominio:** $[0, 2\pi]$ (nos la definen en este intervalo).

- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow$ Punto $(0, -1)$

  — Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 1 - 2\cos x = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow$

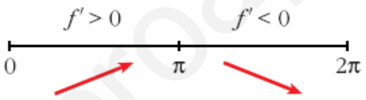
$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{3} \end{array}\right\} \text{ Puntos } \left(\frac{\pi}{3}, 0\right) \text{ y } \left(\frac{5\pi}{3}, 0\right)$$

- **Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento:**

  $f'(x) = 2\text{sen } x$

  $f'(x) = 0 \rightarrow \text{sen } x = 0 \rightarrow x = 0;\ x = \pi;\ x = 2\pi$

  Signo de $f'(x)$:



  $f(x)$ es creciente en el intervalo $(0, \pi)$ y es decreciente en el intervalo $(\pi, 2\pi)$

  Tiene un máximo en $(\pi, 3)$, un mínimo en $(0, -1)$ y otro mínimo en $(2\pi, -1)$

- **Puntos de inflexión:**

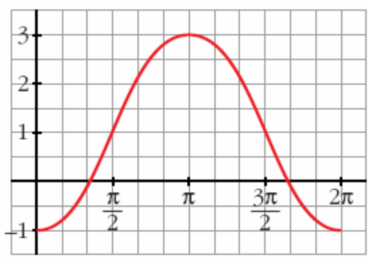
  $f''(x) = 2\cos x$

  $f''(x) = 0 \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2};\ x = \frac{3\pi}{2}$

  Signo de $f''(x)$:

  Puntos de inflexión: $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 1\right)$

- **Gráfica:**



b) $y = 1 + 2sen\ x$

- **Dominio:** $[0, 2\pi]$ (está solo definida en este intervalo).
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow$ Punto $(0, 1)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 1 + 2sen\ x = 0 \rightarrow sen\ x = -\dfrac{1}{2} \rightarrow$

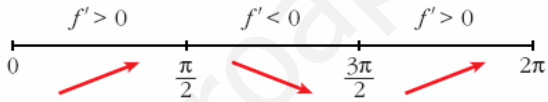
$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{7\pi}{6} \\ x = \dfrac{11\pi}{6} \end{array}\right\} \text{Puntos } \left(\frac{7\pi}{6}, 0\right) \text{ y } \left(\frac{11\pi}{6}, 0\right)$$

- **Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento:**

$f'(x) = 2cos\ x$

$$f'(x) = 0 \rightarrow cos\ x = 0 \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$; es decreciente en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

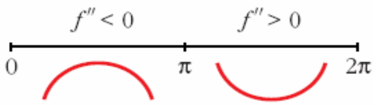
Tiene un máximo en $\left(\dfrac{\pi}{2}, 3\right)$ y un mínimo en $\left(\dfrac{3\pi}{2}, -1\right)$.

- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = -2sen\ x$

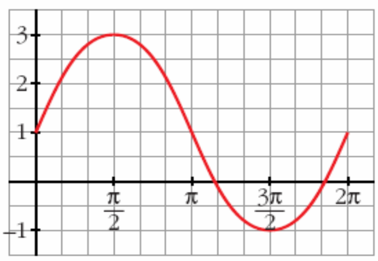
$$f''(x) = 0 \rightarrow sen\ x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:



Puntos de inflexión en $(0, 1)$, $(\pi, 1)$ y en $(2\pi, 1)$.

- **Gráfica:**



c) $y = sen\ x - cos\ x$

- **Dominio:** $[0, 2\pi]$ (nos la definen en este intervalo).
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow$ Punto $(0, -1)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow sen\ x - cos\ x = 0$

$$tg\ x = 1 \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} \end{cases} \text{Puntos } \left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \text{ y } \left(\frac{5\pi}{4}, 0\right)$$

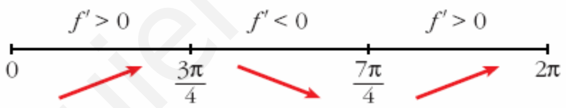
- **Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento:**

$f'(x) = cos\ x + sen\ x$

$f'(x) = 0 \rightarrow cos\ x + sen\ x = 0 \rightarrow 1 + tg\ x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow tg\ x = -1 \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{4} \\ x = \dfrac{7\pi}{4} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$; es decreciente en $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$.

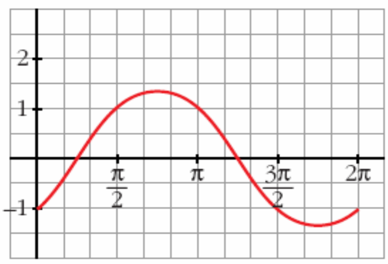
Tiene un máximo en $\left(\frac{3\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ y un mínimo en $\left(\frac{7\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$.

- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = -sen\ x + cos\ x = -(sen\ x - cos\ x) = -f(x)$

Los puntos de inflexión son los puntos de corte con el eje X.

- **Gráfica:**



d) $y = (sen\ x)^2$

- **Dominio:** $[0, 2\pi]$ (nos la definen en este intervalo).

- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

  — Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow sen\ x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases}$

  Puntos $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ y $(2\pi, 0)$.

- **Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento:**

  $f'(x) = 2sen\ x\ cos\ x$

  $$f'(x) = 0 \rightarrow sen\ x\ cos\ x = 0 \begin{cases} sen\ x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases} \\ cos\ x = 0 \begin{cases} x = \pi/2 \\ x = 3\pi/2 \end{cases} \end{cases}$$

  Signo de $f'(x)$:

0 – $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ – π	π – $\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$ – 2π
$f' > 0$	$f' < 0$	$f' > 0$	$f' < 0$
$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

  $f(x)$ es creciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$; es decreciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

  Tiene un máximo en $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, otro en $\left(\frac{3\pi}{2}, 1\right)$, y tiene un mínimo en $(0, 0)$,

  otro en $(\pi, 0)$ y otro en $(2\pi, 0)$.

- **Puntos de inflexión:**

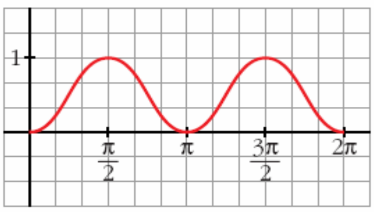
  $f''(x) = 2[cos^2\ x - sen^2\ x]$

  $f''(x) = 0 \rightarrow cos^2\ x - sen^2\ x = 0 \rightarrow 1 - tg^2\ x = 0 \rightarrow$

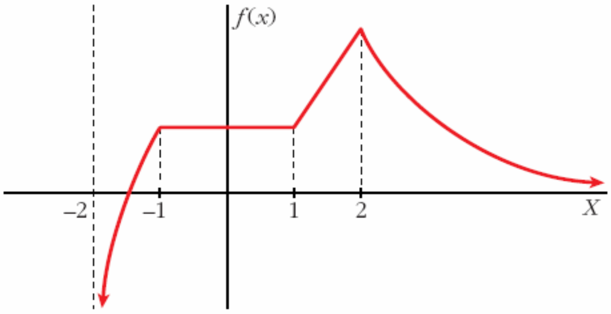
  $$\rightarrow tg^2\ x = 1 \begin{cases} tg\ x = -1 \begin{cases} x = 3\pi/4 \\ x = 7\pi/4 \end{cases} \\ tg\ x = 1 \begin{cases} x = \pi/4 \\ x = 5\pi/4 \end{cases} \end{cases}$$

  Puntos de inflexión: $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{7\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

- **Gráfica:**



27 **S** **Dada la gráfica de la función $f(x)$, determina:**



a) Dominio de la función.

b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) Intervalos donde la derivada es positiva.

d) Puntos donde no es derivable.

e) Ecuaciones de las asíntotas.

a) $(-2, +\infty)$

b) Es creciente en $(-2, -1) \cup (1, 2)$ y es decreciente en $(2, +\infty)$.

c) $f'(x) > 0$ en $(-2, -1) \cup (1, 2)$.

d) No es derivable en $x = -1$, ni en $x = 1$, ni en $x = 2$.

e) Asíntota vertical: $x = -2$

Asíntota horizontal: $y = 0$

28 **S** **Dada la función $f(x) = \dfrac{bx}{x^2 + 1}$ con $b \neq 0$, se pide:**

a) Determina las asíntotas de la función para cualquier valor del parámetro b.

b) Determina el valor del parámetro b para que la función tenga un máximo en el punto (1, 3).

a) • Dominio: $\mathbb{R}$

• No tiene asíntotas verticales.

• $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad \to \quad y = 0$ es asíntota horizontal.

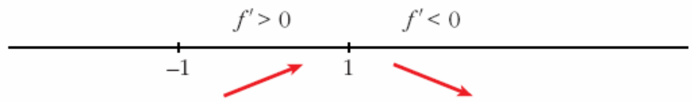
b) $f(1) = 3 \quad \to \quad \dfrac{b}{2} = 3 \quad \to \quad b = 6 \quad \to \quad f(x) = \dfrac{6x}{x^2 + 1}$

Comprobemos que, en efecto, hay un máximo para $x = 1$:

$$f'(x) = \frac{6(x^2 + 1) - 6x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{6x^2 + 6 - 12x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{6 - 6x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 6 - 6x^2 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Signo de $f'(x)$:



Como $f' > 0$ a la izquierda de $x = 1$, y $f' < 0$ a su derecha, en $x = 1$ ha un máximo.

29 **Comprueba que la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$ tiene dos asíntotas horizontale distintas.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x+1} & \text{si } x < 0 \\[2mm] \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Por tanto:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{x+1} = -1 \;\rightarrow\; y = -1$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1 \;\rightarrow\; y = 1$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +$

30 **Dada la función $f(x) = ax + b + \dfrac{8}{x}$, calcula a y b para que la gráfica de pase por el punto $(-2, -6)$ y tenga, en ese punto, tangente horizontal. Par ese valor de a y b, representa la función.**

$f(x) = ax + b + \dfrac{8}{x}$; $f'(x) = a - \dfrac{8}{x^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ Pasa por } (-2, -6) \;\rightarrow\; -2a + b - 4 = -6 \\ \bullet \text{ Tangente horizontal } \rightarrow f'(-2) = 0 \;\rightarrow\; a - 2 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -2a + b = -2 \\ a = 2 \end{array}\right\} \quad a = 2;\; b =$$

Para estos valores, queda: $f(x) = 2x + 2 + \dfrac{8}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x} \quad \rightarrow \quad y = 2x + 2$ es asíntota oblicua

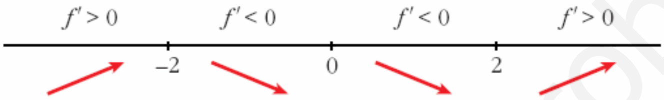
(Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 2x + 2$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 2x + 2$)

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 4 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

Signo de $f'(x)$:



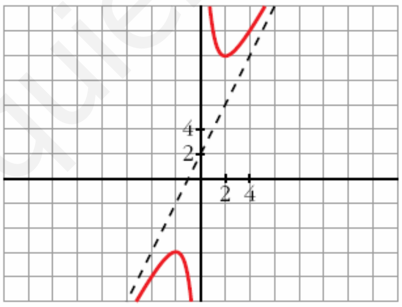
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$

tiene un máximo en $(-2, -6)$

tiene un mínimo en $(2, 10)$

- **Gráfica:**



31 **Estudia y representa $y = 1 - tg\, x$ indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y extremos, si los hubiere.**

$y = 1 - tg\, x$

- Como es una función periódica de periodo π, basta con estudiarla en el intervalo $[0, \pi]$.

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

- **Asíntotas:**

En el intervalo $[0, \pi]$ tiene una asíntota vertical en $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to (\pi/2)^+} f(x) = +\infty$$

(De la misma forma, hay asíntotas verticales en $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$).

- **Intervalos de crecimiento y extremos:**

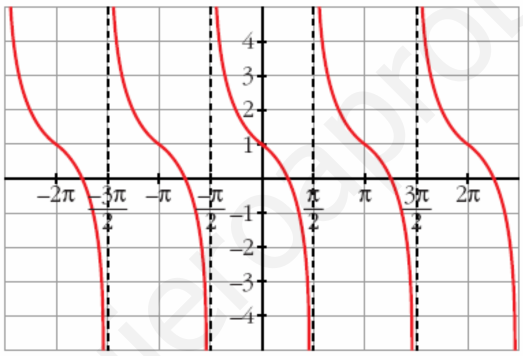
$f'(x) = -(1 + tg^2\, x) < 0 \quad \to \quad f(x)$ es decreciente.

No tiene máximos ni mínimos.

- Corta al eje X, en el intervalo $[0, \pi]$, en los puntos:

$1 - tg\, x = 0 \quad \to \quad tg\, x = 1 \quad \to \quad x = \dfrac{\pi}{4}$

- **Gráfica:**



UNIDAD DIDÁCTICA 10:
CÁLCULO DE PROBABILIDADES

* Las numeraciones indicadas entre páginas se refieren a las páginas del libro de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II, de segundo de bachillerato de la editorial Anaya, Andalucía, cuyos autores son J. Colera, R. García y M.J.Oliveira

Página 257

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **Lanzamos un dado y una moneda. Los posibles resultados son (1, C), (1, +), (2, C)…**

a) Describe el espacio muestral con los doce elementos de los que consta.

Sean los sucesos:

A = "sacar uno o dos en el dado"

B = "sacar + en la moneda"

D = {(1, C), (2, +), (3, C), (3, +), (6, +)}

b) Describe los sucesos A y B mediante todos los elementos.

c) Halla $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup D'$

a) E = {(1, C), (1, +), (2, C), (2, +), (3, C), (3, +), (4, C), (4, +), (5, C), (5, +), (6, C), (6, +)}

b) $A = \{(1, C), (1, +), (2, C), (2, +)\}$

$B = \{(1, +), (2, +), (3, +), (4, +), (5, +), (6, +)\}$

c) $A \cup B = \{(1, C), (1, +), (2, C), (2, +), (3, +), (4, +), (5, +), (6, +)\}$

$A \cap B = \{(1, +), (2, +)\}$

$D' = \{(1, +), (2, C), (4, C), (4, +), (5, C), (5, +), (6, C)\}$

$A \cup D' = \{(1, C), (1, +), (2, C), (2, +), (4, C), (4, +), (5, C), (5, +), (6, C)\}$

2 **Sea $U = \{a_1, a_2, a_3\}$ el espacio de sucesos elementales de un experimento aleatorio. ¿Cuáles de estas funciones definen una función de probabilidad? Justifica la respuesta.**

a) $P[a_1] = 1/2$, $P[a_2] = 1/3$, $P[a_3] = 1/6$

b) $P[a_1] = 3/4$, $P[a_2] = 1/4$, $P[a_3] = 1/4$

c) $P[a_1] = 1/2$, $P[a_2] = 0$, $P[a_3] = 1/2$

d) $P[a_1] = 2/3$, $P[a_2] = 1/3$, $P[a_3] = 1/3$

a) $P[a_1] + P[a_2] + P[a_3] = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$

Sí define una probabilidad, pues $P[a_1]$, $P[a_2]$ y $P[a_3]$ son números mayores o iguales que cero, y su suma es 1.

b) $P[a_1] + P[a_2] + P[a_3] = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} > 1$

No define una probabilidad, pues la suma de los sucesos elementales no puede ser mayor que 1.

c) $P[a_1] + P[a_2] + P[a_3] = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1$

Sí define una probabilidad, pues $P[a_1]$, $P[a_2]$ y $P[a_3]$ son números mayores o iguales que cero, y su suma es 1.

d) $P[a_1] + P[a_2] + P[a_3] = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} > 1$

No define una probabilidad, pues la suma de los sucesos elementales no puede ser mayor que 1.

3 **Determina si son compatibles o incompatibles los sucesos A y B:**

$$P[A] = 1/4,\quad P[B] = 1/2,\quad P[A \cup B] = 2/3$$

Dos sucesos A y B son incompatibles cuando $P[A \cap B] = 0$.

Como:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - P[A \cap B] \Rightarrow P[A \cap B] = \frac{1}{12} \neq 0$$

los sucesos A y B son incompatibles.

4 **S** **Una experiencia aleatoria consiste en preguntar a tres personas distintas, elegidas al azar, si son partidarias o no de consumir un determinado producto.**

a) Escribe el espacio muestral asociado a dicho experimento utilizando la letra "s" para las respuestas afirmativas y la "n" para las negativas.

b) ¿Qué elementos del espacio muestral anterior constituyen el suceso "al menos dos de las personas son partidarias de consumir el producto"?

c) Describe el suceso contrario de "más de una persona es partidaria de consumir el producto".

a) E = {(s, s, s), (s, s, n), (s, n, s), (n, s, s), (s, n, n), (n, s, n), (n, n, s), (n, n, n)}

b) {(s, s, s), (s, s, n), (s, n, s), (n, s, s)}

c) El suceso contrario es "una persona, o ninguna, son partidarias de consumir el producto". Por tanto, estaría formado por:

{(s, n, n), (n, s, n), (n, n, s), (n, n, n)}.

Es el suceso contrario al del apartado b).

5 **En familias de tres hijos, se estudia la distribución de sus sexos. Por ejemplo, (V, M, M) significa que el mayor es varón y los otros dos mujeres. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral E?**

Describe los siguientes sucesos: A = "La menor es mujer", B = "El mayor es varón". ¿En qué consiste $A \cup B$?

E tiene $2^3 = 8$ elementos.

A = {(V, V, M), (V, M, M,), (M, V, M), (M, M, M)}

B = {(V, V, V), (V, V, M), (V, M, V), (V, M, M)}

$A \cup B$ = "O bien la menor es mujer, o bien el mayor es varón" =

= {(V, V, M), (V, M, M,), (M, V, M), (M, M, M), (V, V, V), (V, M, V)}

6 **Se lanzan dos dados. Calcula la probabilidad de que la mayor de las puntuaciones sea un 1, un 2, un 3, un 4, un 5, un 6.**

☛ ***Completa esta tabla y razona sobre ella.***

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

En la tabla vamos anotando la mayor puntuación obtenida. Así:

P[La mayor de las puntuaciones sea un 1] $= \frac{1}{36}$

P[La mayor de las puntuaciones sea un 2] $= \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

P[La mayor de las puntuaciones sea un 3] $= \frac{5}{36}$

P[La mayor de las puntuaciones sea un 4] $= \frac{7}{36}$

P[La mayor de las puntuaciones sea un 5] $= \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

P[La mayor de las puntuaciones sea un 6] $= \frac{11}{36}$

7 **Una clase se compone de veinte alumnos y diez alumnas. La mitad de las alumnas y la mitad de los alumnos aprueban las matemáticas. Calcula la probabilidad de que, al elegir una persona al azar, resulte ser:**

a) Alumna o que aprueba las matemáticas.

b) Alumno que suspenda las matemáticas.

c) Sabiendo que es alumno, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe las matemáticas?

d) ¿Son independientes los sucesos ALUMNO y APRUEBA MATEMÁTICAS?

