EJERCICIOS CAPÍTULO 2 (tema 8 del solucionario santillana – pág 454)

001 Halla la tasa de variación media de las funciones: $f(x) = x^2 + 1$ $g(x) = x^3 + 7$ en los intervalos $[0, 1]$ y $[-2, -1]$.

002 El espacio, en metros, que recorre un móvil en función del tiempo, en segundos, viene descrito por la fórmula $e = \frac{1}{3}t^2 + t$. Halla su velocidad media en $[1, 5]$.

---

005 Halla la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 6x^2 + 1$ en $x = 1$.

006 ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3$ en $x = 1$?

007 Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3$ en el punto $P(-1, 4)$.
¿Cuál es la ecuación de la recta normal?

---

020 Halla la derivada de la siguiente función.

$$f(x) = \left(\frac{x-2}{x^5}\right)^4$$

021 Halla la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 5\ln x + e^{4x}$ b) $f(x) = \log_3(-6x^2 \ln x)$

022 Obtén la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = e^x \log_4 x^5$ b) $f(x) = \ln(3x^2 - x)^{-7}$

023 Decide de qué tipo son las siguientes funciones, y halla la derivada de cada una de ellas.

a) $f(x) = \cos(\operatorname{sen} 2x)$ c) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x^3 + 2}$

b) $f(x) = \operatorname{sen}(\ln 2x)$ d) $f(x) = \operatorname{tg}(x^4 + 3x)$

024 Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = \cos\sqrt{x^2 + x}$ c) $f(x) = \operatorname{tg}\frac{1+x}{1-x}$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x^2 + 3\cos^2 x$ d) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}$

025 Calcula la derivada de las siguientes funciones utilizando la derivación logarítmica.

a) $f(x) = (x^2 - 4x + 3)^{\operatorname{sen} x}$ b) $f(x) = x^{8x + \cos x}$

038 Calcule la recta tangente a la curva $f(x) = \ln x^2$ en el punto $x = 2$.

(Murcia. Septiembre 2006. Bloque 3. Cuestión B)

039 Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{-2}{x}$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Demuestra que esa recta solo corta a la gráfica en el punto de tangencia.

040 Halla el punto de la curva $y = \sqrt{x}$ en el que la recta tangente es paralela a la recta $y = \frac{1}{2}x$.

041 Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde $m > 0$ es una constante.

a) Para cada valor de m hallar el valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas.

b) Hallar el valor de m para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de f.

(Madrid. Junio 2007. Opción A. Ejercicio 4)

042 Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = (x + 1)e^{-x}$ en el punto de corte de $f(x)$ con el eje X.

(Galicia. Junio 2006. Bloque 3. Opción 1)

043 Dada la función $f(x) = 9x + 6x^2 - x^4$, halla los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ tiene pendiente 1.

(Castilla-La Mancha. Junio 2007. Bloque 1. Pregunta B)

046 Halla las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $y = \ln x$ en el punto de abscisa $x = 1$.

047 Diga para qué valor de x la recta tangente a la curva $y = \ln(x^2 + 1)$ es paralela a la recta $y = x$.

Escriba la ecuación de esta tangente.

(Cataluña. Año 2008. Serie 5. Cuestión 3)

049 Sea $f(x) = x + xe^{-x}$.

Calcular la ecuación de la recta tangente a f en un punto x para el cual dicha recta tangente sea paralela a la recta que pasa por los puntos (1, 1) y (3, 3).

(País Vasco. Junio 2006. Bloque C. Problema C)

050 Determina las abscisas de los puntos de la curva $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$ cuya recta tangente forma un ángulo de 135° con el sentido positivo del eje de abscisas.

(Galicia. Septiembre 2004. Bloque 3. Pregunta 1)

051 Calcúlense las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ en el punto $x = 0$.

(Castilla y León. Septiembre 2006. Prueba B. Cuestión 3)

052 Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal (recta perpendicular a la tangente) en el punto de abscisa 0, a la gráfica de la función f dada por:

$$f(x) = 2xe^x + \frac{x^3 - 2}{x^2 + 4}$$

(Castilla-La Mancha. Junio 2003. Bloque 4. Pregunta A)

053 Halla las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $g(x) = |x^2 - 9|$ en el punto de abscisa $x = 2$.

059 ¿Para qué valor de a la recta $ax + y = \ln 2$ es tangente a la curva $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$ en el punto de abscisa $x = 0$?

(Canarias. Septiembre 2006. Opción B. Cuestión 1)

060 Determinar el valor de a para que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 + ax$ en el punto $x = 0$ sea perpendicular a la recta $y + x = -3$.

(Castilla y León. Junio 2008. Prueba A. Cuestión 2)

066 De la función $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{x}$$

se sabe que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ viene dada por $y = -2$.

Calcula a y b.

