CAPÍTULO 1: LÍMITES Y CONTINUIDAD

1.0.- Conceptos previos

- Llamamos Función Real de Variable Real a una correspondencia entre dos números reales de modo que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y solo un elemento del segundo conjunto.

  Se denota:

$$\begin{aligned} f: D\subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

- El conjunto D es el llamado Dominio de definición de la función.

- Llamamos Imagen de la función (o Recorrido) al conjunto $\{ y \in \mathbb{R} \mid \text{existe } x \in D \text{ tal que } y = f(x) \}$

- Llamamos Gráfica de la función al conjunto $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x) \ ; \ x \in D \}$

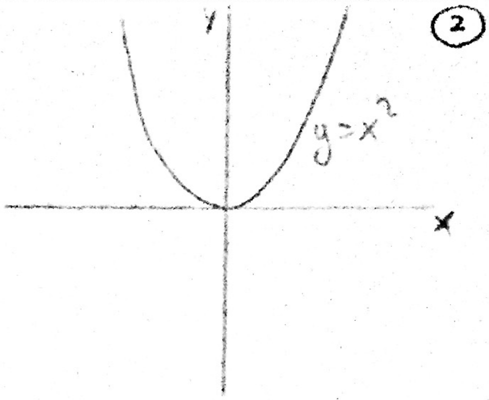
Ejemplos:

① $$\begin{aligned} f: D\subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

- $D = \mathbb{R}$ (cualquier número puede elevarse al cuadrado)
- $\text{Im} f = \mathbb{R}^+$ (cuando un número real se eleva al cuadrado, nos quedará siempre un número ≥ 0, y además cualquier número ≥ 0 tiene un número tal que al elevarlo al cuadrado se obtiene dicho número ≥ 0)

- $Gr(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \}$

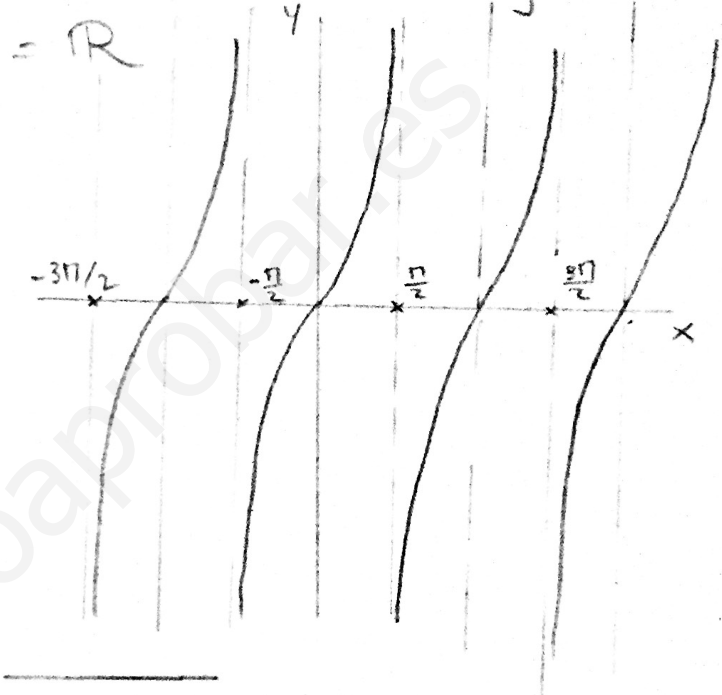
La gráfica de f es la parábola $y = x^2$.