☛ ***Haz una tabla de contingencia.***

Hacemos la tabla de contingencia:

	ALUMNOS	ALUMNAS	
APRUEBAN MAT.	10	5	15
SUSPENDEN MAT.	10	5	15
	20	10	30

a) P[alumna $\cup$ aprueba mat.] $=$ P[alumna] $+$ P[aprueba mat.] $-$

$- P$[alumna $\cap$ aprueba mat.] $= \frac{10}{30} + \frac{15}{30} - \frac{5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

b) $P[\text{alumno} \cap \text{suspende mat.}] = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$

c) $P[\text{aprueba mat./alumno}] = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2}$

d) Hay que ver si:

$$P[\text{alumno} \cap \text{aprueba mat.}] = P[\text{alumno}] \cdot P[\text{aprueba mat.}]$$

Calculamos cada una:

$P[\text{alumno} \cap \text{aprueba mat.}] = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$

$P[\text{alumno}] = \dfrac{20}{30} = \dfrac{2}{3}$

$P[\text{aprueba mat.}] = \dfrac{15}{30} = \dfrac{1}{2}$

Por tanto, sí son independientes.

8 **Di cuál es el espacio muestral correspondiente a las siguientes experiencias aleatorias. Si es finito y tiene pocos elementos, dilos todos, y si tiene muchos, descríbelo y di el número total.**

a) Extraemos una carta de una baraja española y anotamos el número.

b) Extraemos una carta de una baraja española y anotamos el palo.

c) Extraemos dos cartas de una baraja española y anotamos el palo de cada una.

d) Lanzamos seis monedas distintas y anotamos el resultado.

e) Lanzamos seis monedas distintas y anotamos el número de caras.

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12\}$

b) $E = \{$OROS, COPAS, ESPADAS, BASTOS$\}$

c) Llamamos: O = OROS; C = COPAS; E = ESPADAS; B = BASTOS.

Entonces:

$E = \{(O, O), (O, C), (O, E), (O, B), (C, O), (C, C), (C, E), (C, B), (E, O), (E, C), (E, E), (E, B), (B, O), (B, C), (B, E), (B, B)\}$

d) E tiene $2^6 = 64$ sucesos elementales. Cada suceso elemental está compuesto por seis resultados que pueden ser cara o cruz:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

x_i puede ser cara o cruz. Por ejemplo:

(C, +, C, C, +, C) es uno de los 64 elementos de E.

e) $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Página 258

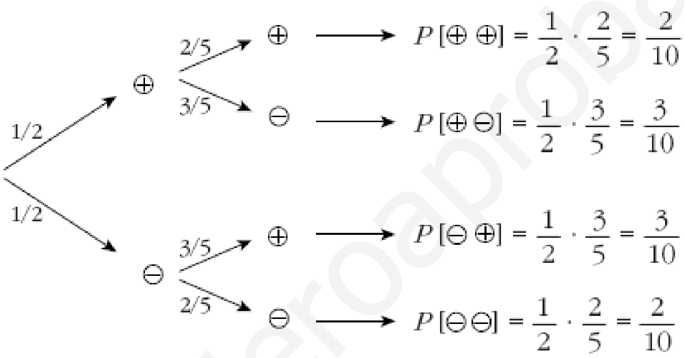
PARA RESOLVER

9 **En una caja hay seis bolas numeradas, tres de ellas con números positivos y las otras tres con números negativos. Se extrae una bola y después otra, sin reemplazamiento.**

a) Calcula la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea positivo.

b) Calcula la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea negativo.

Hacemos un diagrama en árbol:



a) $P[\oplus\, \oplus] + P[-\, -] = \frac{2}{10} + \frac{2}{10} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

b) $P[\oplus\, -] + P[-\, \oplus] = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = 0{,}6$

10 **S** **En una cierta ciudad, el 40% de la población tiene cabellos castaños, el 25% tiene los ojos castaños y el 15% tiene cabellos y ojos castaños.**

Se escoge una persona al azar:

a) Si tiene cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ojos castaños?

b) Si tiene ojos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga cabellos castaños?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos ni ojos castaños?

☛ *Usa una tabla como la siguiente:*

	OJOS CAST.	OJOS NO CAST.	
CAB. CAST.	15		40
CAB. NO CAST.			
	25		100

Hacemos la tabla:

	OJOS CAST.	OJOS NO CAST.	
CAB. CAST.	15	25	40
CAB. NO CAST.	10	50	60
	25	75	100

a) $\frac{15}{40} = \frac{3}{8} = 0,375$

b) $\frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0,6$

c) $\frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0,5$

11 **Dos personas juegan a obtener la puntuación más alta lanzando sus dados A y B. El dado A tiene cuatro caras con la puntuación 6 y las otras dos caras con la punatuación 10. El dado B tiene una cara con la puntuación 3, cuatro caras con puntuación 6 y la otra con puntuación 12. ¿Qué jugador tiene más probabilidad de ganar?**

Haz una tabla en la que aparezcan las 6 posibilidades del dado A y las del dado B. En cada una de las 36 casillas anota quién gana en cada caso.

Formamos una tabla en la que aparezcan todas las posibilidades (las 6 del dado A y las 6 del B). En cada casilla ponemos quién gana en cada caso:

B \ A	6	6	6	6	10	10
3	A	A	A	A	A	A
6	—	—	—	—	A	A
6	—	—	—	—	A	A
6	—	—	—	—	A	A
6	—	—	—	—	A	A
12	B	B	B	B	B	B

A gana en 14 casos.

B gana en 6 casos.

En 16 casos hay empate.

En una tirada, la probabilidad de que gane A es:

$$P[\text{A}] = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

La probabilidad de que gane B es:

$$P[\text{B}] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Por tanto, A tiene mayor probabilidad de ganar.

12 S **De los sucesos A y B se sabe que:**

$$P[A] = \frac{2}{5},\quad P[B] = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad P[A' \cap B'] = \frac{1}{3}.$$

Halla $P[A \cup B]$ y $P[A \cap B]$.

- $P[A' \cap B'] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B]$

$$\frac{1}{3} = 1 - P[A \cup B] \Rightarrow P[A \cup B] = \frac{2}{3}$$

- $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - P[A \cap B]$$

$$P[A \cap B] = \frac{1}{15}$$

13 S **Sean A y B dos sucesos de un espacio de probabilidad, de manera que:**

$$P[A] = 0{,}4, \quad P[B] = 0{,}3 \quad \text{y} \quad P[A \cap B] = 0{,}1$$

Calcula razonadamente:

a) $P[A \cup B]$ **b) $P[A' \cup B']$**

c) $P[A/B]$ **d) $P[A' \cap B']$**

a) $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}6$

b) $P[A' \cup B'] = P[(A \cap B)'] = 1 - P[A \cap B] = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

c) $P[A/B] = \dfrac{P[A \cap B]}{P[B]} = \dfrac{0{,}1}{0{,}3} = \dfrac{1}{3}$

d) $P[A' \cap B'] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B] = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

14 **A, B y C son tres sucesos de un mismo espacio muestral. Expresa en función de ellos los sucesos:**

a) Se realiza alguno de los tres.

b) No se realiza ninguno de los tres.

c) Se realizan los tres.

d) Se realizan dos de los tres.

e) Se realizan, al menos, dos de los tres.

a) $A \cup B \cup C$

b) $A' \cap B' \cap C'$

c) $A \cap B \cap C$

d) $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C)$

e) $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$

15 S **Un examen consiste en elegir al azar dos temas de entre los diez del programa y desarrollar uno de ellos.**

a) Un alumno sabe 6 temas. ¿Qué probabilidad tiene de aprobar el examen?

b) ¿Qué probabilidad tiene el mismo alumno de saberse uno de los temas elegidos y el otro no?

a) P[APROBAR] = P[SABE 1º Y 2º] + P[SABE 1º Y NO 2º] + P[NO SABE 1º Y SÍ 2º] =

$$= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{30}{90} + \frac{24}{90} + \frac{24}{90} = \frac{78}{90} = \frac{13}{15} \approx 0{,}87$$

b) P[SABE 1º Y NO 2º] + P[NO SABE 1º Y SÍ 2º] =

$$= \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{24}{90} + \frac{24}{90} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15} \approx 0{,}53$$

16 **Se lanza un dado dos veces. Calcula la probabilidad de que en la segunda tirada se obtenga un valor mayor que en la primera.**

En total hay 36 posibles resultados. De estos, en 6 casos los dos números son iguales; y, en los otros 30, bien el primero es mayor que el segundo, o bien el segundo es mayor que el primero (con la misma probabilidad).

Luego, hay 15 casos en los que el resultado de la segunda tirada es mayor que el de la primera.

Por tanto, la probabilidad pedida es:

$$P = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

(NOTA: también se puede resolver el problema haciendo una tabla como la del ejercicio número 6 y contar los casos).

17 S **Un estudiante hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pase la primera prueba es 0,6. La probabilidad de que pase la segunda es 0,8 y la de que pase ambas es 0,5. Se pide:**

a) Probabilidad de que pase al menos una prueba.

b) Probabilidad de que no pase ninguna prueba.

c) ¿Son las pruebas sucesos independientes?

d) Probabilidad de que pase la segunda prueba en caso de no haber superado la primera.

Tenemos que:

$$P[\text{pase } 1^{\underline{a}}] = 0{,}6; \quad P[\text{pase } 2^{\underline{a}}] = 0{,}8; \quad P[\text{pase } 1^{\underline{a}} \cap \text{pase } 2^{\underline{a}}] = 0{,}5$$

a) $P[\text{pase } 1^{\underline{a}} \cup \text{pase } 2^{\underline{a}}] = P[\text{pase } 1^{\underline{a}}] + P[\text{pase } 2^{\underline{a}}] - P[\text{pase } 1^{\underline{a}} \cap \text{pase } 2^{\underline{a}}] =$

$$= 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}5 = 0{,}9$$

b) $1 - P[\text{pase al menos una}] = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

c) $P[\text{pase } 1^{\underline{a}}] \cdot P[\text{pase } 2^{\underline{a}}] = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$

$P[\text{pase } 1^{\underline{a}} \cap \text{pase } 2^{\underline{a}}] = 0{,}5 \neq 0{,}48$

No son independientes.

d) $P[\text{pase } 2^{a}/\text{no pase } 1^{a}] = \dfrac{P[\text{pase } 2^{a} \cap \text{no pase } 1^{a}]}{P[\text{no pase } 1^{a}]} =$

$$= \frac{P[\text{pase } 2^{a}] - P[\text{pase } 1^{a} \cap \text{pase } 2^{a}]}{P[\text{no pase } 1^{a}]} =$$

$$= \frac{0{,}8 - 0{,}5}{1 - 0{,}6} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

18 **En una comarca hay dos periódicos: *El Progresista* y *El Liberal*. Se sabe que el 55% de las personas de esa comarca lee *El Progresista* (*P*), el 40% lee *El Liberal* (*L*) y el 25% no lee ninguno de ellos.**

Expresa en función de P y L estos sucesos:

a) Leer los dos periódicos.

b) Leer solo *El Liberal*.

c) Leer solo *El Progresista*.

d) Leer alguno de los dos periódicos.

e) No leer ninguno de los dos.

f) Leer solo uno de los dos.

g) Calcula las probabilidades de: P, L, $P \cap L$, $P \cup L$, $P - L$, $L - P$, $(L \cup P)'$, $(L \cap P)'$.

h) Sabemos que una persona lee *El Progresista*. ¿Qué probabilidad hay de que, además, lea *El Liberal*? ¿Y de que no lo lea?

Tenemos que:

$$P[P] = 0{,}55; \quad P[L] = 0{,}4; \quad P[P' \cap L'] = 0{,}25$$

a) $P[P' \cap L'] = P[(P \cup L)'] = 1 - P[P \cup L]$

$0{,}25 = 1 - P[P \cup L] \Rightarrow P[P \cup L] = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

$P[P \cup L] = P[P] + P[L] - P[P \cap L]$

$0{,}75 = 0{,}55 + 0{,}4 - P[P \cap L] \Rightarrow P[P \cap L] = 0{,}2$

$P[\text{leer los dos}] = P[P \cap L] = 0{,}2$

b) $P[L] - P[P \cap L] = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2$

c) $P[P] - P[P \cap L] = 0{,}55 - 0{,}2 = 0{,}35$

d) $P[P \cup L] = 0{,}75$

e) $P[P' \cap L'] = 0{,}25$

f) $P[P \cap L'] + P[P' \cap L] = 0{,}35 + 0{,}2 = 0{,}55$

g) $P[P] = 0{,}55$; $P[L] = 0{,}4$; $P[P \cap L] = 0{,}2$; $P[P \cup L] = 0{,}75$

$P[P - L] = P[P] - P[P \cap L] = 0{,}35$

$P[L - P] = P[L] - P[P \cap L] = 0{,}2$

$P[(L \cup P)'] = P[L' \cap P'] = 0{,}25$

$P[(L \cap P)'] = 1 - P[L \cap P] = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

h) $P[L/P] = \dfrac{P[L \cap P]}{P[P]} = \dfrac{0{,}2}{0{,}55} = \dfrac{20}{55} = \dfrac{4}{11} \approx 0{,}36$

$P[L'/P] = \dfrac{P[L' \cap P]}{P[P]} = \dfrac{0{,}35}{0{,}55} = \dfrac{35}{55} = \dfrac{7}{11} \approx 0{,}64$

$\left(\text{o bien: } P[L'/P] = 1 - P[L/P] = 1 - \dfrac{4}{11} = \dfrac{7}{11}\right)$

Página 259

19 **Una urna A tiene 3 bolas blancas y 7 negras. Otra urna B tiene 9 bolas blancas y 1 negra. Escogemos una de las urnas al azar y de ella extraemos una bola.**

Calcula:

a) $P[\text{BLANCA}/A]$

b) $P[\text{BLANCA}/B]$

c) $P[A \text{ y BLANCA}]$

d) $P[B \text{ y BLANCA}]$

e) $P[\text{BLANCA}]$

f) Sabiendo que la bola obtenida ha sido blanca, ¿cuál es la probabilidad de haber escogido la urna B?

a) $P[\text{BLANCA}/A] = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$

b) $P[\text{BLANCA}/B] = \dfrac{9}{10} = 0{,}9$

c) $P[A \text{ y BLANCA}] = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{10} = \dfrac{3}{20} = 0{,}15$

d) $P[B \text{ y BLANCA}] = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9}{10} = \dfrac{9}{20} = 0{,}45$

e) $P[\text{BLANCA}] = P[A \text{ y BLANCA}] + P[B \text{ y BLANCA}] = \dfrac{3}{20} + \dfrac{9}{20} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

f) $P[B/\text{BLANCA}] = \dfrac{P[B \text{ y BLANCA}]}{P[\text{BLANCA}]} = \dfrac{9/20}{12/20} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

20 **Tenemos las mismas urnas del ejercicio anterior. Sacamos una bola de A y la echamos en B y, a continuación, sacamos una bola de B.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea negra?

b) Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, ¿cuál es la probabilidad de que también la primera fuese negra?

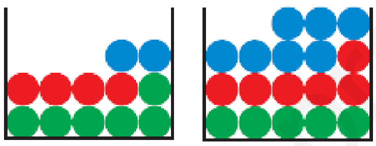
a) $P[2^{\underline{a}}\ \text{NEGRA}] = P[1^{\underline{a}}\ \text{BLANCA y } 2^{\underline{a}}\ \text{NEGRA}] + P[1^{\underline{a}}\ \text{NEGRA y } 2^{\underline{a}}\ \text{NEGRA}] =$

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{11} + \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{11} = \frac{3}{110} + \frac{14}{110} = \frac{17}{110}$$

b) $P[1^{\underline{a}}\ \text{NEGRA}/2^{\underline{a}}\ \text{NEGRA}] = \dfrac{P[1^{\underline{a}}\ \text{NEGRA y } 2^{\underline{a}}\ \text{NEGRA}]}{P[2^{\underline{a}}\ \text{NEGRA}]} = \dfrac{7/10 \cdot 2/11}{17/110} =$

$$= \frac{14/110}{17/110} = \frac{14}{17}$$

21 **Tenemos dos urnas con estas composiciones:**



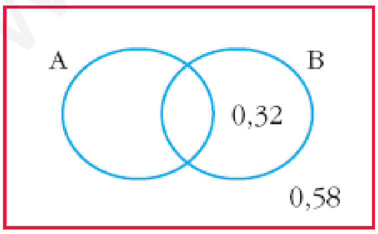
Extraemos una bola de cada urna. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color? ¿Y la probabilidad de que sean de distinto color?

$$P[\text{mismo color}] = \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{18} + \frac{4}{12} \cdot \frac{6}{18} + \frac{2}{12} \cdot \frac{7}{18} = \frac{30}{216} + \frac{24}{216} + \frac{14}{216} = \frac{68}{216} = \frac{17}{54}$$

$$P[\text{distinto color}] = 1 - P[\text{mismo color}] = 1 - \frac{17}{54} = \frac{37}{54}$$

22 S **Un aparato eléctrico está constituido por dos componentes A y B. Sabiendo que hay una probabilidad de 0,58 de que no falle ninguno de los componentes y que en el 32% de los casos falla B no habiendo fallado A, determina, justificando la respuesta, la probabilidad de que en uno de tales aparatos no falle la componente A.**

Llamamos A = "falla A"; B = "falla B".



Tenemos que:

$$P[A' \cap B'] = 0{,}58; \quad P[B \cap A'] = 0{,}32$$

Así:

$$P[A'] = P[A' \cap B'] + P[B \cap A'] = 0{,}58 + 0{,}32 = 0{,}90$$

$$(A' \cap B') \cup (B \cap A') = A'$$

La probabilidad de que no falle A es de 0,90.