(Andalucía. Año 2005. Modelo 5. Opción B. Ejercicio 1)

Ejercicios del tema 9 del solucionario (a partir de la página 506)

001 Decide dónde crecen y decrecen estas funciones.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$

b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

003 Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y calcula los máximos y mínimos de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

b) $g(x) = \dfrac{x}{x^3 + 1}$

007 Decide dónde son cóncavas y dónde son convexas estas funciones.

a) $f(x) = 7x^3 - x^2 - x + 2$

b) $g(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$

013 Si el número de visitantes a un museo se obtiene mediante $f(x) = \dfrac{300x}{x^3 + 2}$, siendo x la hora desde su apertura, ¿cuándo recibe mayor número de visitantes?

---

016 Halla dos números reales positivos, sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

017 De todos los prismas rectos de base cuadrada y tales que el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, halla las dimensiones del que tiene volumen máximo.

020 Un jardinero dispone de 160 metros de alambre que va a utilizar para cercar una zona rectangular y dividirla en tres partes, colocando las alambradas de las divisiones paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener la zona cercada para que el área sea la mayor posible?

---

027 Calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{4x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - x}{\sqrt{x + 9} - 3}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{\ln x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } x}{x}$

028 Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x^5 - 4x^2}{-x^2 + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x} - e^x}{3 \text{ sen } x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\text{sen } x}$

d) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x^2 - 9x + 14}{\ln (x^2 - 6x - 6)}$

029 Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln x}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{2x^3}$

030 Calcula estos límites.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{4x} - \dfrac{2}{xe^x} \right)$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \sqrt{x+1}}{3x}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} (x \ln x)$

---

050 Determina los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que la función:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

pase por el origen de coordenadas, tenga un punto de inflexión en $x = -1$ y su recta tangente en $x = 1$ tenga pendiente 3.

(Castilla-La Mancha. Junio 2006. Bloque 1. Pregunta A)

051 Calcula para $f(x) = (x + 1)e^{-x}$ los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad.

(Galicia. Junio 2006. Bloque 3. Opción 1)

052 Hallar los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$$

(Madrid. Septiembre 2007. Opción A. Ejercicio 4)

053 Demuestra que la curva de ecuación $y = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ no tiene ningún punto de inflexión.

(Baleares. Junio 2006. Opción A. Cuestión 3)

055 Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$$

Determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y = 2x + 3$.

(Andalucía. Junio 2007. Opción B. Ejercicio 1)

057 Se considera la función:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son parámetros reales.

a) Averiguar los valores de a y b para los que las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ en los puntos de abscisas $x = 2$ y $x = 4$ son paralelas al eje X.

b) Con los valores de a y b hallados anteriormente, obtener el valor de c para el que se cumple que el punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ está en el eje X.

(C. Valenciana. Junio 2007. Bloque 3. Problema 2)

080 El coste del marco de una ventana rectangular es 12,50 € por metro lineal de los lados verticales y 8 € por metro lineal de los lados horizontales.

a) Calcular razonadamente las dimensiones que debe tener el marco de una ventana de 1 m^2 de superficie para que resulte lo más económico posible.

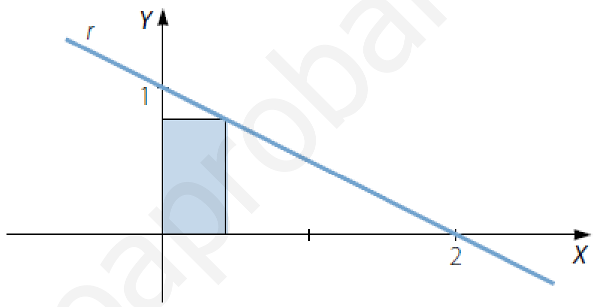
b) Calcular, además, el coste de ese marco.

(C. Valenciana. Junio 2006. Ejercicio B. Problema 4)

081 De entre todos los triángulos rectángulos con hipotenusa 10 cm, calcula las longitudes de los catetos que corresponden al de área máxima.

(Galicia. Junio 2006. Bloque 3. Opción 2)

082 De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes coordenados y un vértice en la recta r de ecuación $\frac{x}{2} + y = 1$, determina el que tiene mayor área.



(Andalucía. Año 2007. Modelo 4. Opción A. Ejercicio 1)

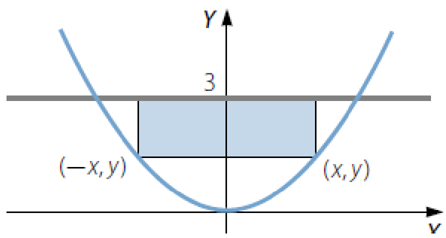
084 Halla las dimensiones de un cartel de área máxima con forma de rectángulo que tiene dos vértices sujetos a una estructura rígida parabólica de ecuación $y = 12 - x^2$, y los otros dos vértices están situados sobre el eje X.

(C. Valenciana. Junio 2007. Bloque 4. Problema 2)

089 Considérese el recinto limitado por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 3$.

De entre los rectángulos situados como el de la figura, determinar el que tiene área máxima.