② $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto tg\,x$

- $D = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{(2k+1)\cdot\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \}$
- $Im\,f = \mathbb{R}$

- $Gr(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = tg\,x \}$



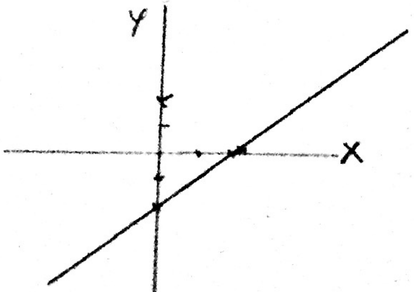
* * *

- Recordemos las Gráficas de las funciones elementales:

  - Función lineal o afín:

$$y = \underbrace{m}_{\text{pendiente}} x + \overset{\text{ordenada en el origen}}{n}$$ (si n=0 la función se dice que es lineal, y si $n \neq 0$ la función se dice que es afín.)

si $m>0$ ↗
si $m=0$ ⟷
si $m<0$ ↘



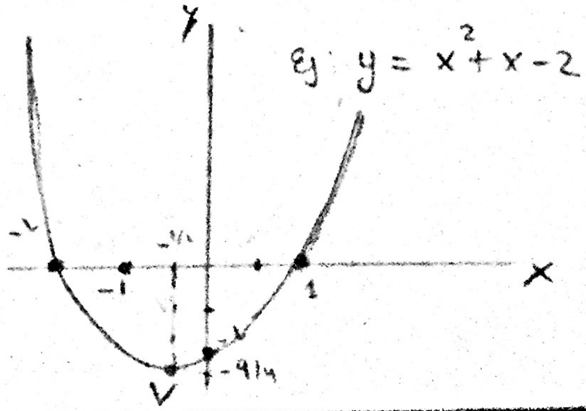
Ej: $y = x - 2$

  - Función cuadrática:

$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

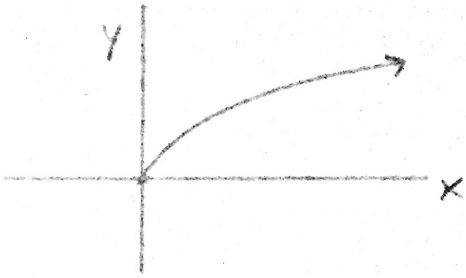
si $a>0$ ∪ vértice en $x = -b/2a$
si $a<0$ ∩