23 **Dos jugadores arrojan a la vez dos monedas cada uno. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos obtengan el mismo número de caras (cero, una o dos)? Razónalo.**

Para cada jugador tenemos que:

$$P[0] = P[0 \text{ CARAS}] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$P[1] = P[1 \text{ CARA}] = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P[2] = P[2 \text{ CARAS}] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Los resultados de los dos jugadores son sucesos independientes. La probabilidad de que ambos obtengan el mismo número de caras es:

$$(P[0])^2 + (P[1])^2 + (P[2])^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

24 **Se lanza un dado repetidas veces y estamos interesados en el número de tiradas precisas para obtener un 6 por primera vez.**

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer 6 se obtenga en la séptima tirada?

a) $E = \{1, 2, 3, \ldots\}$

b) $P[7^{\underline{a}} \text{ TIRADA}] = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{15\,625}{279\,936} \approx 0{,}558$

25 **Un producto está formado de dos partes: A y B. El proceso de fabricación es tal, que la probabilidad de un defecto en A es 0,06 y la probabilidad de un defecto en B es 0,07. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto no sea defectuoso?**

$$P[\text{ningún defecto}] = P[\text{no defecto en } A] \cdot P[\text{no defecto en } B] =$$

$$= (1 - 0{,}06) \cdot (1 - 0{,}07) = 0{,}94 \cdot 0{,}93 = 0{,}8742$$

26 S **Una urna contiene 10 bolas blancas, 6 negras y 4 rojas. Si se extraen tres bolas con reemplazamiento, ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 blancas y una roja?**

$$P[BBR] + P[BRB] + P[RBB] = 3 \cdot P[BBR] = 3 \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{4}{20} = \frac{3}{20} = 0{,}15$$

27 **S** **Una urna *A* contiene 6 bolas blancas y 4 negras. Otra urna *B* tiene 5 blancas y 9 negras. Elegimos una urna al azar y extraemos dos bolas, que resultan ser blancas.**

Halla la probabilidad de que la urna elegida haya sido la *A*.

Hacemos un diagrama en árbol:

$$\xrightarrow{1/2} A \;\boxed{6b\ 4n}\; \xrightarrow{\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}} 2b \longrightarrow P[A \text{ y } 2b] = \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9} = \frac{1}{6}$$

$$\xrightarrow{1/2} B \;\boxed{5b\ 9n}\; \xrightarrow{\frac{5}{14}\cdot\frac{4}{13}} 2b \longrightarrow P[B \text{ y } 2b] = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{14}\cdot\frac{4}{13} = \frac{5}{91}$$

$$P[2b] = \frac{1}{6} + \frac{5}{91} = \frac{121}{546}$$

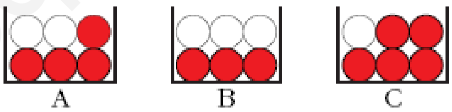
La probabilidad pedida será:

$$P[A/2b] = \frac{P[A \text{ y } 2b]}{P[2b]} = \frac{1/6}{121/546} = \frac{91}{121} = 0{,}752$$

28 **S** **Se dispone de tres urnas: la A que contiene dos bolas blancas y cuatro rojas la B con tres blancas y tres rojas; y la C con una blanca y cinco rojas.**

a) Se elige una urna al azar y se extrae una bola de ella. ¿Cuál es la probabilidad de que esta bola sea blanca?

b) Si la bola extraída resulta ser blanca, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?



a) Hacemos un diagrama en árbol:

$$\xrightarrow{1/3} A \begin{cases} \xrightarrow{2/6} b \longrightarrow P[A \text{ y } b] = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6} = \frac{2}{18} \\ \xrightarrow{4/6} r \end{cases}$$

$$\xrightarrow{1/3} B \begin{cases} \xrightarrow{3/6} b \longrightarrow P[B \text{ y } b] = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6} = \frac{3}{18} \\ \xrightarrow{3/6} r \end{cases}$$

$$\xrightarrow{1/3} C \begin{cases} \xrightarrow{1/6} b \longrightarrow P[C \text{ y } b] = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{18} \\ \xrightarrow{5/6} r \end{cases}$$

$$P[b] = \frac{2}{18} + \frac{3}{18} + \frac{1}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$$

b) $P[B/b] = \dfrac{P[B \text{ y } b]}{P[b]} = \dfrac{3/18}{6/18} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

Página 260

29 S **Sean A y B dos sucesos tales que: $P[A \cup B] = \frac{3}{4}$; $P[B'] = \frac{2}{3}$; $P[A \cap B] = \frac{1}{4}$. Halla $P[B]$, $P[A]$, $P[A' \cap B]$.**

$P[B] = 1 - P[B'] = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

$\frac{3}{4} = P[A] + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \Rightarrow P[A] = \frac{2}{3}$

$P[A' \cap B] = P[B] - P[A \cap B] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

30 S **En cierto país donde la enfermedad X es endémica, se sabe que un 12% de la población padece dicha enfermedad. Se dispone de una prueba para detectar la enfermedad, pero no es totalmente fiable, ya que da positiva en el 90% de los casos de personas realmente enfermas y también da positiva en el 5% de personas sanas.**

¿Cuál es la probabilidad de que esté sana una persona a la que la prueba le ha dado positiva?

$\xrightarrow{0,12}$ ENFERMO $\xrightarrow{0,9}$ POSITIVO $\longrightarrow P[\text{ENF. y POSITIVO}] = 0,12 \cdot 0,9 = 0,108$

$\xrightarrow{0,88}$ NO ENFERMO $\xrightarrow{0,05}$ POSITIVO $\longrightarrow P[\text{NO ENF. y POSITIVO}] = 0,88 \cdot 0,05 = 0,044$

$$P[\text{POSITIVO}] = 0,108 + 0,044 = 0,152$$

La probabilidad pedida será:

$$P[\text{NO ENF./POSITIVO}] = \frac{P[\text{NO ENF. Y POSITIVO}]}{P[\text{POSITIVO}]} = \frac{0,044}{0,152} = 0,289$$

31 S **En tres máquinas, A, B y C, se fabrican piezas de la misma naturaleza. El porcentaje de piezas que resultan defectuosas en cada máquina es, respectivamente, 1%, 2% y 3%.**

Se mezclan 300 piezas, 100 de cada máquina, y se elige una pieza al azar, que resulta ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en la máquina A?

$\xrightarrow{1/3}$ A $\xrightarrow{1/100}$ DEFECTUOSA $\longrightarrow P[A \text{ y DEF.}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{300}$

$\xrightarrow{1/3}$ B $\xrightarrow{2/100}$ DEFECTUOSA $\longrightarrow P[B \text{ y DEF.}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{100} = \frac{2}{300}$

$\xrightarrow{1/3}$ C $\xrightarrow{3/100}$ DEFECTUOSA $\longrightarrow P[C \text{ y DEF.}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{100} = \frac{3}{300}$

$$P[\text{DEF.}] = \frac{1}{300} + \frac{2}{300} + \frac{3}{300} = \frac{6}{300}$$

La probabilidad pedida será:

$$P[A/\text{DEF.}] = \frac{P[A \text{ y DEF.}]}{P[\text{DEF.}]} = \frac{1/300}{6/300} = \frac{1}{6}$$

32 S **Una caja *A* contiene dos bolas blancas y dos rojas, y otra caja *B* contiene tres blancas y dos rojas. Se pasa una bola de *A* a *B* y después se extrae una bola de *B*, que resulta blanca. Determina la probabilidad de que la bola trasladada haya sido blanca.**

$$A \ \boxed{2b\ 2r} \xrightarrow{2/4} b \longrightarrow B\ \boxed{4b\ 2r} \xrightarrow{4/6} b; \quad P[1^{\underline{a}} \text{ b y } 2^{\underline{a}} \text{ b}] = \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$$

$$A \ \boxed{2b\ 2r} \xrightarrow{2/4} r \longrightarrow B\ \boxed{3b\ 3r} \xrightarrow{3/6} b; \quad P[1^{\underline{a}} \text{ r y } 2^{\underline{a}} \text{ b}] = \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

$$P[2^{\underline{a}} \text{ b}] = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

Por tanto, la probabilidad pedida será:

$$P[1^{\underline{a}} \text{ b}/2^{\underline{a}} \text{ b}] = \frac{P[1^{\underline{a}} \text{ b y } 2^{\underline{a}} \text{ b}]}{P[2^{\underline{a}} \text{ b}]} = \frac{1/3}{7/12} = \frac{4}{7}$$

33 S **Una urna *A* contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Otra urna *B*, 6 blancas y 4 negras. Elegimos una urna al azar y extraemos dos bolas, que resultan ser negras. Halla la probabilidad de que la urna elegida haya sido la *B*.**

$$\xrightarrow{1/2} A\ \boxed{5b\ 3n} \xrightarrow{\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}} 2n \longrightarrow P[A \text{ y } 2n] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{56}$$

$$\xrightarrow{1/2} B\ \boxed{6b\ 4n} \xrightarrow{\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}} 2n \longrightarrow P[B \text{ y } 2n] = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{1}{15}$$

$$P[2n] = \frac{3}{56} + \frac{1}{15} = \frac{101}{840}$$

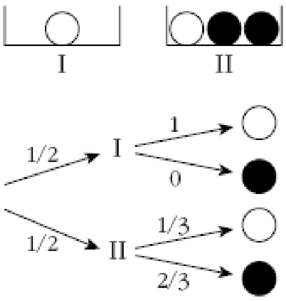
Por tanto, la probabilidad pedida será:

$$P[B/2n] = \frac{P[B \text{ y } 2n]}{P[2n]} = \frac{1/15}{101/840} = \frac{56}{101}$$

34 S **Tengo dos urnas, dos bolas blancas y dos bolas negras. Se desea saber cómo debo distribuir las bolas en las urnas para que, al elegir una urna al azar y extraer de ella una bola al azar, sea máxima la probabilidad de obtener bola blanca. La única condición exigida es que cada urna tenga al menos una bola.**

Hay cuatro posibles distribuciones. Veamos cuál es la probabilidad de obtener blanca en cada caso:

a)

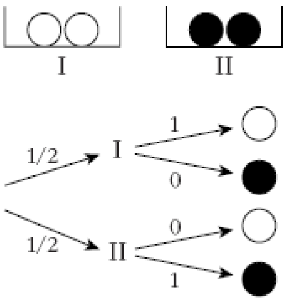


$$P[\text{I y } \bigcirc] = \frac{1}{2}$$

$$P[\text{II y } \bigcirc] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$P[\bigcirc] = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

b)

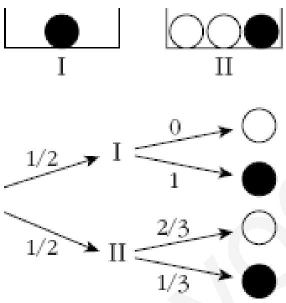


$$P[\text{I y } \bigcirc] = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$P[\text{II y } \bigcirc] = 0$$

$$P[\bigcirc] = \frac{1}{2}$$

c)

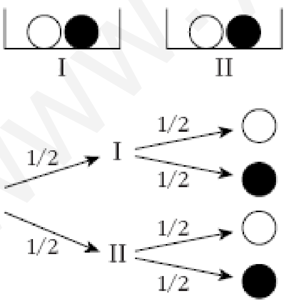


$$P[\text{I y } \bigcirc] = 0$$

$$P[\text{II y } \bigcirc] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P[\bigcirc] = \frac{1}{3}$$

d)



$$P[\text{I y } \bigcirc] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P[\text{II y } \bigcirc] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P[\bigcirc] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Para obtener la máxima probabilidad de obtener una bola blanca, deberemos colocar una bola blanca en una de las urnas y las otras tres bolas en la otra urna.

35
S **Sean A y B dos montones de cartas. En A hay 8 oros y 5 espadas y, en B, 4 oros y 7 espadas. Sacamos dos cartas del mismo montón y resulta que ambas son espadas. Halla la probabilidad de que las hayamos sacado del montón B.**

$$\xrightarrow{1/2} A(8o,\ 5e) \xrightarrow{\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12}} 2e$$

$$\xrightarrow{1/2} B(4o,\ 7e) \xrightarrow{\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10}} 2e$$

$$P[A \text{ y } 2e] = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12} = \frac{5}{78}$$

$$P[B \text{ y } 2e] = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{6}{10} = \frac{21}{110}$$

$$P[2e] = \frac{5}{78} + \frac{21}{110} = \frac{547}{2\,145}$$

Así, tenemos que:

$$P[B/2e] = \frac{P[B \text{ y } 2e]}{P[2e]} = \frac{21/110}{547/2\,145} = \frac{819}{1\,094} \approx 0{,}749$$

36 **Una urna contiene 25 bolas blancas sin marcar, 75 bolas blancas marcadas, 125 bolas negras sin marcar y 175 bolas negras marcadas.**

a) Se extrae una bola. Calcula la probabilidad de que sea blanca.

b) Se extrae una bola y está marcada. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?

c) Se extrae una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra y esté marcada?

d) ¿Son independientes los sucesos “sacar bola marcada” y “sacar bola blanca”?

Resumimos la información en una tabla:

	MARCADAS	SIN MARCAR	
BLANCAS	75	25	100
NEGRAS	175	125	300
	250	150	400

a) $P[\text{BLANCA}] = \frac{100}{400} = \frac{1}{4}$

b) $P[\text{BLANCA/MARCADA}] = \frac{75}{250} = \frac{3}{10}$

c) $P[\text{NEGRA y MARCADA}] = \frac{175}{400} = \frac{7}{16}$

d) $P[\text{BLANCA}] \cdot P[\text{MARCADA}] = \frac{1}{4}\cdot\frac{250}{400} = \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{8} = \frac{5}{32}$

$P[\text{BLANCA y MARCADA}] = \frac{75}{400} = \frac{3}{16} \neq \frac{5}{32}$

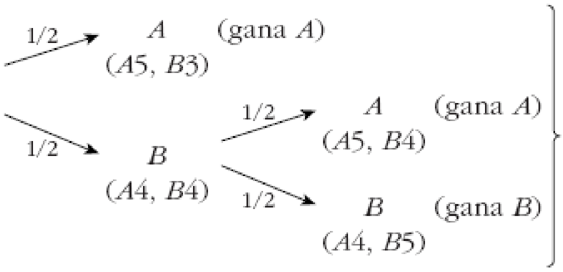
No son independientes.

37 **Dos personas se enfrentan en un juego en el que será vencedor el primero que gane 5 partidas. Pero antes de finalizar el juego, este se interrumpe en el momento en que uno ha ganado 4 partidas y otro 3.**

¿Cómo deben repartirse los 4 200 euros que apostaron?

☛ ***Describe en un diagrama en árbol las posibles continuaciones de la partida.***

Llamamos A al jugador que lleva 4 partidas ganadas y B al de 3. Las posibles continuaciones del juego son:



$$P[\text{gana } A] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P[\text{gana } B] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Por tanto, A debe llevarse $\frac{3}{4}$ del total y B, $\frac{1}{4}$; es decir:

$$A \rightarrow \frac{3}{4}\, 4\,200 = 3\,150 \text{ €}; \quad B \rightarrow \frac{1}{4}\, 4\,200 = 1\,050 \text{ €}$$

38 **En un centro escolar hay tres grupos de Bachillerato. El primero está compuesto por 10 alumnos de los que 7 prefieren la música moderna, 2 prefieren la clásica y 1 que no le gusta la música. En el segundo, compuesto por 12 alumnos, la distribución de preferencias es 5, 7, 0, respectivamente; y, en el tercero, formado por 14 alumnos, la distribución de preferencias es 6, 6, 2, respectivamente.**

Se elige un grupo al azar y se regalan 2 entradas para un concierto de música clásica a dos alumnos seleccionados al azar.

a) Halla la probabilidad de que los dos alumnos elegidos sean aficionados a la música clásica.

b) Si los dos alumnos agraciados son, efectivamente, aficionados a la música clásica, ¿cuál es la probabilidad de que sean del primer grupo?

☛ ***Organiza los datos en una tabla.***

Organizamos los datos en una tabla:

	MODERNA	CLÁSICA	NO	TOTAL
1º	7	2	1	10
2º	5	7	0	12
3º	6	6	2	14

La probabilidad de elegir un grupo cualquiera es $\frac{1}{3}$.

a) $P[2 \text{ ALUMNOS DE CLÁSICA}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{13} = 0{,}168$

b) $P[2 \text{ ALUMNOS DEL } 1^{\underline{o}}/\text{AMBOS DE CLÁSICA}] = \frac{P[\text{DOS DE } 1^{\underline{o}} \text{ DE CLÁSICA}]}{P[\text{DOS DE CLÁSICA}]} =$

$$= \frac{(1/3) \cdot (2/10) \cdot (1/9)}{0{,}168} \approx 0{,}044$$

UNIDAD DIDÁCTICA 11:
LAS MUESTRAS ESTADÍSTICAS

* Las numeraciones indicadas entre páginas se refieren a las páginas del libro de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II, de segundo de bachillerato de la editorial Anaya, Andalucía, cuyos autores son J. Colera, R. García y M.J.Oliveira

Página 272

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Muestras

1 **En cada uno de los casos que se mencionan a continuación, el colectivo ¿es población o es muestra?**

Explica por qué.

a) Un campesino tiene 87 gallinas. Para probar la eficacia de un nuevo tipo de alimentación, las pesa a todas antes y después de los 30 días que dura el tratamiento.

b) Un granjero prueba con 100 de sus gallinas la eficacia de un nuevo tipo de alimentación.

a) Es **población**, porque pesa a todas las gallinas.

b) Es **muestra**, porque no pesa a todas las gallinas, sino solo a una parte de ellas.

2 **Un fabricante de elásticos quiere estudiar su resistencia a la rotura. Para ello, los estira hasta que se rompen y anota el grado de estiramiento que alcanzan sin romperse.**

¿Puede realizar dicho estiramiento sobre la población o es imprescindible realizarlo sobre la muestra? ¿Por qué?

Es imprescindible hacerlo sobre una muestra, porque interesa romper la menor cantidad de elásticos posible.