(Canarias. Junio 2008. Bloque 2. Opción B)



090 Un almacén tiene forma de prisma recto de base cuadrada y un volumen de 768 m^3. Se sabe que la pérdida de calor a través de las paredes es de 100 unidades por m^2, mientras que a través del techo es de 300 unidades por m^2. La pérdida por el suelo es muy pequeña y se puede considerar nula. Calcule las dimensiones del almacén para que la pérdida de calor total sea mínima.

(Cataluña. Junio 2007. Problema 5)

Ejercicios del tema 10 del solucionario (a partir de la página 564)

009 Halla las asíntotas verticales de las funciones.

a) $f(x) = \log(x^2 - 16)$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

010 Estudia si las siguientes funciones tienen asíntotas horizontales.

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

012 Estudia si las siguientes funciones tienen asíntotas oblicuas.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{-x^2+3}{x+2}$

015 Determina las ramas infinitas de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

050 Determina las asíntotas y las ramas infinitas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x} - 1}$

b) $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

c) $h(x) = \dfrac{3x^3}{x^2 - 4}$

d) $v(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x}$

051 Calcular las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$.

(Castilla y León. Junio 2008. Prueba B. Cuestión 1)

053 Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{(x+2)^2}{x+1}$$

Analizar sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y determinar las que existan.

(Aragón. Junio 2007. Opción B. Cuestión 2)

054 Dada la función:

$$f(x) = 1 - \frac{3x}{x^2 - 4}$$

se pide:

a) Asíntotas verticales (calculando los límites laterales).

b) Asíntotas horizontales y oblicuas.

(Murcia. Junio 2008. Bloque 3. Cuestión A)

065 Dada la función:

$$f(x) = 1 - \frac{3x}{x^2 - 4}$$

se pide sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus extremos.

(Murcia. Junio 2008. Bloque 3. Cuestión A)

068 Considera la siguiente función: $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

Determina:

a) Su dominio.

b) Los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

c) Si su gráfica es simétrica respecto del origen o respecto del eje Y.

d) Las asíntotas.

e) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

f) Los máximos y mínimos.

069 Considera la función: $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$

a) Estudia su dominio.

b) Halla los puntos en que la gráfica corta a los ejes de coordenadas.

c) Analiza si su gráfica es simétrica respecto del origen o respecto del eje Y.

d) Calcula las asíntotas.

e) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

f) Halla los máximos y mínimos.

070 Calcular los valores de a y b para que la función $f(x) = \dfrac{bx}{x-a}$ tenga como asíntota vertical la recta $x = 2$ y como asíntota horizontal la recta $y = 3$.

Razonar si para $a = 2$ y $b = 3$ la función $f(x)$ tiene algún mínimo relativo.

(Aragón. Junio 2006. Opción A. Cuestión 2)

072 Halla la concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de estas funciones.

a) $y = x^2e^x$ b) $y = \dfrac{x}{\ln x}$ c) $y = x - \text{sen } x$ d) $y = \sqrt{x^2 - 16}$

078 Estudia el crecimiento y la concavidad de la función $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{Lx}{x}$. ($L =$ logaritmo neperiano)

(Castilla-La Mancha. Septiembre 2005. Bloque 1. Pregunta B)

081 La curva de ecuación $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos (1, 0) y (0, -1) y tiene un mínimo para $x = 2$. Se pide:

a) Encontrar a, b y c.

b) Representación de forma aproximada de dicha curva.

(Murcia. Septiembre 2005. Bloque 3. Cuestión 1)

082 Calcula razonadamente los valores de a y b para que la función:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

tenga un extremo relativo en $x = 2$, un punto de inflexión en $x = 0$ y pase por el punto (1, -5).

Representa gráficamente esta función.

093 Sea la función $f(x) = x + e^{-x}$.

Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y convexidad y las asíntotas. Esbozar su gráfica.

(Castilla y León. Junio 2007. Prueba B. Problema 2)

094 Sea la función $f(x) = x^2e^x$. Calcula sus asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión. Represéntala gráficamente.

(La Rioja. Junio 2007. Propuesta A. Ejercicio 5)

095 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x - 1)^2 e^{-x}$.

a) Halla las asíntotas de la gráfica de f.

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula, si existen, sus extremos relativos o locales y sus extremos absolutos o globales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

c) Esboza la gráfica de f.

(Andalucía. Septiembre 2005. Opción A. Ejercicio 2)

110 Dada la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los de concavidad y convexidad, los puntos de inflexión y las asíntotas. Esbócese su gráfica.

(Castilla y León. Junio 2006. Prueba B. Problema 2)

112 Estudia (dominio, crecimiento, máximos y mínimos, asíntotas) y representa gráficamente la función:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-x^2}$$

(La Rioja. Junio 2006. Propuesta B. Ejercicio 4)