Ej: $y = x^2 + x - 2$



Función raíz cuadrada

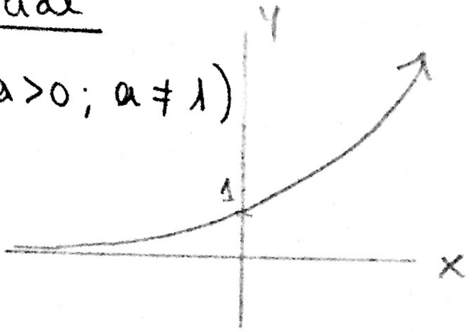
$y = \sqrt{x}$



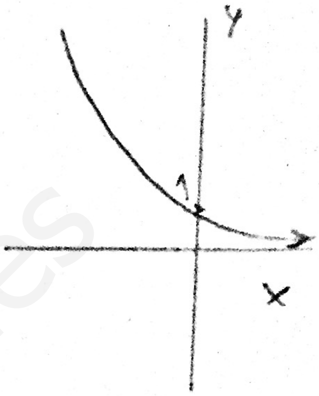
Función exponencial

$y = a^x \quad (a>0;\ a\neq 1)$

si $a>1 \Rightarrow$



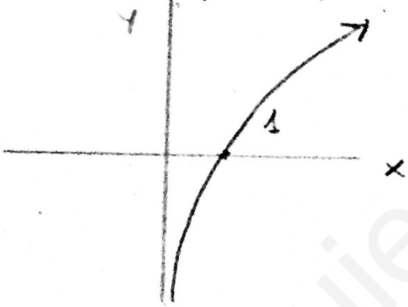
; si $a<1 \Rightarrow$



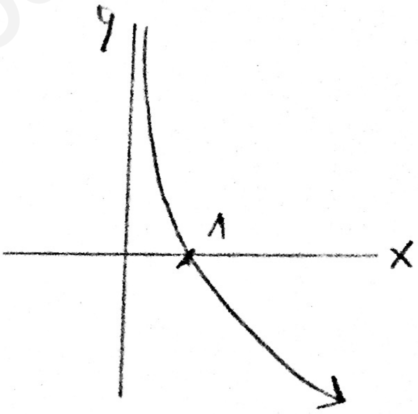
Función logarítmica

$y = \log_a x \quad (a>0;\ a\neq 1)$

si $a>1$

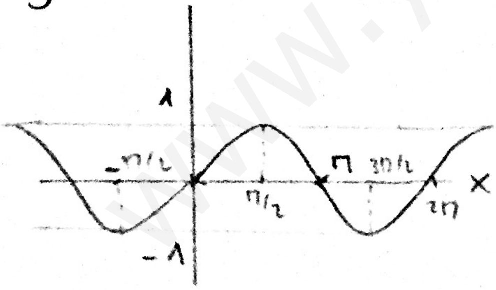


; si $a<1$

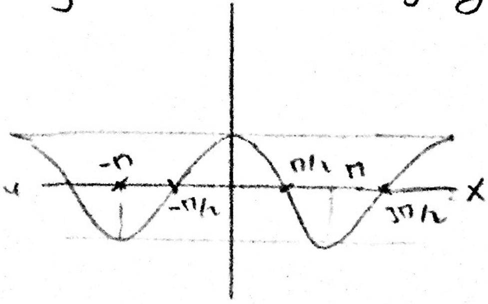


Trigonométricas

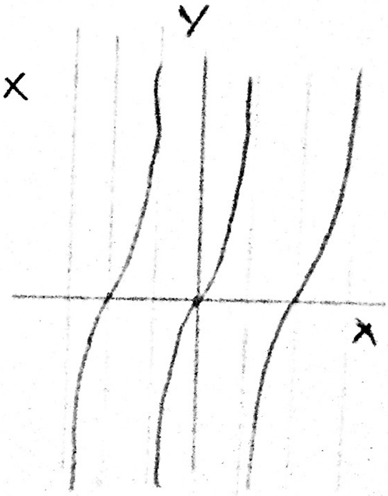
$y = \text{sen}\, x$



$y = \cos x$

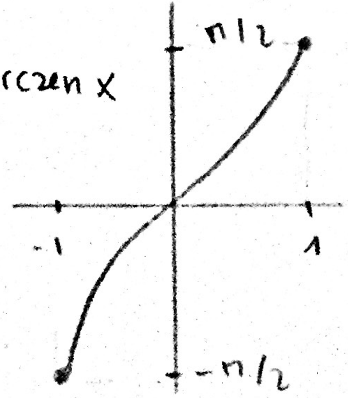


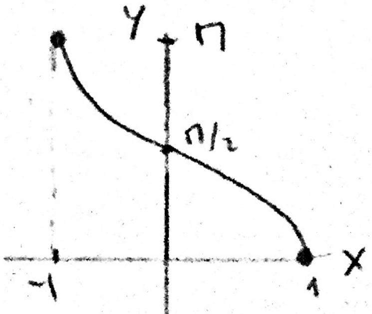
$y = \text{Tg}\, x$



Inversas de las trigonométricas

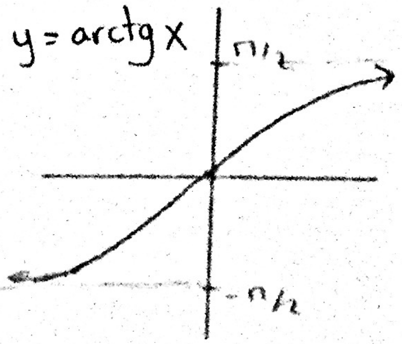
$y = \text{arcsen}\, x$





$y = \arccos x$

$y = \text{arctg}\, x$



1. 1.- Límite de una función en un punto.

- **Definición**: Sea f una función real de variable real definida al menos en un entorno reducido U^* de un punto $a \in \mathbb{R}$. Se dice que f tiene límite $L \in \mathbb{R}$ en el punto a, y se denota $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si se verifica que:

  Para cada número real $\varepsilon > 0$ existe otro real $\delta > 0$ tal que es $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todos los $x \in U^*$ que verifiquen que $0 < |x - a| < \delta$.