3 **Solo uno de los siguientes procedimientos nos permite obtener una muestra representativa. Di cuál es y, en los otros, estudia el sentido del sesgo y su importancia:**

a) Para estudiar las frecuencias relativas de las letras, se toman al azar 20 libros de la biblioteca de un centro escolar y se cuenta las veces que aparece cada letra en la página 20 de los libros seleccionados.

b) Para conocer la opinión de sus clientes sobre el servicio ofrecido por unos grandes almacenes, se selecciona al azar, entre los que poseen tarjeta de compra, a 100 personas entre las que han gastado menos de 1 000 € el último año, otras 100 entre las que han gastado entre 1 000 € y 5 000 € y 100 más entre las que han gastado más de 5 000 €.

c) Para calcular el número medio de personas por cartilla en un Centro de Salud de la Seguridad Social, los médicos toman nota de las cartillas de las personas que acuden a las consultas durante un mes.

a) Es una muestra representativa.

b) No es representativa, porque hay mucha más gente en un intervalo (por ejemplo, entre 1 000 € y 5 000 €) que en otro (más de 5 000 €), y hemos tomado el mismo número de representantes. Además, hay otra mucha gente sin tarjeta que no se ha tomado en cuenta.

c) No es representativa, ya que lo que más se va a ver son las cartillas que corresponden a familias numerosas. Está claro que, cuanta más gente tenga esa cartilla, más fácil es que ese mes se tome nota de ella.

4 **De un colectivo de 500 personas elige una muestra de 20 mediante:**

a) Un muestreo aleatorio sistemático.

b) Un muestreo aleatorio simple.

Utiliza la tecla RAN# de la calculadora.

Para los dos casos, numeramos a las personas del 1 al 500.

a) $h = \frac{500}{20} = 25$

Origen: 25 ⊗ RAN# ⊕ 1 ⊜ 14.075 (por ejemplo)

Deberemos elegir las personas cuyos números sean:

14, 39, 64, 89, 114, 139, 164, 189, 214, 239, 264, 289, 314, 339, 364, 389, 414, 439, 464, 489.

b) Con la tecla RAN# de la calculadora, hacemos: 500 × × RAN# = hasta obtener 20 resultados distintos.

5 **En un conjunto de 1 000 conductores hay:**

— 50 taxistas.

— 75 camioneros.

— 25 conductores de autobús.

El resto son conductores de vehículos corrientes y se reparten así:

— 250 con más de 20 años de experiencia.

— 425 con una experiencia de entre 5 y 20 años.

— 175 con una experiencia de 0 a 5 años.

Para confeccionar una muestra de 40 individuos mediante muestreo aleatorio estratificado proporcional, ¿cuántos hay que seleccionar de cada uno de los seis estratos?

Llamamos n_1 al número de taxistas que tendríamos que seleccionar, n_2 al número de camioneros, n_3 al número de conductores de autobuses, n_4 al número de conductores con más de 20 años de experiencia, n_5 al de conductores con una experiencia entre 5 y 20 años y n_6 al de conductores con una experiencia de 0 a 5 años. Entonces:

$$\frac{n_1}{50} = \frac{n_2}{75} = \frac{n_3}{25} = \frac{n_4}{250} = \frac{n_5}{425} = \frac{n_6}{175} = \frac{40}{1\,000}$$

Así, deberemos elegir:

n_1 = 2 taxistas

n_2 = 3 camioneros

n_3 = 1 conductor de autobús

n_4 = 10 conductores con más de 20 años de experiencia

n_5 = 17 con experiencia entre 5 y 20 años

n_6 = 7 con experiencia entre 0 y 5 años

6 S **En determinada provincia hay cuatro comarcas, C1, C2, C3 y C4, con un total de 1 500 000 personas censadas. De ellas, 300 000 residen en C1, 450 000 en C2 y 550 000 en C3. Se quiere realizar un estudio sobre las costumbres alimenticias en esa provincia basado en una muestra de 3 000 personas.**

a) ¿Qué tipo de muestreo deberíamos realizar si queremos que en la muestra resultante haya representación de todas las comarcas?

b) ¿Qué número de personas habría que seleccionar en cada comarca, atendiendo a razones de proporcionalidad?

c) ¿Cómo seleccionarías las personas en cada comarca?

Justifica las respuestas.

a) Deberíamos realizar un muestreo aleatorio estratificado.

b) El número de personas que residen en C4 es:

$$1\,500\,000 - (300\,000 + 450\,000 + 550\,000) = 200\,000$$

Llamamos n_1, n_2, n_3 y n_4 al número de personas que tendríamos que seleccionar en cada comarca (C1, C2, C3 y C4, respectivamente). Entonces:

$$\frac{n_1}{300\,000} = \frac{n_2}{450\,000} = \frac{n_3}{550\,000} = \frac{n_4}{200\,000} = \frac{3\,000}{1\,500\,000}$$

Por tanto, debemos elegir:

$n_1 = 600$ personas de C1

$n_2 = 900$ personas de C2

$n_3 = 1\,100$ personas de C3

$n_4 = 400$ personas de C4

c) Dentro de cada comarca, podríamos seleccionarlos mediante un muestreo aleatorio simple, o mediante un muestreo sistemático.

7 **En un centro de enseñanza con 981 alumnos y alumnas, se va a hacer un sondeo sobre tendencias políticas. Se va a escoger una muestra de 84 estudiantes. En el centro hay 5 cursos (1º, 2º, 3º, 4º y 5º) con un número de alumnos y alumnas en cada uno de ellos de 345, 234, 190, 140 y 72. ¿Cuántos alumnos deberemos escoger de cada curso si deseamos que el muestreo sea estratificado con reparto proporcional?**

$$\frac{84}{981} = \frac{a}{345} = \frac{b}{234} = \frac{c}{190} = \frac{d}{140} = \frac{e}{72}$$

Así: $a = 30$ $\quad b = 20$ $\quad c = 16$ $\quad d = 12$ $\quad e = 6$

8 **Queremos seleccionar una muestra de 50 alumnos de 2º de Bachillerato. En cada uno de los siguientes casos debes decidir si el muestreo debe ser aleatorio simple o estratificado por sexos (chicos-chicas) para estudiar las variables indicadas:**

a) Estatura.

b) Tiempo que emplean los alumnos en ir de su casa al instituto.

c) Agudeza visual (porcentaje de alumnado con gafas).

d) Incidencia de caries dental.

e) Práctica de fútbol.

f) Lectura de algún periódico.

a) En la estatura de chicos y chicas de esa edad suele haber diferencias significativas. El muestreo debe ser estratificado en este caso.

b) No

c) No

d) No

e) Sí, hay una gran diferencia entre el porcentaje de chicos y chicas que juegan al fútbol.

f) No

UNIDAD DIDÁCTICA 12:
INFERENCIA ESTADÍSTICA. ESTIMACIÓN DE LA MEDIA

* Las numeraciones indicadas entre páginas se refieren a las páginas del libro de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II, de segundo de bachillerato de la editorial Anaya, Andalucía, cuyos autores son J. Colera, R. García y M.J.Oliveira

Páginas 294
Intervalos característicos
Distribución de medias y proporciones muestrales

1 **En las distribuciones normales cuyos parámetros se dan, halla el intervalo característico que en cada caso se indica:**

	a)	b)	c)	d)	e)
MEDIA, μ	0	0	0	0	112
DESV. TÍPICA, σ	1	1	1	1	15
PROBAB. $1-\alpha$	95	99	90	80	95

	f)	g)	h)	i)
MEDIA, μ	3 512	3 512	3 512	3 512
DESV. TÍPICA, σ	550	550	550	550
PROBAB. $1-\alpha$	99	95	90	80

El intervalo característico es de la forma:

$$(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma;\ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma)$$

a) $z_{\alpha/2} = 1{,}96$; $\mu = 0$; $\sigma = 1$

Intervalo $(-1{,}96;\ 1{,}96)$

b) $z_{\alpha/2} = 2{,}575$; $\mu = 0$; $\sigma = 1$

Intervalo $(-2{,}575;\ 2{,}575)$

c) $z_{\alpha/2} = 1{,}645$; $\mu = 0$; $\sigma = 1$

Intervalo $(-1{,}645;\ 1{,}645)$

d) $z_{\alpha/2} = 1{,}28$; $\mu = 0$; $\sigma = 1$

Intervalo $(-1{,}28;\ 1{,}28)$

e) $z_{\alpha/2} = 1{,}96$; $\mu = 112$; $\sigma = 15$

Intervalo $(82{,}6;\ 141{,}4)$

f) $z_{\alpha/2} = 2{,}575$; $\mu = 3\,512$; $\sigma = 550$

Intervalo $(2\,095{,}75;\ 4\,928{,}25)$

g) $z_{\alpha/2} = 1{,}96$; $\mu = 3\,512$; $\sigma = 550$

Intervalo $(2\,434;\ 4\,590)$

h) $z_{\alpha/2} = 1{,}645$; $\mu = 3\,512$; $\sigma = 550$

Intervalo $(2\,607{,}25;\ 4\,416{,}75)$

i) $z_{\alpha/2} = 1{,}28$; $\mu = 3\,512$; $\sigma = 550$

Intervalo $(2\,808;\ 4\,216)$

2 **En una distribución normal con media $\mu = 25$ y desviación típica $\sigma = 5{,}3$; obtén un intervalo centrado en la media, $(\mu - k, \mu + k)$, de forma que el 95% de los individuos estén en ese intervalo.**

El intervalo será de la forma:

$$(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma;\ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma)$$

Como $1 - \alpha = 0{,}95$, entonces $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Así, el intervalo será:

$(25 - 1{,}96 \cdot 5{,}3;\ 25 + 1{,}96 \cdot 5{,}3)$; es decir: $(14{,}612;\ 35{,}388)$

3 **En una distribución $N(10, 4)$, obtén un intervalo centrado en la media $(\mu - k, \mu + k)$, tal que:**

$$P[\mu - k < x < \mu + k] = 0{,}90$$

El intervalo será de la forma:

$$(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma;\ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma)$$

Como $1 - \alpha = 0{,}90$, entonces $z_{\alpha/2} = 1{,}645$. Así, el intervalo será:

$(10 - 1{,}645 \cdot 4;\ 10 + 1{,}645 \cdot 4)$; es decir: $(3{,}42;\ 16{,}58)$

4 **En una distribución normal de media $\mu = 9{,}5$ y varianza $\sigma^2 = 1{,}44$, halla el intervalo característico para el 99%.**

Para el 99% $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0{,}99$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 2{,}575$

El intervalo será de la forma:

$$(\mu - 2{,}575 \cdot \sigma, \mu + 2{,}575 \cdot \sigma)$$

En este caso, como $\mu = 9{,}5$ y $\sigma = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2$, queda:

$$(9{,}5 - 2{,}575 \cdot 1{,}2;\ 9{,}5 + 2{,}575 \cdot 1{,}2), \text{ es decir: } (6{,}41;\ 12{,}59)$$

Teorema central del límite

5 **De una variable aleatoria x de distribución desconocida, media $\mu = 23$ y desviación típica $\sigma = 3{,}5$ se extraen muestras de tamaño n. ¿Qué se puede decir de la distribución de las medias muestrales, $\bar{x}$:**

a) en el caso de que $n = 49$?

b) en el caso de que $n = 25$?

a) Por el teorema central del límite, como $n = 49 > 30$, sabemos que $\bar{x}$ se distribuye según una normal de media $\mu = 23$ y de desviación típica

$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{3{,}5}{\sqrt{49}} = \dfrac{3{,}5}{7} = 0{,}5$; es decir, $\bar{x}$ es $N(23;\ 0{,}5)$.

b) Como $n = 25 < 30$, solo podemos decir que $\bar{x}$ se distribuye con media $\mu = 23$ y desviación típica $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{3{,}5}{\sqrt{25}} = \dfrac{3{,}5}{5} = 0{,}7$. Si la población de partida, x, fuera normal, entonces $\bar{x}$ también sería normal.

6 **Una variable aleatoria x se distribuye normal $N(120, 30)$. ¿Qué se puede afirmar de la distribución de las medias $\bar{x}$ de las muestras de tamaño n:**

a) si $n = 36$? **b) si $n = 16$?**

Como la población de partida es normal, $N(120, 130)$, por el teorema central del límite, sabemos que $\bar{x}$ es $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ para cualquier valor de n. Por tanto:

a) Si $n = 36$, $\bar{x}$ es normal con $\mu = 120$; $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{30}{\sqrt{36}} = \dfrac{30}{6} = 5$; es decir, $\bar{x}$ es $N(120, 5)$.

b) Si $n = 16$, $\bar{x}$ es normal con $\mu = 120$; $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{30}{\sqrt{16}} = \dfrac{30}{4} = 7{,}5$; es decir, $\bar{x}$ es $N(120, 7{,}5)$.

7 **Di cómo se distribuyen las medias muestrales en cada uno de los siguienes casos:**

		a)	b)	c)
POBLACIÓN	DISTRIBUCIÓN	Normal	Desc.	Normal
	MEDIA, μ	20	20	3,75
	DESV. TÍPICA, σ	4	4	1,2
TAM. MUESTRA, n		16	100	4

		d)	e)	f)	g)
POBLACIÓN	DISTRIBUCIÓN	Desc.	Norm.	Desc.	Desc.
	MEDIA, μ	3,75	112	112	3512
	DESV. TÍPICA, σ	1,2	15	15	550
TAM. MUESTRA, n		50	100	100	40

Recordemos que si la población se distribuye según una normal $N(\mu, \sigma)$, o bien seleccionamos una muestra de tamaño $n \geq 30$ en una población cualquiera (no necesariamente normal) con media μ y desviación típica σ, entonces, las medias muestrales siguen una distribución $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Aplicamos este resultado en cada uno de los casos propuestos:

a) $N\left(20, \frac{4}{\sqrt{16}}\right)$; es decir, $N(20, 1)$

b) $N\left(20, \frac{4}{\sqrt{100}}\right)$; es decir, $N(20; 0{,}4)$

c) $N\left(3{,}75; \frac{1{,}2}{\sqrt{4}}\right)$; es decir, $N(3{,}75; 0{,}6)$

d) $N\left(3{,}75; \frac{1{,}2}{\sqrt{50}}\right)$; es decir, $N(3{,}75; 0{,}17)$

e) $N\left(112, \frac{15}{\sqrt{100}}\right)$; es decir, $N(112; 1{,}5)$

f) $N\left(112, \frac{15}{\sqrt{100}}\right)$; es decir, $N(112; 1{,}5)$

g) $N\left(3512, \frac{550}{\sqrt{40}}\right)$; es decir, $N(3512; 86{,}96)$

8 **Una variable aleatoria se distribuye $N(\mu, \sigma)$. Si se extraen muestras de tamaño n:**

a) ¿Qué distribución tiene la variable aleatoria media muestral, $\bar{x}$?

b) Si se toman muestras de tamaño $n = 4$ de una variable aleatoria x con distribución $N(165, 12)$, calcula $P[\bar{x} > 173{,}7]$.

a) $\bar{x}$ sigue una distribución normal de media μ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, es decir, $\bar{x}$ es $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

b) Las medias muestrales en muestras de tamaño $n = 4$ se distribuyen según una normal de media $\mu = 165$ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{4}} = \frac{12}{2} = 6$; es decir, $\bar{x}$ es $N(165, 6)$. Así:

$$P[\bar{x} > 173{,}7] = P\left[z > \frac{173{,}7 - 165}{6}\right] = P[z > 1{,}45] =$$
$$= 1 - P[z \le 1{,}45] = 1 - 0{,}9265 = 0{,}0735$$

9 S **En una distribución $N(20, 6)$, tomamos muestras de tamaño 64.**

a) ¿Cuál es la distribución de las medias de las muestras?

b) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una muestra cuya media esté comprendida entre 19 y 21?

a) Las medias muestrales, $\bar{x}$, se distribuyen según una normal de media $\mu = 20$ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6}{\sqrt{64}} = \frac{6}{8} = 0{,}75$; es decir:

$\bar{x}$ es $N(20; 0{,}75)$

b) $P[19 < \bar{x} < 21] = P\left[\frac{19 - 20}{0{,}75} < z < \frac{21 - 20}{0{,}75}\right] = P[-1{,}33 < z < 1{,}33] =$

$$= P[z < 1{,}33] - P[z < -1{,}33] = P[z < 1{,}33] - (1 - P[z < 1{,}33]) =$$
$$= 2P[z < 1{,}33] - 1 = 2 \cdot 0{,}9082 - 1 = 0{,}8164$$

10 S **Se sabe que el cociente intelectual de los alumnos de una universidad se distribuye según una ley normal de media 100 y varianza 729.**

a) Halla la probabilidad de que una muestra de 81 alumnos tenga un cociente intelectual medio inferior a 109.

b) Halla la probabilidad de que una muestra de 36 alumnos tenga un cociente intelectual medio superior a 109.

El cociente intelectual sigue una distruibución normal de media $\mu = 100$ y de desviación típica $\sigma = \sqrt{729} = 27$; es decir, x es $N(100, 27)$.

a) Las medias en muestras de 81 alumnos se distribuirán según una normal de media $\mu = 100$ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{27}{\sqrt{81}} = \frac{27}{9} = 3$; es decir, $\bar{x}$ es $N(100, 3)$. Así:

$$P[\bar{x} < 109] = P\left[z < \frac{109 - 100}{3}\right] = P[z < 3] = 0{,}9987$$

b) Las medias en muestras de 36 alumnos se distribuyen según una normal de media $\mu = 100$ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{27}{\sqrt{36}} = \frac{27}{6} = 4,5$; es decir, $\bar{x}$ es $N(100; 4,5)$. Así:

$$P[\bar{x} > 109] = P\left[z > \frac{109 - 100}{4,5}\right] = P[z > 2] = 1 - P[z \le 2] = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

11 S **El tiempo de espera, en minutos, de los pacientes en un servicio de urgencias, es $N(14, 4)$.**

a) ¿Cómo se distribuye el tiempo medio de espera de 16 pacientes?

b) En una media jornada se ha atendido a 16 pacientes. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de su espera esté comprendido entre 10 y 15 minutos?

a) El tiempo medio de espera, $\bar{x}$, de 16 pacientes se distribuye según una normal de media $\mu = 14$ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{16}} = \frac{4}{4} = 1$; es decir $\bar{x}$ es $N(14, 1)$.

b) $P[10 < \bar{x} < 15] = P\left[\frac{10 - 14}{1} < z < \frac{15 - 14}{1}\right] = P[-4 < z < 1] =$

$$= P[z < 1] - P[z < -4] = 0,8413 - 0 = 0,8413$$

12 S **Se sabe que el peso en kilogramos de los alumnos de Bachillerato de Madrid es una variable aleatoria, x, que sigue una distribución normal de desviación típica igual a 5 kg. En el caso de considerar muestras de 25 alumnos, ¿qué distribución tiene la variable aleatoria media muestral, $\bar{x}$?**

La variable aleatoria media muestral, $\bar{x}$, sigue una distribución normal con la misma media que la población, llamémosla μ, y con desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$; es decir, $\bar{x}$ es $N(\mu, 1)$.