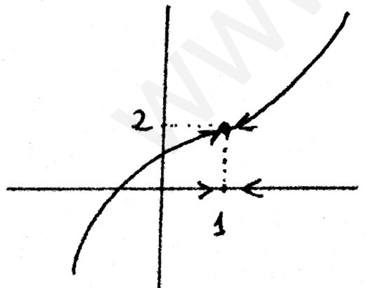
- **Unicidad del límite**:

  Si f tiene límite en un punto $a \in \mathbb{R}$, dicho límite es ÚNICO.

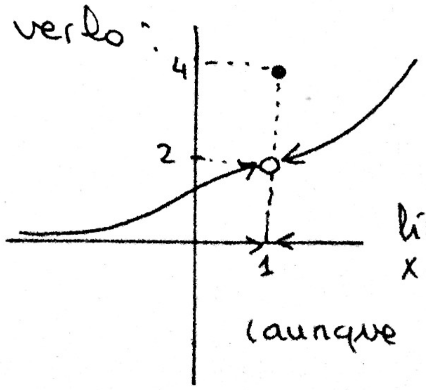
- Lo que queremos saber al calcular un límite es hacia dónde tiende la función (y) cuando las x se "acercan" al punto a.

  No importa que la función llegue a alcanzar dicho límite, tan sólo que se acerque a él "tanto como queramos".

  Gráficamente es muy sencillo verlo:

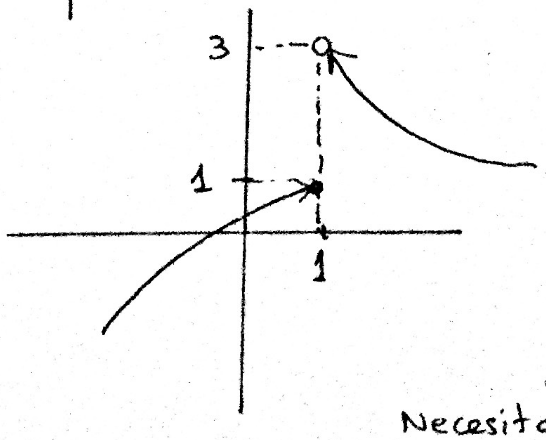


$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$



$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

(aunque $f(1) = 4$)



$\lim_{x \to 1} f(x) = ?$

Si nos acercamos por la izq., nos dirigimos al 1, pero si nos acercamos por la dcha., al 3. Y hemos visto que sólo puede existir un límite.
Necesitamos definir los límites laterales.

- Definición de límites laterales

Sea f una función real de variable real definida al menos en un semientorno reducido del punto $a \in \mathbb{R}$.

Si lo es por la derecha, se dice que f tiene límite por la derecha si se cumplen las condiciones de límite anteriormente descritas en dicho semientorno. (resp. por la izquierda)

Se denota:

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ (límite por la derecha)

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ (límite por la izquierda)

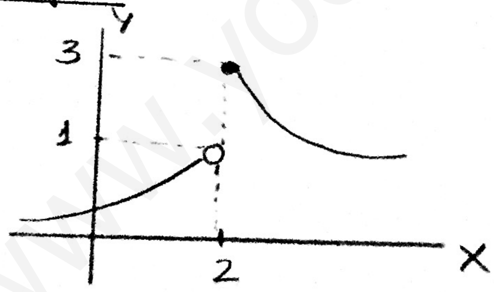
IMPORTANTE:

Una función f tiene límite L si y solo si los límites laterales existen y son iguales a L.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

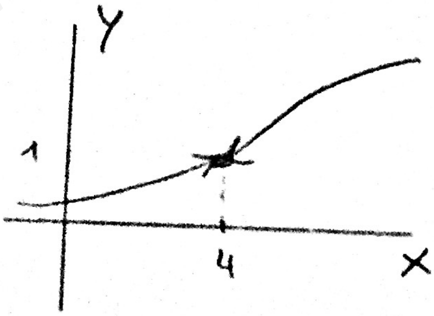
Ejemplos:

a)