13 S **En una ciudad, la altura media de sus habitantes tiene una desviación típica de 8 cm. Si la altura media de dichos habitantes fuera de 175 cm, ¿cuál sería la probabilidad de que la altura media de una muestra de 100 individuos tomada al azar fuera superior a 176 cm?**

La altura en la población, x, sigue una distribución normal $N(175, 8)$. Si consideramos muestras de tamaño $n = 100$, las medias muestrales se distribuyen según una normal de media $\mu = 175$ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{8}{\sqrt{100}} = \frac{8}{10} = 0,8$; es decir, $\bar{x}$ es $N(175; 0,8)$. Así:

$$P[\bar{x} > 176] = P\left[z > \frac{176 - 175}{0,8}\right] = P[z > 1,25] = 1 - P[z \le 1,25] =$$

$$= 1 - 0,8944 = 0,1056$$

PARA PROFUNDIZAR

14 **La desviación típica de una variable estadística es $\sigma = 5$. Para estimar la media de dicha variable, extraemos una muestra aleatoria de tamaño $n = 100$ y obtenemos $\bar{x} = 28$. Obtén un intervalo de confianza del 95% para estimar la media de la población, μ.**

Para el 95% $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0{,}95$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El intervalo de confianza para μ al 95% es:

$$\left(28 - 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{100}};\ 28 + 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{100}}\right); \text{ es decir: } (27{,}02;\ 28{,}98)$$

15 **Los estudiantes de Bachillerato de una cierta comunidad autónoma duermen un número de horas diarias que se distribuye según una ley normal de media μ desconocida y de desviación típica 3. A partir de una muestra de tamaño 30 se ha obtenido una media muestral igual a 7 horas.**

Halla un intervalo de confianza al 90% para la media de horas de sueño, μ.

Para $1 - \alpha = 0{,}9$ sabemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}645$.

El intervalo de confianza para μ será:

$$\left(7 - 1{,}645 \cdot \frac{30}{\sqrt{30}};\ 7 + 1{,}645 \cdot \frac{30}{\sqrt{30}}\right); \text{ es decir, } (6{,}099;\ 7{,}901)$$

16 **En una muestra de 50 jóvenes encontramos que la dedicación media diaria de ocio es de 400 minutos y su desviación típica de 63 minutos. Calcula el intervalo de confianza de la media de la población al 95% de nivel de confianza.**

Para el 95% $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0{,}95$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El intervalo de confianza para μ al 95% es:

$$\left(400 - 1{,}96 \cdot \frac{63}{\sqrt{50}};\ 400 + 1{,}96 \cdot \frac{63}{\sqrt{50}}\right); \text{ es decir: } (382{,}54;\ 417{,}46)$$

17 **Las notas en un cierto examen se distribuyen normal con media $\mu = 5{,}3$ y desviación típica $\sigma = 2{,}4$.**

Halla la probabilidad de que un estudiante tomado al azar tenga una nota:

a) Superior a 7.

b) Inferior a 5.

c) Comprendida ente 5 y 7.

Tomamos al azar 16 estudiantes.

Halla la probabilidad de que la media de las notas de estos 16 estudiantes:

d) Sea superior a 7.

e) Sea inferior a 5.

f) Esté comprendida entre 5 y 7.

g) Halla *k* para que el intervalo (5,3 – *k*; 5,3 + *k*) contenga al 95% de las notas.

h) Halla *b* para que el intervalo (5,3 – *b*; 5,3 + *b*) contenga al 95% de las notas medias de las muestras de 16 individuos.

x es $N(5{,}3;\ 2{,}4)$ $\rightarrow$ z es $N(0,\ 1)$

a) $P[x > 7] = P\left[z > \dfrac{7 - 5{,}3}{2{,}4}\right] = P[z > 0{,}71] = 1 - P[z \le 0{,}71] = 1 - 0{,}7612 = 0{,}2388$

b) $P[x < 5] = P\left[z < \dfrac{5 - 5{,}3}{2{,}4}\right] = P[z < -0{,}13] = P[z > 0{,}13] = 1 - P[z \le 0{,}13] =$

$= 1 - 0{,}5517 = 0{,}4483$

c) $P[5 < x < 7] = P\left[\dfrac{5 - 5{,}3}{2{,}4} < x < \dfrac{7 - 5{,}3}{2{,}4}\right] = P[-0{,}13 < z < 0{,}71] =$

$= P[z < 0{,}71] - P[z < -0{,}013] = 0{,}7612 - 0{,}4483 = 0{,}3129$

Las medias de las notas de 16 estudiantes se distribuyen $N\left(5{,}3;\ \dfrac{2{,}4}{\sqrt{16}}\right)$; es decir, $\bar{x}$ es $N(5{,}3;\ 0{,}6)$.

d) $P[\bar{x} > 7] = P\left[z > \dfrac{7 - 5{,}3}{0{,}6}\right] = P[z > 2{,}83] = 1 - P[z \le 2{,}83] = 1 - 0{,}9977 = 0{,}0023$

e) $P[\bar{x} < 5] = P\left[z < \dfrac{5 - 5{,}3}{0{,}6}\right] = P[z < -0{,}5] = P[z > 0{,}5] = 1 - P[z \le 0{,}5] =$

$= 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$

f) $P[5 < \bar{x} < 7] = P\left[\dfrac{5 - 5{,}3}{0{,}6} < z < \dfrac{7 - 5{,}3}{0{,}6}\right] = P[-0{,}5 < z < 2{,}83] =$

$= P[z < 2{,}83] - P(z < -0{,}5] = 0{,}9977 - 0{,}3085 = 0{,}6892$

g) Es un intervalo característico para la media de la población, por tanto:

$k = z_{\alpha/2} \cdot \sigma$

Como $1 - \alpha = 0{,}95$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Así:

$k = 1{,}96 \cdot 2{,}4 = 4{,}704$

h) Es un intervalo característico para las medias muestrales, en muestras de tamaño 16, por tanto:

$b = z_{\alpha/2} \cdot 0{,}6$

Como $1 - \alpha = 0{,}95$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Así:

$b = 1{,}96 \cdot 0{,}6 = 1{,}176$

18 S **La estatura de los jóvenes de una ciudad sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$. Si el 90% de las medias de las muestras de 81 jóvenes están en (173,4; 175,8), halla μ y σ.**

Para el 90% $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0{,}90$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

El intervalo característico para las medias de las muestras de 81 jóvenes (para el 90%) es:

$$\left(\mu - 1{,}645 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \mu + 1{,}645 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El centro del intervalo es μ:

$$\mu = \frac{173{,}4 + 175{,}8}{2} = 174{,}6 = \mu$$

La semiamplitud del intervalo es:

$$1{,}645 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{81}} = \frac{175{,}8 - 173{,}4}{2}$$

$$1{,}645 \cdot \frac{\sigma}{9} = 1{,}2 \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{1{,}2 \cdot 9}{1{,}645} = 6{,}57$$

19 S **Si la distribución de la media de las alturas en muestras de tamaño 49 de los niños de 10 años tiene como media 135 cm y como desviación típica 1,2 cm, ¿cuánto valen la media y la varianza de la altura de los niños de esa ciudad?**

Si la media en la población es μ y la desviación típica es σ, entonces, la distribución de las medias muestrales es $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Así, tenemos que:

$$\mu = 135 \text{ cm}$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{49}} = \frac{\sigma}{7} = 1{,}2 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad \sigma = 1{,}2 \cdot 7 = 8{,}4 \text{ cm}$$

Por tanto, la media es $\mu = 135$ cm y la varianza es $\sigma^2 = 8{,}4^2 = 70{,}56$.

20 S **Los paquetes recibidos en un almacén tienen un peso medio de 300 kg y una desviación típica de 50 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que 25 de los paquetes, elegidos al azar, excedan el límite de carga del montacargas donde se van a meter, que es de 8 200 kg?**

Sabemos que la suma de los pesos de n de esas bolsas tomadas al azar sigue una distribución normal de media $n\mu$ y de desviación típica $\sigma\sqrt{n}$, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ es } N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

En este caso:

$$\sum_{i=1}^{25} x_i \text{ es } N(25 \cdot 300;\ 50\sqrt{25});\ \text{ es decir } N(7\,500;\ 250)$$

Tenemos que calcular:

$$P\left[\sum_{i=1}^{25} x_i > 8\,200\right] = P\left[z > \frac{8\,200 - 7\,500}{250}\right] = P[z > 2{,}8] =$$

$$= 1 - P[z \leq 2{,}8] = 1 - 0{,}9974 = 0{,}0026$$

21 **El peso de los perros adultos de una cierta raza es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con una media de 7,4 kg y una desviación típica de 0,6 kg.**

Si consideramos muestras de 30 de estos animales

a) ¿Cuál es la distribución de la media muestral, $\bar{x}$?

b) Calcula $P[6{,}5 < \bar{x} < 7{,}5]$.

c) ¿Cuál es la distribución de la suma de los pesos de los 30 animales de las muestras?

d) Calcula $P\left[\sum_{i=1}^{30} x_i > 225\right]$.

Si llamamos X = "peso de los perros", tenemos que X es $N(7{,}4;\ 0{,}6)$.

a) $\bar{x}$ sigue una distribución normal de media $\mu = 7{,}4$ kg y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}6}{\sqrt{30}} \simeq 0{,}11$; es decir, $\bar{x}$ es $N(7{,}4;\ 0{,}11)$.

b) $P[6{,}5 < \bar{x} < 7{,}5] = P\left[\frac{6{,}5 - 7{,}4}{0{,}11} < z < \frac{7{,}5 - 7{,}4}{0{,}11}\right] = P[-8{,}18 < z < 0{,}91] = P[z < 0{,}91]$ $= 0{,}8186$

c) $\sum_{i=1}^{30} x_i$ sigue una distribución normal de media $n\mu = 30 \cdot 7{,}4 = 222$ kg y desviación típica $\sigma\sqrt{n} = 0{,}6 \cdot \sqrt{30} \simeq 3{,}29$; es decir, $\sum_{i=1}^{30} x_i$ es $N(222;\ 3{,}29)$.

d) $P\left[\sum_{i=1}^{30} x_i > 225\right] P\left[z > \frac{225 - 222}{3{,}29}\right] = P[z > 0{,}91] = 1 - P[z \leq 0{,}91] = 1 - 0{,}8186 =$ $= 0{,}1814$

22 **Se supone que el peso medio de las sandías de cierta variedad sigue una distribución normal con $\mu = 6$ kg y $\sigma = 1$ kg. Si empaquetamos las sandías en cajas de 8 unidades:**

a) Halla la probabilidad de que la media de los pesos de las sandías de una caja sea menor que 5,5 kg.

b) Calcula la probabilidad de que entre las 8 sandías de una de las cajas pesen más de 50 kg.

a) Si llamamos x = "peso de las sandías", tenemos que x es $N(6,\ 1)$. Si consideramos muestras de tamaño $n = 8$, tenemos que $\bar{x}$ sigue una distribución normal de media $\mu = 6$ kg y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \simeq \quad \simeq 0,35$; es decir, es $N(6; 0,35)$.

Por tanto:

$$P[\bar{x} < 5,5] = P\left[z < \frac{5,5-6}{0,35}\right] = P[z < -1,43] = P[z > 1,43] = 1 - P[z \leq 1,43] =$$

$$= 1 - 0,9236 = 0,0764$$

b) Si $\sum_{i=1}^{8} x_i$ sigue una distribución normal de media $n\mu = 8 \cdot 6 = 48$ kg y desviación típica es $\sigma\sqrt{n} = 1 \cdot \sqrt{8} \simeq 2,83$; es decir, $\sum_{i=1}^{8} x_i$ es $N(48; 2,83)$.

Por tanto:

$$P\left[\sum_{i=1}^{8} x_i > 50\right] P\left[z > \frac{50-48}{2,83}\right] = P[z > 0,71] = 1 - P[z \leq 0,71] = 1 - 0,7612 =$$

$$=0,2388$$

23 S **Para estimar la estatura media de los jóvenes entre 15 y 25 años de una lo calidad, se ha medido a 40 de estos jóvenes, obteniéndose los siguiente resultados:**

ESTATURA (cm)	[148, 153)	[153, 158)	[158, 163)
Nº JÓVENES	2	4	11

ESTATURA (cm)	[163, 168)	[168, 173)	[173, 178)
Nº JÓVENES	14	5	4

Estima, con un nivel de confianza del 99%, el valor de la estatura media d los jóvenes entre 15 y 25 años de dicha localidad.

Hallamos $\bar{x}$ y s para la muestra obtenida:

ESTATURA (cm)	[148, 153)	[153, 158)	[158, 163)	[163, 168)	[168, 173)	[173, 178)
MARCA DE CLASE (x_i)	150,5	155,5	160,5	165,5	170,5	175,5
FRECUENCIA (f_i)	2	4	11	14	5	4

$$\bar{x} = 164 \quad \text{y} \quad s = 6,24$$

Para un nivel de confianza del 99%, se tiene:

$$1 - \alpha = 0,99 \quad \rightarrow \quad z_{\alpha/2} = 2,575$$

Así, el intervalo de confianza para estimar μ al 99% es:

$$\left(164 - 2,575 \cdot \frac{6,24}{\sqrt{40}}; 164 + 2,575 \cdot \frac{6,24}{\sqrt{40}}\right); \text{ es decir: } (161,46; 166,54)$$

24 **Se desea estudiar el gasto semanal de fotocopias, en céntimos de euro, de los estudiantes de bachillerato de cierta comunidad. Para ello, se ha elegido una muestra aleatoria de 9 de estos estudiantes, resultando los valores siguientes para estos gastos:**

100; 150; 90; 70; 75; 105; 200; 120; 80

Se supone que la variable objeto del estudio sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 12. Determina un intervalo de confianza al 95% para la media del gasto semanal en fotocopias por estudiante.

Para el 95% $\to$ $1 - \alpha = 0{,}95$ $\to$ $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Hallamos la media de la muestra:

$$\bar{x} = \frac{100 + 150 + 90 + \ldots + 80}{9} = \frac{990}{9} = 110 \text{ céntimos de euro.}$$

El intervalo de confianza para μ será:

$$\left(110 - 1{,}96 \cdot \frac{12}{\sqrt{9}};\ 110 + 1{,}96 \cdot \frac{12}{\sqrt{9}}\right); \text{ es decir: } (102{,}16;\ 117{,}84)$$

25 **S** **Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 individuos a los que se ha medido el nivel de glucosa en sangre, obteniéndose una media muestral de 110 mg/cm³. Se sabe que la desviación típica de la población es de 20 mg/cm³.**

a) Obtén un intervalo de confianza, al 90%, para el nivel de glucosa en sangre en la población.

b) ¿Qué error máximo se comete con la estimación anterior?

a) Para el 90% $\to$ $1 - \alpha = 0{,}90$ $\to$ $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

El intervalo de confianza para μ al 90% es:

$$\left(110 - 1{,}645 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}};\ 110 + 1{,}645 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}\right); \text{ es decir: } (106{,}71;\ 113{,}29)$$

b) El error máximo es la mitad de la longitud del intervalo de confianza, es decir:

$$E = 1{,}645 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} = 1{,}645 \cdot 2 = 3{,}29$$

26 **La duración de las bombillas fabricadas por una empresa sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 50 horas. Para estimar la duración se experimenta con una muestra de tamaño *n*.**

Calcular el valor de *n* para que, con un nivel de confianza del 95%, se consiga un error en la estimación inferior a 5 horas.

Para el 95% $\to$ $1 - \alpha = 0{,}95$ $\to$ $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El error máximo admisible es:

$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Buscamos n para que $E < 5$ horas.

Como $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ y $\sigma = 50$, queda:

$$1{,}96 \cdot \frac{50}{\sqrt{n}} < 5 \rightarrow \frac{98}{\sqrt{n}} < 5 \rightarrow \sqrt{n} > \frac{98}{5} = 19{,}6 \rightarrow n > 384{,}16$$

Debemos tomar una muestra de, al menos, 385 bombillas.

27 S **La media de las estaturas de una muestra aleatoria de 400 personas de una ciudad es 1,75 m. Se sabe que la estatura de las personas de esa ciudad es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con varianza $\sigma^2 = 0{,}16$ m².**

a) Construye un intervalo, de un 95% de confianza, para la media de las estaturas de la población.

b) ¿Cuál sería el mínimo tamaño muestral necesario para que pueda decirse que la verdadera media de las estaturas está a menos de 2 cm de la media muestral, con una confianza del 90%?

a) $n = 400$; $\bar{x} = 1{,}75$ m; $\sigma^2 = 0{,}16 \rightarrow \sigma = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4$

Para el 95% $\rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El intervalo de confianza es:

$$\left(1{,}75 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}4}{\sqrt{400}}; 1{,}75 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}4}{\sqrt{400}}\right); \text{ es decir: } (1{,}7108; 1{,}7892)$$

b) 90% de confianza $\rightarrow 1 - \alpha = 0{,}90 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}645$

El error máximo admisible es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Buscamos n para que $E < 0{,}02$ m:

$$1{,}645 \cdot \frac{0{,}4}{\sqrt{n}} < 0{,}02 \rightarrow \frac{0{,}658}{\sqrt{n}} < 0{,}02 \rightarrow \frac{\sqrt{n}}{0{,}658} > \frac{1}{0{,}02}$$

$$\sqrt{n} > \frac{0{,}658}{0{,}02} \rightarrow \sqrt{n} > 32{,}9 \rightarrow n > 1\,082{,}41$$

Debemos tomar una muestra de, al menos, 1 083 personas.

28 S **Las medidas de los diámetros de una muestra al azar de 200 cojinetes de bolas, hechos por una determinada máquina dieron una media de 2 cm y una desviación típica de 0,1 cm. Halla los intervalos de confianza del 68,26**

95,44% y 99,73%

para el diámetro medio de todos los cojinetes.

a) Para el 68,26% $\rightarrow 1 - \alpha = 0{,}6826 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1$

El intervalo de confianza para μ es:

$$\left(2 - 1 \cdot \frac{0,1}{\sqrt{200}};\ 2 + 1 \cdot \frac{0,1}{\sqrt{200}}\right); \text{ es decir: } (1,993;\ 2,007)$$

b) Para el 95,44% $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0,9544$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 2$

El intervalo de confianza es:

$$\left(2 - 2 \cdot \frac{0,1}{\sqrt{200}};\ 2 + 2 \cdot \frac{0,1}{\sqrt{200}}\right); \text{ es decir: } (1,986;\ 2,014)$$

c) Para el 99,73% $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0,9973$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 3$

El intervalo de confianza es:

$$\left(2 - 3 \cdot \frac{0,1}{\sqrt{200}};\ 2 + 3 \cdot \frac{0,1}{\sqrt{200}}\right); \text{ es decir: } (1,979;\ 2,021)$$

29 **El peso, en kg, de los jóvenes entre 16 y 20 años de una cierta ciudad es una variable aleatoria, x, que sigue una distribución normal con $\sigma^2 = 25$.**

a) Si consideramos muestras de 25 jóvenes, ¿cuál es la distribución que tiene la variable aleatoria media muestral?

b) Si se desea que la media de la muestra no difiera en más de 1 kg de la media de la población, con probabilidad 0,95, ¿cuántos jóvenes se deberían tomar en la muestra?

a) Por el teorema central del límite sabemos que $\bar{x}$ sigue una distribución normal de media μ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$; es decir, $\bar{x}$ es $N(\mu, 1)$.

b) El error máximo admisible es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Sabemos que: $1 - \alpha = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$E = 1$ kg

$\sigma = 5$ kg

Por tanto:

$1 = 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = 9,8 \rightarrow n = 96,04$

Se deberá tomar una muestra de, al memos, 97 jóvenes.

30 **Una variable aleatoria, x, tiene una distribución normal, siendo su desviación típica igual a 3.**

a) Si se consideran muestras de tamaño 16, ¿qué distribución sigue la variable aleatoria media muestral?

b) Si se desea que la media de la muestra no difiera en más de una unidad de la media de la población, con probabilidad 0,99, ¿cuántos elementos, como mínimo, se deberían tomar en la muestra?

a) Por el teorema central del límite, sabemos que $\bar{x}$ sigue una distribución normal de media μ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4} = 0,75$; es decir, $\bar{x}$ es $N(\mu; 0,75)$.

a) El error máximo admisible es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Sabemos que: $1 - \alpha = 0{,}99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}575$

$\sigma = 3$

$E = 1$

Por tanto:

$$1 = 2{,}575 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = 7{,}725 \rightarrow n = 59{,}68$$

La muestra debería tener, al menos, 60 elementos.

31 **El tiempo de vida de una clase de depuradoras de agua utilizadas en una planta industrial se distribuye normalmente, con una desviación típica de 2 000 horas. En un ensayo realizado con una muestra aleatoria de 9 depuradoras, se obtuvieron los siguientes tiempos de vida en miles de horas:**

9,5 10 7,5 10,5 16,5 10 12 32 18

a) Halla un intervalo de confianza al 99% para la vida media de las depuradoras.

b) ¿Cuál es el error máximo que se comete con la estimación anterior para la media?

c) Calcula el tamaño mínimo que debería tener la muestra, en el caso de admitir un error máximo de 500 horas, con un grado de confianza del 95%.

a) El intervalo de confianza es de la forma:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Sabemos que:

$$\bar{x} = \frac{9{,}5 + 10 + 7{,}5 + 10{,}5 + 16{,}5 + 10 + 12 + 32 + 18}{9} = \frac{126}{9} = 14 \text{ miles}$$

de horas

$1 - \alpha = 0{,}99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}575$

$\sigma = 2000$ horas $= 2$ miles de horas

$n = 9$

Por tanto, el intervalo será (en miles de horas):

$$\left(14 - 2{,}575 \cdot \frac{2}{\sqrt{9}}; 14 + 2{,}575 \cdot \frac{2}{\sqrt{9}}\right);$$ es decir, (12,28; 15,72).

b) $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575 \cdot \frac{2}{\sqrt{9}} \simeq 1{,}72$ miles de horas

c) Si $E = 500$ horas $= 0{,}5$ miles de horas,

$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$\sigma =$ 2 miles de horas, entonces:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 0{,}5 = 1{,}95 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = 7{,}84 \rightarrow n = 61{,}4656$$

La muestra debería tener, al menos, 62 elementos.

32 S **Al medir el tiempo de reacción, un psicólogo estima que la desviación típica del mismo es de 0,5 segundos. ¿Cuál será el número de medidas que deberá hacer para que sea del 95% la confianza de que el error de su estimación no excederá de 0,05 segundos?**

Para el 95% de confianza, $1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El error máximo admisible es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \text{ Buscamos } n \text{ para que } E \le 0{,}05:$$

$$1{,}96 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{n}} \le 0{,}05 \rightarrow \frac{0{,}98}{\sqrt{n}} \le 0{,}05 \rightarrow \sqrt{n} \ge \frac{0{,}98}{0{,}05} = 19{,}6 \rightarrow n \ge 384{,}16$$

Deberá hacer, al menos, 385 medidas.

33 **Al medir el diámetro de los cojinetes producidos por una empresa, se estima que la desviación típica de dicho diámetro es de 0,05 cm. Se han hecho 121 mediciones.**

¿Se puede afirmar, con el 99% de confianza, que el error en la estimación de la media no excederá a 0,01 cm?

Para el 99% $\rightarrow 1 - \alpha = 0{,}99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}575$

El error máximo admisible es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575 \cdot \frac{0{,}05}{\sqrt{121}} = 0{,}0117 > 0{,}01 \text{ cm}$$

Por tanto, no podemos afirmar que el error en la estimación no excederá a 0,01 cm.

34 S **Las ventas mensuales de una tienda de electrodomésticos se distribuyen según una ley normal, con desviación típica 900 €. En un estudio estadístico de las ventas realizadas en los últimos nueve meses, se ha encontrado un intervalo de confianza para la media mensual de las ventas, cuyos extremos son 4 663 € y 5 839 €.**

a) ¿Cuál ha sido la media de las ventas en estos nueve meses?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza para este intervalo?

a) La media de las ventas es el punto medio del intervalo; es decir:

$$\bar{x} = \frac{4\,663 + 5\,839}{2} = 5\,251 \text{ €}$$

b) El estudio se ha realizado en los últimos 9 meses, es decir, se ha considerado una muestra de tamaño $n = 9$.

El error máximo admisible es la mitad de la longitud del intervalo, es decir:

$$E = \frac{5\,839 - 4\,663}{2} = 588$$

Así, sabemos que: $n = 9$; $\sigma = 900$; $E = 588$, y como:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 588 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{900}{\sqrt{9}} \rightarrow 588 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{900}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow 588 = z_{\alpha/2} \cdot 300 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{588}{300} = 1{,}96 \rightarrow$$

$$\rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

que corresponde a un nivel de confianza del 95%.

35 **Se supone que los gastos corrientes por empleado de los distintos departamentos de una empresa siguen una distribución normal con desviación típica 500 €. De los datos disponibles para 16 departamentos, se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza para estimar la media del gasto corriente por empleado de la empresa: (1 928,125; 2 571,875)**

¿Cuál es el nivel de confianza, $1 - \alpha$, con el que se ha hecho la estimación?

a) Sabemos que el error máximo admisible es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; y tenemos que:

$$E = \frac{2571{,}875 - 1928{,}124}{2} = 321{,}875$$

$\sigma = 500$ €

n = 16

Por tanto:

$$321{,}875 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{500}{\sqrt{16}} \rightarrow 321{,}875 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{599}{4}$$

$$321{,}875 = z_{\alpha/2} \cdot 125 \rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{321{,}875}{125} = 2{,}575 \rightarrow 1 - \alpha = 0{,}99$$

El nivel de confianza es $1 - \alpha = 0{,}99$; es decir, del 99%.

UNIDAD DIDÁCTICA 13:
INFERENCIA ESTADÍSTICA. ESTIMACIÓN DE UNA PROPORCIÓN

* Las numeraciones indicadas entre páginas se refieren a las páginas del libro de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II, de segundo de bachillerato de la editorial Anaya, Andalucía, cuyos autores son J. Colera, R. García y M.J.Oliveira

Páginas 308

Distribución de las proporciones muestrales. Intervalos característicos

1 **Averigua cómo se distribuyen las proporciones muestrales, p_r, para las poblaciones y las muestras que se describen a continuación:**

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
PROPORCIÓN, p, EN LA POBLACIÓN	0,5	0,6	0,8	0,1	0,05	0,15
TAMAÑO, n, DE LA MUESTRA	10	20	30	50	100	100

Recordemos que, si $np \geq 5$ y $nq \geq 5$, entonces, las proporciones muestrales siguen una distribución $N\left(p, \sqrt{\dfrac{pq}{n}}\right)$.

Aplicamos este resultado a cada uno de los casos propuestos. Comprobamos que en todo ellos se tiene que $np \geq 5$ y $nq \geq 5$.

a) $N\left(0,5; \sqrt{\dfrac{0,5 \cdot 0,5}{10}}\right)$; es decir, $N(0,5; 0,158)$

b) $N\left(0,6; \sqrt{\dfrac{0,6 \cdot 0,4}{20}}\right)$; es decir, $N(0,6; 0,110)$

c) $N\left(0,8; \sqrt{\dfrac{0,8 \cdot 0,2}{30}}\right)$; es decir, $N(0,8; 0,073)$

d) $N\left(0,1; \sqrt{\dfrac{0,1 \cdot 0,9}{50}}\right)$; es decir, $N(0,1; 0,042)$

e) $N\left(0,05; \sqrt{\dfrac{0,05 \cdot 0,95}{100}}\right)$; es decir, $N(0,05; 0,0218)$

f) $N\left(0,15; \sqrt{\dfrac{0,15 \cdot 0,85}{100}}\right)$; es decir, $N(0,15; 0,036)$

2 **Halla los intervalos característicos para las proporciones muestrales del ejercicio anterior, correspondientes a las probabilidades que, en cada caso, se indican:**

a) 90% **b) 95%** **c) 99%** **d) 95%** **e) 99%** **f) 80%**

a) $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

Intervalo $(0{,}5 - 1{,}645 \cdot 0{,}158;\ 0{,}5 + 1{,}645 \cdot 0{,}158)$; es decir: $(0{,}24;\ 0{,}76)$

b) $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Intervalo $(0{,}6 - 1{,}96 \cdot 0{,}110;\ 0{,}6 + 1{,}96 \cdot 0{,}110)$; es decir: $(0{,}38;\ 0{,}82)$

c) $z_{\alpha/2} = 2{,}575$

Intervalo $(0{,}8 - 2{,}575 \cdot 0{,}073;\ 0{,}8 + 2{,}575 \cdot 0{,}073)$; es decir: $(0{,}61;\ 0{,}99)$

d) $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Intervalo $(0{,}1 - 1{,}96 \cdot 0{,}042;\ 0{,}1 + 1{,}96 \cdot 0{,}042)$; es decir: $(0{,}018;\ 0{,}182)$

e) $z_{\alpha/2} = 2{,}575$

Intervalo $(0{,}05 - 2{,}575 \cdot 0{,}0218;\ 0{,}05 + 2{,}575 \cdot 0{,}0218)$; es decir: $(-0{,}006;\ 0{,}106)$

f) $z_{\alpha/2} = 1{,}28$

Intervalo $(0{,}15 - 1{,}28 \cdot 0{,}036;\ 0{,}15 + 1{,}28 \cdot 0{,}036)$; es decir: $(0{,}104;\ 0{,}196)$

3 **Cuatro de cada diez habitantes de una determinada población lee habitualmente el periódico Z.**

Halla el intervalo característico para la proporción de habitantes de esa población que leen el periódico Z, en muestras de tamaño 49, correspondiente al 95%.

p = proporción de lectores del periódico Z $= \frac{4}{10} = 0{,}4$.

El intervalo característico para la proporción de lectores, pr, en muestras de tamaño n es de la forma:

$$\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}},\ p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

Para el 95% $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0{,}95$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El intervalo será:

$$\left(0{,}4 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{49}};\ 0{,}4 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{49}}\right); \text{ es decir: } (0{,}26;\ 0{,}54)$$

4 **En un saco mezclamos judías blancas y judías pintas en la relación de 14 blancas por cada pinta.**

Extraemos un puñado de 100 judías.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción de judías pintas esté comprendida entre 0,05 y 0,1?

b) Halla un intervalo en el cual se encuentre el 99% de las proporciones de las muestras de tamaño 100.

a) La proporción de judías pintas es $p = \frac{1}{15}$. Si extraemos un puñado de 100 judías, tenemos una binomial $B\left(100, \frac{1}{15}\right)$.

Una proporción entre 0,05 y 0,1 significa que haya entre $100 \cdot 0{,}05 = 5$ y $100 \cdot 0{,}1 = 10$ judías pintas.

Por tanto, si x es $B\left(100, \frac{1}{15}\right)$, tenemos que calcular $P[5 < x < 10]$.

Como $100 \cdot \frac{1}{15} > 5$ y $100 \cdot \frac{14}{15} > 5$, podemos aproximar la binomial mediante una normal de media $\mu = 100 \cdot \frac{1}{15} = 6{,}67$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{14}{15}} = 2{,}49$.

Así, si x es $B\left(100, \frac{1}{15}\right) \rightarrow x'$ es $N(6{,}67;\ 2{,}49) \rightarrow z$ es $N(0, 1)$. Calculamos:

$$P[5 < x < 10] = P[5{,}5 \le x' \le 9{,}5] = P\left[\frac{5{,}5 - 6{,}67}{2{,}49} \le z \le \frac{9{,}5 - 6{,}67}{2{,}49}\right] =$$

$$= P[-0{,}47 \le z \le 1{,}14] = P[z \le 1{,}14] - P[z \le -0{,}47] =$$

$$= P[z \le 1{,}14] - P[z \ge 0{,}47] = P[z \le 1{,}14] - (1 - P[z \le 0{,}47]) =$$

$$= 0{,}8729 - (1 - 0{,}6808) = 0{,}5537$$

b) Si consideramos muestras de tamaño 100, el intervalo característico para la proporción muestral es de la forma:

$$\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{100}},\ p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{100}}\right)$$

Para el 99% $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0{,}99$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 2{,}575$

Así, el intervalo será:

$$\left(\frac{1}{15} - 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{(1/15) \cdot (14/15)}{100}},\ \frac{1}{15} + 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{(1/15) \cdot (14/15)}{100}}\right);$$

es decir: $(0{,}0024;\ 0{,}1309)$

5 **En una localidad de 6 000 habitantes, la proporción de menores de 16 años es de 1 500/6 000.**

a) ¿Cuál es la distribución de la proporción de menores de 16 años en muestras de 50 habitantes de dicha población?

b) Halla la probabilidad de que, en una muestra de 50 habitantes, haya entre 15 y 20 menores de 16 años.

a) La proporción, pr, de menores de 16 años en muestras de tamaño $n = 50$ sigue una distribución normal de media $p = \frac{1500}{6000} = 0{,}25$ y de desviación típica:

$$\sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{50}} = 0{,}061, \text{ es decir, } pr \text{ es } N(0{,}26;\ 0{,}061).$$

b) El número de menores de 16 años en una muestra de 50 es una binomial $B(50;\ 0{,}25)$. Como $np > 5$ y $nq > 5$, podemos aproximar mediante una normal de media $\mu = 50 \cdot 0{,}25 = 12{,}5$ y de desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{50 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} = 3{,}06$$

Así, si x es $B(50;\ 0{,}25) \to x'$ es $N(12{,}5;\ 3{,}06) \to z$ es $N(0,\ 1)$, entonces:

$$P[15 < x < 20] = P[15{,}5 < x' < 19{,}5] = P\left[\frac{15{,}5 - 12{,}5}{3{,}06} < z < \frac{19{,}5 - 12{,}5}{3{,}06}\right] =$$
$$= P[0{,}98 < z < 2{,}29] = P[z < 2{,}29] - P[z < 0{,}98] =$$
$$= 0{,}9890 - 0{,}8365 = 0{,}1525$$

6 **El 42% de los habitantes de un municipio es contrario a la gestión del alcalde y el resto son partidarios de este. Si se toma una muestra de 64 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que ganen los que se oponen al alcalde?**

En muestras de 64, el número de personas que se oponen al alcalde, x, sigue una distribución binomial $B(64,\ 0{,}42)$. Tenemos que calcular $P[x > 32]$.

Como $np > 5$ y $nq > 5$, podemos aproximar mediante una normal de media $\mu = n \cdot p = 64 \cdot 0{,}42 = 26{,}88$ y de desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{64 \cdot 0{,}42 \cdot 0{,}58} = 3{,}95$.
Así, si: x es $B(64,\ 0{,}42) \to x'$ es $N(26{,}88;\ 3{,}95) \to z$ es $N(0,\ 1)$, entonces:

$$P[x > 32] = P[x' \geq 32{,}5] = P\left[z \geq \frac{32{,}5 - 26{,}88}{3{,}95}\right] = P[z \geq 1{,}42] =$$
$$= 1 - P[z < 1{,}42] = 1 - 0{,}9222 = 0{,}0778$$

7 **La probabilidad de que un bebé sea varón es 0,515. Si han nacido 184 bebés, ¿cuál es la probabilidad de que haya 100 varones o más?**

Halla el intervalo característico correspondiente al 95% para la proporción de varones en muestras de 184 bebés.