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3 \end{array}\right\} \nexists \lim_{x \to 2} f(x)$$

b)



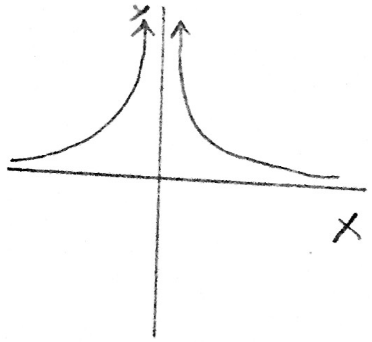
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \lim_{x \to 4} f(x) = 1$$

1.2.- Límites infinitos y límites en el infinito.

- Sea f una función real de variable real definida al menos en un entorno reducido U^* de $a \in \mathbb{R}$.

  Se dice que f tiene limita $+\infty$ (resp. $-\infty$) en a, y se denota $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) si para cada $K>0$ existe $\delta>0$ tal que si $x \in U^*$ y $0<|x-a|<\delta$ entonces $f(x) > K$ (resp. $f(x) < -K$)

  Ej:

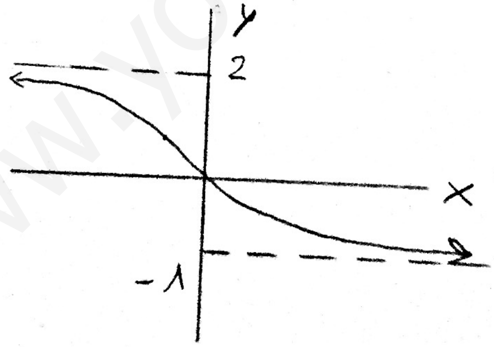


$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

- Se dice que f tiene límite $L \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si para cada $\varepsilon>0$ existe $K>0$ tal que si $x>K$ (resp. $x<-K$), entonces $|f(x)-L| < \varepsilon$.

  Se denota $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

  Ej:



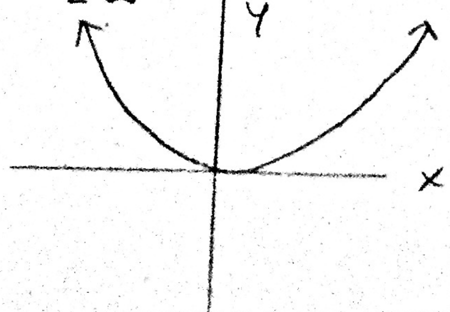
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$$

- Análogamente a las anteriores podemos definir los límites infinitos en el infinito, que se denotan:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

  Ej:



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

1.3.- Cálculo de límites. Operaciones con infinitésimos e infinitos.

Para calcular analíticamente un límite, basta con sustituir el valor hacia el que tiende la x en nuestra función. Por supuesto, esto puede dar problemas porque puede ser que dicho punto no pertenezca al dominio de la función o que, mismamente, sea $\pm\infty$.

Para ello, necesitaremos usar las siguientes reglas de cálculo.

(NOTA: a partir de ahora, cuando escribamos 0 o ∞, nos estaremos refiriendo a algo que tiende a 0 o a infinito)

Sea $K \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$:

$$\infty \pm K = \infty$$
$$-\infty \pm K = -\infty$$
$$\infty + \infty = +\infty$$
$$-\infty - \infty = -\infty$$
$$\infty - \infty \equiv \text{INDETERMINACIÓN}.$$

$$K \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{si } K>0 \\ -\infty & \text{si } K<0 \end{cases}$$
$$K \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{si } K>0 \\ +\infty & \text{si } K<0 \end{cases}$$
$$\infty \cdot \infty = \infty$$
$$0 \cdot \infty \equiv \text{INDETERMINACIÓN}$$