- El número de varones entre 184 bebés, x, sigue una distribución binomial $B(184;\ 0{,}515)$. Tenemos que calcular $P[x \geq 100]$. Como $np > 5$ y $nq > 5$, podemos aproximar mediante una normal de media $\mu = np = 184 \cdot 0{,}515 = 94{,}76$ y de desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{184 \cdot 0{,}515 \cdot 0{,}485} = 6{,}78$. Así, si:

  x es $B(184;\ 0{,}515) \to x'$ es $N(94{,}76;\ 6{,}78) \to z$ es $N(0,\ 1)$, entonces:

$$P[x \geq 100] = P[x' \geq 99,5] = P\left[z \geq \frac{99,5 - 94,76}{6,78}\right] = P[z \geq 0,70] =$$
$$= 1 - P[z < 0,70] = 1 - 0,7580 = 0,2420$$

- El intervalo característico para la proporción muestral es de la forma:

$$\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}},\ p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

Para el 95% $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0,95$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 1,96$

Así, el intervalo será:

$$\left(0,515 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,515 \cdot 0,485}{184}},\ 0,515 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,515 \cdot 0,485}{184}}\right);$$

es decir: (0,4428; 0,5872)

8 **Se realizó una encuesta a 350 familias preguntando si poseían ordenador en casa, encontrándose que 75 de ellas lo poseían. Estima la proporción real de las familias que disponen de ordenador con un nivel de confianza del 95%.**

La proporción de familias con ordenador en la muestra es $pr = \frac{75}{350} = \frac{3}{14}$

Para el 95% de confianza, $1 - \alpha = 0,95$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 1,96$

El intervalo de confianza para p es:

$$\left(\frac{3}{14} - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{(3/14)(1 - 3/14)}{350}};\ \frac{3}{14} + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{(3/14)(1 - 3/14)}{350}}\right);$$ es decir:

(0,17; 0,26)

9 **Se selecciona aleatoriamente una muestra de 600 personas en una ciudad y se les pregunta si consideran que el tráfico en la misma es aceptablemente fluido. Responden afirmativamente 250 personas.**

¿Cuál es el intervalo de confianza de la proporción de ciudadanos de esa ciudad que consideran aceptable la fluidez del tráfico, con un nivel de confianza del 90%?

La proporción muestral es $pr = \frac{250}{600} = \frac{5}{12} \rightarrow 1 - pr = \frac{7}{12}$

Para un nivel de confianza del 90%, sabemos que $z_{\alpha/2} = 1,645$.

El intervalo de confianza para la proporción de ciudadanos que consideran aceptable la fluidez del tráfico es:

$$\left(pr - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1 - pr)}{n}};\ pr + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1 - pr)}{n}}\right)$$

En este caso queda:

$$\left(\frac{5}{12} - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{\frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12}}{600}}\ ;\ \frac{5}{12} + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{\frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12}}{600}}\right);\ \text{es decir: } (0{,}3836;\ 0{,}4498)$$

10 **Sabemos que al lanzar al suelo 100 chinchetas, en el 95% de los casos, la proporción de ellas que quedan con la punta hacia arriba está en el intervalo (0,1216; 0,2784). Calcula la probabilidad p de que una de esas chinchetas caiga con la punta hacia arriba y comprueba que la amplitud del intervalo dado es correcta.**

- p es el centro del intervalo, es decir:

$$p = \frac{0{,}2784 + 0{,}1216}{2} = 0{,}2 = p$$

- Veamos que la amplitud del intervalo dado es correcta:

Para el 95% $\rightarrow$ $1 - \alpha = 0{,}95$ $\rightarrow$ $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El intervalo característico es:

$$\left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}},\ p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

En este caso ($p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$; $n = 100$; $z_{\alpha/2} = 1{,}96$), queda:

$$\left(0{,}2 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{100}};\ 0{,}2 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{100}}\right);\ \text{es decir:}$$

(0,1216; 0,2784), como queríamos probar.

11 **S** **De 120 alumnos, la proporción de que tengan dos o más hermanos es de 48/120. Indica los parámetros de la distribución a la que se ajustarían las muestras de tamaño 30.**

En muestras de tamaño $n = 30$, la proporción muestral, pr, seguiría una distribución normal de media:

$$\mu = np = 30 \cdot \frac{48}{120} = 30 \cdot 0{,}4 = 12$$

y de desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{30}} = 0{,}089$$

Es decir, pr es $N(12;\ 0{,}089)$.

12 **¿De qué tamaño conviene tomar la muestra de una línea de producción para tener una confianza del 95% de que la proporción estimada no difiere de la verdadera en más de un 4%? Se sabe, por estudios previos, que la proporción de objetos defectuosos es del orden del 0,05.**

Para el 95% de confianza, $1 - \alpha = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

El error máximo admisible es:

$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{pr(1-pr)}{n}}$. Buscamos n para que $E \leq 0,04$ (no más de un 4%):

$$1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,05(1-0,05)}{n}} \leq 0,04 \rightarrow n \geq 114,05$$

El tamaño mínimo de la muestra ha de ser $n = 115$.

13 **Se desea estimar la proporción, p, de individuos daltónicos de una población a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de individuos, de tamaño n.**

a) Si el porcentaje de individuos daltónicos en la muestra es igual al 30%, calcula el valor de n para que, con un nivel de confianza de 0,95, el error cometido en la estimación sea inferior al 3,1%.

b) Si el tamaño de la muestra es de 64 individuos, y el porcentaje de individuos daltónicos en la muestra es del 35%, determina, usando un nivel de significación del 1%, el correspondiente intervalo de confianza para la proporción de daltónicos de la población.

a) Para un nivel de confianza del 95%, $1 - \alpha = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

El error máximo admisible es:

$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{pr(1-pr)}{n}}$. Buscamos n para que $E < 0,031$ (inferior al 3,1%):

$$1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{n}} < 0,031 \rightarrow n > 839,48$$

La muestra ha de ser, como mínimo, de 840 individuos.

b) Para un nivel de significación del 1%, tenemos que:

$$\alpha = 0,01 \rightarrow 1 - \alpha = 0,99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$$

El intervalo de confianza para p será:

$$\left(0,35 - 2,575 \cdot \sqrt{\frac{0,35 \cdot 0,65}{64}};\ 0,35 + 2,575 \cdot \sqrt{\frac{0,35 \cdot 0,65}{64}}\right);$$ es decir:

$(0,196;\ 0,504)$

14 **En una muestra de 100 rótulos publicitarios se observa que aparecen 6 defectuosos.**

a) Estima la proporción real de rótulos defectuosos, con un nivel de confianza del 99%.

b) ¿Cuál es el error máximo cometido al hacer la estimación anterior?

c) ¿De qué tamaño tendríamos que coger la muestra, con un nivel de confianza del 99%, para obtener un error inferior a 0,05?

a) La proporción muestral es $pr = \frac{6}{100} = 0{,}06 \rightarrow 1 - pr = 0{,}94$

Para un nivel de confianza del 99%, sabemos que $z_{\alpha/2} = 2{,}575$.

El intervalo de confianza para estimar la proporción real de rótulos defectuosos es:

$$\left(pr - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr\,(1-pr)}{n}}\,;\, pr + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr\,(1-pr)}{n}}\right)$$

En este caso queda:

$$\left(0{,}06 - 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}06 \cdot 0{,}94}{100}}\,;\, 0{,}06 + 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}06 \cdot 0{,}94}{100}}\right) \text{es decir: } (0;\ 0{,}12)$$

b) $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr\,(1-pr)}{n}} = 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}06 \cdot 0{,}94}{100}} \simeq 0{,}06$

c) En la expresión del error, sabemos que:

$E = 0{,}05$

$z_{\alpha/2} = 2{,}575$ (para un nivel de confianza del 99%)

$pr = 0{,}06; \quad 1 - pr = 0{,}94$

Por tanto:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr\,(1-pr)}{n}} \rightarrow 0{,}05 = 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}06 \cdot 0{,}94}{n}} \rightarrow n \simeq 149{,}58$$

Habrá que tomar una muestra de, al menos, 150 rótulos.

15 Tomada al azar una muestra de 60 estudiantes de una universidad, se encontró que un tercio hablaban el idioma inglés.

a) Halla, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo para estimar la proporción de estudiantes que hablan el idioma inglés entre los estudiantes de esa universidad.

b) A la vista del resultado anterior se pretende repetir la experiencia para conseguir una cota de error de 0,01 con el mismo nivel de confianza del 90%. ¿Cuántos individuos ha de tener la muestra?

La proporción muestral es $pr = \frac{1}{3} \rightarrow 1 - pr = \frac{2}{3}$

Para un nivel de confianza del 90%, sabemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}645$.

a) El intervalo de confianza para estimar la proporción en la población es:

$$\left(pr - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr\,(1-pr)}{n}}\,;\; pr + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr\,(1-pr)}{n}}\right)$$

En este caso queda:

$$\left(\frac{1}{3} - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{60}}\,;\; \frac{1}{3} + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{60}}\right);$$ es decir: (0,2332; 0,4334)

b) En la expresión del error, sabemos que:

$E = 0{,}01$

$z_{\alpha/2} = 1{,}645$ (para un nivel de confianza del 90%)

$pr = \frac{1}{3}$; $1 - pr = \frac{2}{3}$

Por tanto:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr\,(1-pr)}{n}} \to 0{,}01 = 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{60}} \to n \simeq 6\,013{,}4$$

Habrá que tomar una muestra de, al menos, 6 014 individuos.

16 Para estimar la proporción de habitantes de una determinada ciudad que poseen ordenador personal, se quiere utilizar una muestra aleatoria de tamaño *n*. Calcula el valor mínimo de *n* para garantizar que, con un nivel de confianza del 95%, el error en la estimación no sea superior al 2%.

Como se desconoce la proporción, se tiene que tomar el caso más desfavorable, que será 0,5.

En la expresión del error, sabemos que:

$E = 0{,}02$ (error no superior al 2%)

$z_{\alpha/2} = 1{,}96$ (nivel de confianza del 95%)

$pr = 0{,}5$; $1 - pr = 0{,}5$ (al desconocer la proporción, debemos tomar el caso más desfavorable, que es 0,5).

Por tanto:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr\,(1-pr)}{n}} \to 0{,}02 = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{60}} \to n \simeq 2401$$

Habrá que tomar una muestra de, al menos, 2401 individuos.

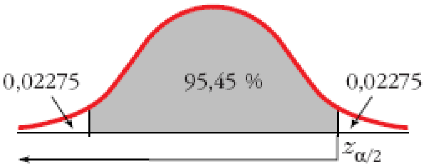
17 En una encuesta realizada a 800 personas elegidas al azar del censo electoral, 240 declaran su intención de votar al partido *A*.

a) Estima, con un nivel de confianza del 95,45%, entre qué valores se encuentra la intención de voto al susodicho partido en todo el censo.

b) Discute, razonadamente, el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento, o la disminución, del nivel de confianza.

La proporción muestral es $pr = \dfrac{240}{800} = 0{,}3 \rightarrow 1 - pr = 0{,}7$

a) Para un nivel de confianza del 95,45%, hallamos $z_{\alpha/2}$:



$0{,}02275 + 0{,}9545 = 0{,}97725 \rightarrow P[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}97725 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{\alpha/2} = 2$

El intervalo de confianza para estimar la proporción en la población es:

$$\left(pr - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr\,(1-pr)}{n}}\,;\ pr + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr\,(1-pr)}{n}}\right)$$; en este caso queda:

$$\left(0{,}3 - 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{800}}\,;\ 0{,}3 + 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{800}}\right)$$; es decir: (0,2676; 0,3324)

La proporción de votantes del partido A en la población se encuentra, con un nivel de confianza del 95,45%, entre el 26,76% y el 33,24%.

b) Si aumenta el nivel de confianza, mayor es la amplitud del intervalo; es decir, cuanto más seguros queramos estar de nuestra estimación, mayor será el error máximo admisible.

Si disminuye el nivel de confianza, disminuye la amplitud del intervalo.

18 Una reciente encuesta, realizada en un cierto país sobre una muestra aleatoria de 800 personas, arroja el dato de que 300 de ellas son analfabetas. Para estimar la proporción de analfabetos del país hemos obtenido el siguiente intervalo de confianza: (0,3414; 0,4086)

¿Cuál es el nivel de confianza con el que se ha hecho la estimación?

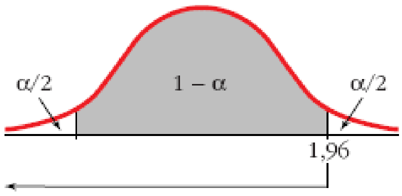
La proporción muestral es $pr = \dfrac{300}{800} = \dfrac{3}{8} \rightarrow 1 - pr = \dfrac{5}{8}$

El error máximo admisible es la semiamplitud del intervalo de confianza; es decir:

$$E = \frac{0{,}4086 - 0{,}3414}{2} = 0{,}0336$$

Por tanto:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr\,(1 - pr)}{n}} \;\to\; 0{,}0336 = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{(3/8) \cdot (5/8)}{800}} \;\to\; z_{\alpha/2} = 1{,}96$$



$$P[z \le 1{,}96] = 0{,}9750$$

$$\frac{\alpha}{2} = P[z > 1{,}96] = 1 - 0{,}9750 = 0{,}025$$

$$\alpha = 0{,}025 \cdot 2 = 0{,}05 \;\to\; 1 - \alpha = 0{,}95$$

El nivel de confianza es del 95%.

19 **A partir de una muestra de tamaño 400 se estima la proporción de individuos que leen el periódico en una gran ciudad. Se obtiene una cota de error de 0,0392 con un nivel de confianza del 95%.**

a) ¿Podríamos, con la misma muestra, mejorar el nivel de confianza en la estimación? ¿Qué le ocurriría a la cota de error?

b) ¿Sabrías calcular la proporción, pr, obtenida en la muestra?

a) Aumentando la cota de error mejoraría el nivel de confianza.

b) La cota de error es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1 - pr)}{n}}$$

Como $E = 0{,}0392$; $n = 400$ y $1 - \alpha = 0{,}95 \;\to\; z_{\alpha/2} = 1{,}96$, tenemos que:

$$0{,}0392 = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{pr(1 - pr)}{400}} \;\to\; \frac{0{,}0392}{1{,}96} = \sqrt{\frac{pr(1 - pr)}{400}} \;\to$$

$$\to\; 0{,}02 = \sqrt{\frac{pr(1 - pr)}{400}} \;\to\; 0{,}0004 = \frac{pr(1 - pr)}{400} \;\to\; 0{,}16 = pr(1 - pr)$$

$$0{,}16 = pr - pr^2 \;\to\; pr^2 - pr + 0{,}16 = 0$$

$$pr = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 0{,}64}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{0{,}36}}{2} = \frac{1 \pm 0{,}6}{2} \begin{cases} pr = 0{,}8 \\ pr = 0{,}2 \end{cases}$$

Podría ser $pr = 0{,}8$ o bien $pr = 0{,}2$. Con los datos que tenemos, no podemos decidir cuál de estos dos resultados es el válido.

UNIDAD DIDÁCTICA 14:
INFERENCIA ESTADÍSTICA. CONTRASTE DE HIPÓTESIS

* Las numeraciones indicadas entre páginas se refieren a las páginas del libro de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II, de segundo de bachillerato de la editorial Anaya, Andalucía, cuyos autores son J. Colera, R. García y M.J.Oliveira

Página 322

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

CONTRASTE DE HIPÓTESIS PARA LA MEDIA

1 **Realiza en cada caso el contraste de hipótesis con las condiciones que se dan a continuación (en todos los casos suponemos que la población de partida es normal):**

	H_0	σ	α	n	$\bar{x}$
a)	$\mu = 12$	$\sigma = 1{,}5$	$\alpha = 0{,}01$	10	11
b)	$\mu = 1{,}45$	$\sigma = 0{,}24$	$\alpha = 0{,}05$	16	1,6
c)	$\mu \le 11$	$\sigma = 4{,}6$	$\alpha = 0{,}05$	100	12
d)	$\mu \ge 15$	$\sigma = 1$	$\alpha = 0{,}1$	150	14,5

a) **1^er^ paso: Hipótesis:** $\begin{cases} \text{Hipótesis nula: } H_0\text{: } \mu = 12 \\ \text{Hipótesis alternativa: } H_1\text{: } \mu \neq 12 \end{cases}$

2º paso: Zona de aceptación: $\left(\mu_0 - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \mu_0 + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$

Sabemos que $\mu_0 = 12$, $\sigma_0 = 1{,}5$; $n = 10$; $z_{\alpha/2} = 2{,}575$

Por tanto, la zona de aceptación es el intervalo:

$\left(12 - 2{,}575 \cdot \frac{1{,}5}{\sqrt{10}}, 12 + 2{,}575 \cdot \frac{1{,}5}{\sqrt{10}}\right)$; es decir: (10,78; 13,22)

3^er^ paso: Verificación: $\bar{x} = 11$

4º paso: Decisión: Como $\bar{x}$ queda dentro de la zona de aceptación, aceptamos H_0.

b) **1er paso: Hipótesis:** Hipótesis nula: H_0: $\mu = 1{,}45$
Hipótesis alternativa: H_1: $\mu \neq 1{,}45$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(\mu_0 - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \mu_0 + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right).$$ En este caso es:

$$\left(1{,}45 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}24}{\sqrt{16}},\ 1{,}45 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}24}{\sqrt{16}}\right);$$ es decir: $(1{,}33;\ 1{,}57)$

3er paso: Verificación: $\bar{x} = 1{,}6$

4º paso: Decisión: Como $\bar{x}$ queda fuera de la zona de aceptación, rechazamos H_0.

c) **1er paso: Hipótesis:** Hipótesis nula: H_0: $\mu \leq 11$
Hipótesis alternativa: H_1: $\mu > 11$

2º paso: Zona de aceptación:

$\left(-\infty,\ \mu_0 + z_\alpha \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$, en este caso es: $\left(-\infty;\ 11 + 1{,}645 \cdot \frac{4{,}6}{\sqrt{100}}\right)$; es decir: $(-\infty;\ 11{,}76)$

3er paso: Verificación: $\bar{x} = 12$

4º paso: Decisión: Como $\bar{x}$ queda fuera de la zona de aceptación, rechazamos H_0.

d) **1er paso: Hipótesis:** Hipótesis nula: H_0: $\mu \geq 15$
Hipótesis alternativa: H_1: $\mu < 15$

2º paso: Zona de aceptación:

$\left(\mu_0 - z_\alpha \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ +\infty\right)$; en este caso es: $\left(15 - 1{,}28 \cdot \frac{1}{\sqrt{150}},\ +\infty\right)$; es decir: $(14{,}895;\ +\infty)$

3er paso: Verificación: $\bar{x} = 14{,}5$

4º paso: Decisión: Como $\bar{x}$ queda fuera de la zona de aceptación, rechazamos H_0.

2 S **Un fabricante de lámparas eléctricas está ensayando un nuevo método de producción que se considerará aceptable si las lámparas obtenidas por este método dan lugar a una población normal de duración media 2 400 horas, con una desviación típica igual a 300.**

Se toma una muestra de 100 lámparas producidas por este método y esta muestra da una duración media de 2 320 horas. ¿Se puede aceptar la hipótesis de validez del nuevo proceso de fabricación con un riesgo igual o menor al 5%?

1^er^ paso: Hipótesis: Tenemos que contrastar:

H_0: $\mu = 2400$ frente a H_1: $\mu \neq 2400$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(\mu_0 - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \mu_0 + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

Conocemos los siguientes datos:

$\mu_0 = 2400$; $\sigma_0 = 300$; $n = 100$

$\alpha = 0{,}05 \quad \rightarrow \quad z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Por tanto, la zona de aceptación será:

$$\left(2400 - 1{,}96 \cdot \frac{300}{\sqrt{100}};\ 2400 + 1{,}96 \cdot \frac{300}{\sqrt{100}}\right);$$ es decir, el intervalo:

$(2341{,}2;\ 2458{,}8)$

3^er^ paso: Verificación:

Hemos obtenido una media muestral de $\bar{x} = 2320$.

4º paso: Decisión:

Como $\bar{x} = 2320$ no cae dentro de la zona de aceptación, rechazamos H_0, es decir, no podemos aceptar la validez del nuevo proceso de fabricación.

3 S **Se sabe por experiencia que el tiempo obtenido por los participantes olímpicos de la prueba de 100 metros, en la modalidad de decathlon, es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con media 12 segundos y desviación típica 1,5 segundos. Para contrastar, con un nivel de significación del 5%, si no ha variado el tiempo medio en la última Olimpiada, se extrajo una muestra aleatoria de 10 participantes y se anotó el tiempo obtenido por cada uno, con los resultados siguientes, en segundos:**

13 12 11 10 11 11 9 10 12 11

a) ¿Cuáles son la hipótesis nula y la alternativa del contraste?

b) Determina la región crítica.

c) Realiza el contraste.

a) Tenemos que contrastar la hipótesis nula:

H_0: $\mu = 12$

frente a la hipótesis alternativa:

H_1: $\mu \neq 12$

b) La zona de aceptación es el intervalo:

$$\left(\mu_0 - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \mu_0 + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

Como $\mu_0 = 12$; $\sigma = 1{,}5$; $n = 10$;

$\alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$; tenemos que la zona de aceptación es el intervalo:

$$\left(12 - 1{,}96 \cdot \frac{1{,}5}{\sqrt{10}};\ 12 + 1{,}96 \cdot \frac{1{,}5}{\sqrt{10}}\right);\ \text{es decir, } (11{,}07;\ 12{,}93)$$

c) Calculamos la media de la muestra:

$$\bar{x} = \frac{13 + 12 + 11 + \ldots + 11}{10} = \frac{110}{10} = 11$$

Como no está dentro del intervalo de aceptación, rechazamos H_0, es decir, no podemos aceptar que la media siga siendo la misma.

4 **S** **Se ha comprobado que el tiempo de espera (en minutos) hasta ser atendido, en cierto servicio de urgencias, sigue un modelo normal de probabilidad. A partir de una muestra de 100 personas que fueron atendidas en dicho servicio, se ha calculado un tiempo medio de espera de 14,25 minutos y una desviación típica de 2,5 minutos.**

a) ¿Podríamos afirmar, con un nivel de significación del 5% ($\alpha = 0{,}05$), que el tiempo medio de espera, en ese servicio de urgencias, no es de 15 minutos?

b) ¿Qué podríamos concluir si el nivel de significación hubiese sido del 0,1% ($\alpha = 0{,}001$)?

c) ¿Existe contradicción en ambas situaciones?

Justifica las respuestas.

a) **1er paso: Hipótesis:** Tenemos que contrastar:

H_0: $\mu = 15$ frente a H_1: $\mu \neq 15$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(\mu_0 - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \mu_0 + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

Como $\mu_0 = 15$; $\sigma = 2{,}5$; $n = 100$;

$\alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$; tenemos que la zona de aceptación es:

$$\left(15 - 1{,}96 \cdot \frac{2{,}5}{\sqrt{100}};\ 15 + 1{,}96 \cdot \frac{2{,}5}{\sqrt{100}}\right);\ \text{es decir, el intervalo } (14{,}51;\ 15{,}49)$$

3er paso: Verificación:

Hemos obtenido una media muestral de $\bar{x} = 14{,}25$.

4º paso: Decisión:

Como la media muestral está fuera de la zona de aceptación, rechazamos H_0, es decir, no podemos aceptar que el tiempo medio sea de 15 minutos.

b) Si $\alpha = 0{,}001$, entonces $z_{\alpha/2} = 3{,}27$, y la zona de aceptación sería:

$$\left(15 - 3{,}27 \cdot \frac{2{,}5}{\sqrt{100}};\ 15 + 3{,}27 \cdot \frac{2{,}5}{\sqrt{100}}\right);\ \text{es decir, el intervalo } (14{,}18;\ 15{,}82)$$

Por tanto, como $\bar{x} = 14{,}25$ sí está en el intervalo de aceptación, no podríamos rechazar H_0, es decir, aceptaríamos que el tiempo medio es de 15 minutos.

c) No existe contradicción. En el apartado b) el riesgo que estamos asumiendo es muy pequeño, mucho menor que en el caso a), por tanto, el intervalo es más amplio.

5 S **La duración de las bombillas de 100 vatios que fabrica una empresa sigue una distribución normal con una desviación típica de 120 horas. Su vida media está garantizada durante un mínimo de 800 horas.**

Se escoge al azar una muestra de 50 bombillas de un lote y, después de comprobarlas, se obtiene una vida media de 750 horas. Con un nivel de significación de 0,01, ¿habría que rechazar el lote por no cumplir la garantía?

1er paso: Hipótesis: Queremos contrastar:

$$H_0: \mu \geq 800 \ \text{ frente a } \ H_1: \mu < 800$$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(\mu_0 - z_\alpha \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}};\ +\infty\right)$$

Para $\alpha = 0{,}01 \rightarrow z_\alpha = 2{,}33$. Como $\mu_0 = 800$; $\sigma_0 = 120$ y $n = 50$, la zona de aceptación será:

$$\left(800 - 2{,}33 \cdot \frac{120}{\sqrt{50}};\ +\infty\right);\ \text{es decir, el intervalo } (760{,}46;\ +\infty)$$

3er paso: Verificación:

Hemos obtenido una media muestral de $\bar{x} = 750$ horas.

4º paso: Decisión:

Como la media muestral no está dentro de la zona de aceptación, rechazamos H_0, es decir, habría que rechazar el lote por no cumplir la garantía.

6 **Una empresa asegura que unas determinadas pastillas de jabón duran más de 11 días. Para comprobarlo, se realiza una encuesta en 100 casos. Estas son las respuestas:**

DURACIÓN (días)	5 a 9	10 a 14	15 a 19	20 a 24
RESPUESTAS	24	46	19	11

¿Se puede dar como válida la afirmación de la empresa, para un nivel de significación de $\alpha = 0{,}05$?

Calculamos la media muestral y la desviación típica:

DURACIÓN (días)	5 a 9	10 a 14	15 a 19	20 a 24
x_i	7	12	17	22
f_i	24	46	19	11

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{n} = \frac{1\,285}{100} = 12{,}85 \text{ días}; \quad s = 4{,}59$$

1^er^ paso: Hipótesis: Queremos contrastar: $H_0: \mu \le 11$ frente a $H_1: \mu > 11$

2º paso: Zona de aceptación: $\left(-\infty; \mu_0 - z_\alpha \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$

Para $\alpha = 0{,}05 \rightarrow z_\alpha = 1{,}645$. Como $\mu_0 = 11$; $\sigma_0 = 4{,}59$ y $n = 100$, la zona de aceptación es:

$$\left(-\infty; 11 + 1{,}645 \cdot \frac{4{,}59}{\sqrt{100}}\right); \text{ es decir, el intervalo } (-\infty; 11{,}76)$$

3^er^ paso: Verificación: La media muestral obtenida es $\bar{x} = 12{,}85$ días.

4º paso: Decisión:

Como $\bar{x} = 12{,}85$ está fuera de la zona de aceptación, rechazamos H_0, es decir, aceptamos que las pastillas de jabón duran más de 11 días.

7 S **Una encuesta, realizada a 64 empleados de una fábrica, concluyó que el tiempo medio de duración de un empleo en la misma era de 6,5 años, con una desviación típica de 4.**

¿Sirve esta información para aceptar, con un nivel de significación del 5%, que el tiempo medio de empleo en esa fábrica es menor o igual que 6? Justifica adecuadamente la respuesta.

1^er^ paso: Hipótesis: Tenemos que contrastar:

$$H_0: \mu \le 6 \text{ frente a } H_1: \mu > 6$$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(-\infty; \mu_0 - z_\alpha \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

Para un nivel de significación del 5%, tenemos que $z_\alpha = 1{,}645$. Por tanto, el intervalo es:

$$\left(-\infty; 6 + 1{,}645 \cdot \frac{4}{\sqrt{64}}\right); \text{ es decir, } (-\infty; 6{,}8225)$$

3er paso: Verificación: La media muestral obtenida es $\bar{x} = 6{,}5$ años.

4º paso: Decisión:

Como la media muestral pertenece al intervalo de aceptación, no podemos rechazar H_0, es decir, aceptamos que el tiempo medio es menor o igual que 6 años.

8 S **La Concejalía de Juventud de un Ayuntamiento maneja el dato de que la edad a la que los hijos se independizan de sus padres es una variable normal con media 29 años y desviación típica 3 años. Aunque la desviación típica no plantea dudas, sí se sospecha que la media ha descendido, sobre todo por la política de ayuda al empleo que ha llevado a cabo el Ayuntamiento. Así, de un estudio reciente sobre 100 jóvenes que se acaban de independizar, se ha obtenido una media de 28,1 años de edad.**

a) Con un nivel de significación del 1%, ¿puede defenderse que la edad media no ha disminuido, frente a que sí lo ha hecho como parecen indicar los datos? Plantea el contraste o test de hipótesis y resuélvelo.

b) Explica, en el contexto del problema, en qué consisten cada uno de los errores del tipo I y II.

a) **1er paso: Hipótesis:** Tenemos que contrastar: H_0: $\mu \geq 29$ frente a H_1: $\mu < 29$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(\mu_0 - z_\alpha \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, +\infty\right)$$

Para un nivel de significación de $\alpha = 0{,}01$, tenemos que $z_\alpha = 2{,}33$. Así, el intervalo es:

$$\left(29 - 2{,}33 \cdot \frac{3}{\sqrt{100}}; +\infty\right); \text{ es decir, } (28{,}301; +\infty)$$

3er paso: Verificación: La media muestral obtenida es $\bar{x} = 28{,}1$ años.

4º paso: Decisión:

Como la media muestral está fuera del intervalo de aceptación, rechazamos H_0, es decir, aceptamos que la media de edad ha disminuido.

b) • El error de tipo I consiste en rechazar H_0 siendo verdadera. En el contexto de este problema sería aceptar que la media ha disminuido, siendo falso.

• El error de tipo II consiste en aceptar H_0 siendo falsa. En este problema sería aceptar que la media no ha disminuido, siendo falso.

CONTRASTE DE HIPÓTESIS PARA LA PROPORCIÓN

9 **Realiza en cada caso el test de hipótesis con las condiciones que se indican:**

	H_0	α	n	pr
a)	$p = 0{,}5$	0,01	1 000	0,508
b)	$p \leq 0{,}6$	0,05	600	0,61
c)	$p \geq 0{,}3$	0,1	200	0,25

a) **1er paso: Hipótesis:** $\begin{cases} \text{Hipótesis nula: } H_0\text{: } p = 0{,}5 \\ \text{Hipótesis alternativa: } H_1\text{: } p \neq 0{,}5 \end{cases}$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(p_0 - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}\,;\; p_0 + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}\right).$$ En este caso es:

$$\left(0{,}5 - 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{1000}}\,;\, 0{,}5 + 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{1000}}\right);$$ es decir: $(0{,}459;\ 0{,}541)$

3er paso: Verificación: $pr = 0{,}508$

4º paso: Decisión: Como pr está dentro de la zona de aceptación, aceptamos H_0.

b) **1er paso: Hipótesis:** $\begin{cases} \text{Hipótesis nula: } H_0\text{: } p \leq 0{,}6 \\ \text{Hipótesis alternativa: } H_1\text{: } p > 0{,}6 \end{cases}$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(-\infty;\ p_0 + z_{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}\right).$$ En este caso es: $$\left(-\infty;\ 0{,}6 + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{600}}\right)$$

Es decir: $(-\infty;\ 0{,}6329)$

3er paso: Verificación: $pr = 0{,}61$

4º paso: Decisión: Como pr está dentro de la zona de aceptación, aceptamos H_0.

c) **1er paso: Hipótesis:** $\begin{cases} \text{Hipótesis nula: } H_0\text{: } p \geq 0{,}3 \\ \text{Hipótesis alternativa: } H_1\text{: } p < 0{,}3 \end{cases}$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(p_0 - z_{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}},\ +\infty\right).$$ En este caso queda: $$\left(0{,}3 - 1{,}28 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{200}},\ +\infty\right)$$

es decir: $(0{,}259;\ +\infty)$

3er paso: Verificación: $pr = 0{,}25$.

4º paso: Decisión: Como pr está fuera del intervalo de aceptación, rechazamos H_0.

10 **Un dentista afirma que el 40% de los niños de 10 años presentan indicios de caries dental. Tomada una muestra de 100 niños, se observó que 30 presentaban indicios de caries.**

Utilizando la aproximación normal, comprueba, a un nivel de significación del 5%, si el resultado proporciona evidencia que permita rechazar la afirmación del dentista.

1^er^ paso: Hipótesis: Tenemos que contrastar:

$H_0: p = 0{,}4$ frente a $H_1: p \neq 0{,}4$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(p_0 - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}};\ p_0 + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}\right)$$

Para un nivel de significación $\alpha = 0{,}05$ tenemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. El intervalo será:

$$\left(0{,}4 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{100}};\ 0{,}4 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{100}}\right);\ \text{es decir, } (0{,}304;\ 0{,}496)$$

3^er^ paso: Verificación:

La proporción obtenida en la muestra es $pr = \frac{30}{100} = 0{,}3$.

4º paso: Decisión:

Como la proporción muestral queda fuera de la zona de aceptación, rechazamos H_0, es decir, rechazamos la afirmación del dentista.

11 **Una empresa de productos farmacéuticos afirma en su publicidad que uno de sus medicamentos reduce considerablemente los síntomas de la alergia primaveral en el 90% de la población.**

Una asociación de consumidores ha experimentado dicho fármaco en una muestra de 200 socios de la misma, obteniendo el resultado indicado en la publicidad en 170 personas.

Determina si la asociación de consumidores puede considerar que la afirmación de la empresa es estadísticamente correcta al nivel de significación de 0,05.

1^er^ paso: Hipótesis: Tenemos que contrastar:

$H_0: p = 0{,}9$ frente a $H_1: p \neq 0{,}9$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(p_0 - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}};\ p_0 + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}\right)$$

Para un nivel de significación $\alpha = 0{,}05$, tenemos que $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. El intervalo será:

$$\left(0{,}9 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}9 \cdot 0{,}1}{200}};\ 0{,}9 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}9 \cdot 0{,}1}{200}}\right);\ \text{es decir, } (0{,}858;\ 0{,}942)$$

3^er^ paso: Verificación:

La proporción obtenida en la muestra es $pr = \frac{170}{200} = 0{,}85$.

4º paso: Decisión:

Como la proporción muestral está fuera del intervalo de aceptación, rechazamos H_0, es decir, no podemos considerar válida la afirmación de la empresa.

12 S **Se afirma que, en una determinada ciudad, al menos el 30% de las familias poseen ordenador. Se toma una muestra aleatoria de 200 familias de la ciudad y resulta que 50 poseen ordenador.**

A un nivel de significación de 0,05, ¿hay suficiente evidencia para refutar la afirmación?

1^er^ paso: Hipótesis: Queremos contrastar:

$$H_0: p \geq 0{,}3 \text{ frente a } H_1: p < 0{,}3$$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(p_0 - z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}};\ +\infty\right)$$

Para un nivel de significación $\alpha = 0{,}05$ tenemos que $z_\alpha = 1{,}645$. Por tanto, el intervalo será:

$$\left(0{,}3 - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{200}};\ +\infty\right); \text{ es decir, } (0{,}247;\ +\infty)$$

3^er^ paso: Verificación:

La proporción obtenida en la muestra es $pr = \frac{50}{200} = 0{,}25$.

4º paso: Decisión:

Como la proporción muestral está dentro del intervalo de aceptación, no podemos rechazar H_0, es decir, aceptamos que, al menos, el 30% de las familias poseen ordenador.

13 S **El 42% de los escolares de un cierto país suelen perder al menos un día de clase a causa de gripes y catarros. Sin embargo, un estudio sobre 1 000 escolares revela que en el último curso hubo 450 en tales circunstancias.**

Las autoridades sanitarias defienden que el porcentaje del 42% para toda la población de escolares se ha mantenido.

a) Contrasta, con un nivel de significación del 5%, la hipótesis defendida por las autoridades sanitarias, frente a que el porcentaje ha aumentado como parecen indicar los datos, explicando claramente a qué conclusión se llega.

b) ¿Cómo se llama la probabilidad de concluir erróneamente que el tanto por ciento se ha mantenido?

a) **1^er^ paso: Hipótesis:** Queremos contrastar:

$$H_0: p \leq 0{,}42 \text{ frente a } H_1: p > 0{,}42$$

2º paso: Zona de aceptación:

$$\left(-\infty; p_0 + z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}\right)$$

Para un nivel de significación del 5%, tenemos que $z_\alpha = 1{,}645$. Por tanto, el intervalo será:

$$\left(-\infty; 0{,}42 + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}42 \cdot 0{,}58}{1\,000}}\right);\ \text{es decir, } (-\infty; 0{,}446)$$

3^er^ paso: Verificación:

La proporción obtenida en la muestra es $pr = \frac{450}{1\,000} = 0{,}45$.

4º paso: Decisión:

Como la proporción muestral está fuera de la zona de aceptación, rechazamos H_0, es decir, aceptamos que la proporción ha aumentado.

b) La probabilidad de concluir erróneamente que el tanto por ciento se ha mantenido, es decir, de aceptar H_0, siendo falsa, es la probabilidad de cometer un error de tipo II.