$$\frac{K}{\infty} = \frac{K}{-\infty} = 0$$
$$\frac{0}{\infty} = \frac{0}{-\infty} = 0$$
$$\left[\frac{K}{0} = \pm\infty \text{ (habrá que estudiar límites laterales)}\right]$$
$$\left[\frac{\pm\infty}{0} = \pm\infty \text{ (límit. lat)}\right]$$
$$\frac{0}{0} \equiv \text{INDETERMINACIÓN}$$
$$\frac{\infty}{\infty} \equiv \text{INDETERMINACIÓN}.$$

$$K^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{si } K>1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq K < 1 \end{cases}$$
$$K^{-\infty} = \begin{cases} 0 & \text{si } K>1 \\ +\infty & \text{si } 0 \leq K < 1 \end{cases}$$
$$(+\infty)^{K} = \begin{cases} +\infty & \text{si } K>0 \\ 0 & \text{si } K<0 \end{cases}$$
$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$$
$$(+\infty)^{-\infty} = 0$$
$$\infty^{0} \equiv \text{INDETERMINACIÓN}$$
$$0^{0} \equiv \text{INDETERMINACIÓN}$$
$$1^{\infty} \equiv \text{INDETERMINACIÓN}.$$

NOTA: Cuando sustituyamos $\pm\infty$ en un polinomio, simplemente nos quedaremos con el monomio de mayor grado.

Ej: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = (+\infty)^2 = +\infty$.

1.4.- Indeterminaciones.

Como hemos visto en el apartado anterior, hay 7 indeterminaciones:

$\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty-\infty$; 1^{∞} ; $0\cdot\infty$; 0^{0} y ∞^{0}.

(aparte de $K/0$, que no es estrictamente una indeterminación, pero que también estudiaremos aquí.)

Comencemos dando solución a dicho caso particular:

$\boxed{\frac{K}{0} \quad (K\neq 0)}$ Ej: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{7}{x-3}=\frac{7}{3-3}=\frac{7}{0}$

Para resolverlo, deberemos acudir a los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{7}{x-3}=\frac{7}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{7}{x-3}=\frac{7}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}$$

Como los límites laterales no coinciden decimos que no existe el límite cuando x → 3 de la función.

Ej 2: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{0^2}=\frac{1}{0}$

$$\left\langle\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty.$$

$\boxed{\text{INDETERMINACIÓN } 0/0}$ Ej: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-6x-9}{x^2-9}=\frac{0}{0}$ (INDET)

En el caso de que sean polinomios, lo que haremos será descomponer en factores tanto el numerador como el denominador, y cancelar los factores que coincidan.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-6x-9}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+3)}{(x+3)\cancel{(x-3)}}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x+3}{x+3}=\frac{21}{6}=\boxed{\frac{7}{2}}$$

[Para caso no polinómicos usaremos las derivadas (capítulo 2)]

INDETERMINACIÓN $\frac{\infty}{\infty}$

Ej: $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-5x+1}{2x^2+7} = \frac{\infty}{\infty}$ (INDET.)

Lo que haremos, si tenemos polinomios, será dividir numerador y denominador por la x de mayor grado.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-5x+1}{2x^2+7} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{7}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-\cancel{\frac{5}{x}}^{\nearrow 0}+\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\nearrow 0}}{2+\cancel{\frac{7}{x^2}}^{\nearrow 0}}$$

$$= \boxed{\frac{3}{2}}$$

Otros ejemplos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-7}{x^2+x-2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (INDET).}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-7}{x^2+x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2}-\frac{7}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{\frac{1}{x}}^{\nearrow 0}-\cancel{\frac{7}{x^2}}^{\nearrow 0}}{1+\cancel{\frac{1}{x}}^{\nearrow 0}-\cancel{\frac{2}{x^2}}^{\nearrow 0}} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (INDET.)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}-\frac{3}{x}}{\frac{\sqrt{x+1}}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{3}{x}}{\sqrt{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{3}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

* Como esto puede resultar demasiado "largo" podemos aplicar la siguiente regla:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } gr(P(x)) > gr(Q(x)) \quad (n>m) \\ 0 & \text{si } gr(P(x)) < gr(Q(x)) \quad (n<m) \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } gr(P(x)) = gr(Q(x)) \quad (n=m) \end{cases}$$

siendo $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$

$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{n-1} + \ldots + b_0$

Como en el apartado anterior, esto solo nos valdrá en el caso polinomico. Si las expresiones, o en las expresiones del numerador y denominador no hay polinomios aplicaremos derivadas. (Lo veremos en el capítulo 2)

INDETERMINACIÓN $\infty-\infty$

Ejs:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x-1}{x-3}-\frac{x+5}{x^2-4x+3}\right)=\infty-\infty \quad \text{(INDET.)}$$

$$\lim_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+x}\right)=\infty-\infty \quad \text{(INDET.)}$$

- En el primer caso (con fracciones algebraicas) lo que haremos será realizar la operación para dejar la expresión como una sola fracción, quedándonos una expresión más sencilla.
- En el segundo caso, en el que hay radicales del mismo orden, lo que haremos será multiplicar y dividir por su conjugado.

Veámoslos:

- $$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x-1}{x-3}-\frac{x+5}{x^2-4x+3}\right)\underset{\uparrow}{=}\lim_{x\to 3}\left(\frac{(x-1)\cdot(x-1)-(x+5)}{(x-3)\cdot(x-1)}\right)=$$

factorizando los denominadores

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+1-x-5}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x-4}{(x-3)(x-1)}=\frac{-4}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-3x-4}{(x-3)(x-1)}=\frac{-4}{0^-}=+\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-3x-4}{(x-3)(x-1)}=\frac{-4}{0^+}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 3}\left(\frac{x-1}{x-3}-\frac{x+5}{x^2-4x+3}\right)$$

—— • ——

- $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+x}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+x}\right)}{\left(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2-x^2-x}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2-x}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2+x}}=\frac{-\infty}{\infty}\ \text{(INDET)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2}{x}-\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\overset{0}{\cancel{\frac{2}{x}}}-1}{\sqrt{1-\overset{0}{\cancel{\frac{2}{x^2}}}}+\sqrt{1+\overset{0}{\cancel{\frac{1}{x}}}}}$$

$$=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}\ //.$$

INDETERMINACIÓN $0 \cdot \infty$

Ej: $\lim_{x\to\infty} (x+7)\cdot\sqrt{\frac{1}{4x^2+3}} = \infty\cdot 0$ (INDET.)

Lo que haremos en este caso será tratar de transformarla en una expresión de la forma $0/0$ o ∞/∞.

En nuestro ejemplo es sencillo, tan solo tenemos que:

$$\lim_{x\to\infty} (x+7)\cdot\sqrt{\frac{1}{4x^2+3}} \overset{\sqrt{1}=1}{=} \lim_{x\to\infty} (x+7)\cdot\frac{1}{\sqrt{4x^2+3}} \overset{\text{multiplicando}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{x+7}{\sqrt{4x^2+3}}$$

$= \frac{\infty}{\infty}$ (INDET). Y la resolvemos como ya sabemos:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x} + \cancel{\frac{7}{x}}\to 0}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2} + \cancel{\frac{3}{x^2}}\to 0}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \;//.$$

En general, para otros casos, podemos hacer lo siguiente:

Si $\lim_{\substack{x\to\infty \\ \text{ó } x\to a}} f(x) = 0$; $\lim_{\substack{x\to\infty \\ \text{ó } x\to a}} g(x) = \infty$

Entonces:

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ \text{ó } x\to a}} f(x)\cdot g(x) = \lim_{\substack{x\to\infty \\ \text{ó } x\to a}} \frac{f(x)\to 0}{\left.\frac{1}{g(x)}\right\}\to 0} = \frac{0}{0}.$$

O bien

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ \text{ó } x\to a}} f(x)\cdot g(x) = \lim_{\substack{x\to\infty \\ \text{ó } x\to a}} \frac{g(x)\to\infty}{\left.\frac{1}{f(x)}\right\}\to\infty} = \frac{\infty}{\infty}.$$

[Los ejemplos de estos casos los veremos cuando estudiemos la regla de L'Hopital en el capítulo 2.]

INDETERMINACIONES 0^0 y ∞^0

Ejs: $\lim_{x\to 1}(x-1)^{x^2-1} = 0^0$ (INDET^{s})

$\lim_{x\to\infty}(x)^{2/x} = \infty^0$

Lo que haremos en este caso será llamar L al límite, y aplicar logaritmos neperianos:

$$L = \lim_{x\to 1}(x-1)^{x^2-1} \Rightarrow \ln(L) = \lim_{x\to 1}\ln(x-1)^{x^2-1}$$

Por la propiedad de los logaritmos; $\ln(x-1)^{x^2-1} = (x^2-1)\cdot\ln(x-1)$

Por lo que nos queda que $L = e^{\lim_{x\to 1}(x^2-1)\cdot\ln(x-1)}$

El límite $\lim_{x\to 1}(x^2-1)\cdot\ln(x-1) = 0(-\infty)$; y se resolverá usando lo que ya hemos visto. De todos modos, para acabar de resolver este límite necesitaremos L'Hopital, que lo veremos en el cap. 2.

Análogamente para $\lim_{x\to\infty}(x)^{2/x} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\cdot\ln x = 0\cdot\infty}$

INDETERMINACIÓN 1^∞

Ej: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = 1^\infty$ (INDET.)

Aunque hay varias formas de resolverlo, aquí usaremos la siguiente fórmula:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{h(x)} \underset{\text{si nos da } 1^\infty}{=} \lim_{x\to a} e^{h(x)\cdot\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)}}$$

En el ejemplo:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{1/x-1} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\cdot\left(\frac{2x+1}{x+2}-1\right)} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\cdot\left(\frac{x-1}{x+2}\right)}$$

$$= e^{\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+2}} = e^{\frac{1}{3}} \,//.$$

1.5: Asíntotas de una función. Ramas infinitas.

Una de las principales aplicaciones de los límites es el cálculo de asíntotas, que son aquellas rectas hacia las que la función "se va acercando cada vez más". Las puede haber de tres tipos: verticales, horizontales y oblicuas.

- **ASÍNTOTAS VERTICALES**

  Se dice que f tiene una asíntota vertical en $x = a \in \mathbb{R}$ si se cumple que $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, o al menos uno de los límites laterales es $\pm\infty$.

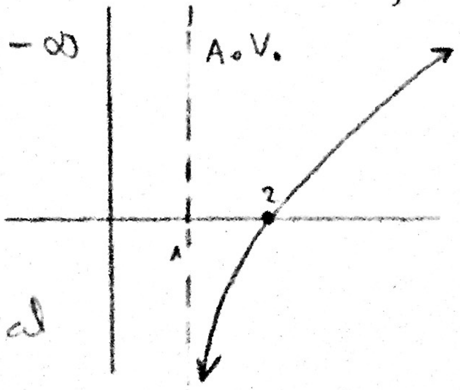
  Las asíntotas verticales pueden aparecer en "los bordes" del dominio de una función. Por casos concretos:

  - Funciones polinómicas: no tienen asíntotas. (Ninguna, tampoco horizontales ni oblicuas)
  - Funciones racionales: donde se anula el denominador.
  - Funciones logarítmicas: donde se anula el logaritmo.
  - Funciones trigonométricas: Ni el seno ni el coseno poseen asíntotas, pero $f(x) = tg\, x$ tiene infinitas asíntotas verticales en $x = \frac{(2K+1)\cdot \pi}{2}$; $K \in \mathbb{Z}$.

Ejemplos:

$f(x) = \ln(x-1)$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

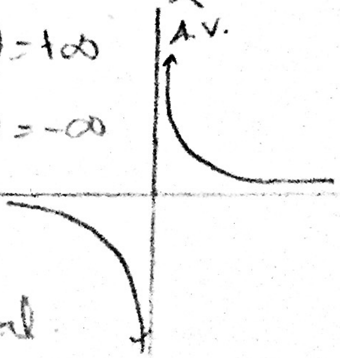


$x = 1$ es A. vertical

$f(x) = \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

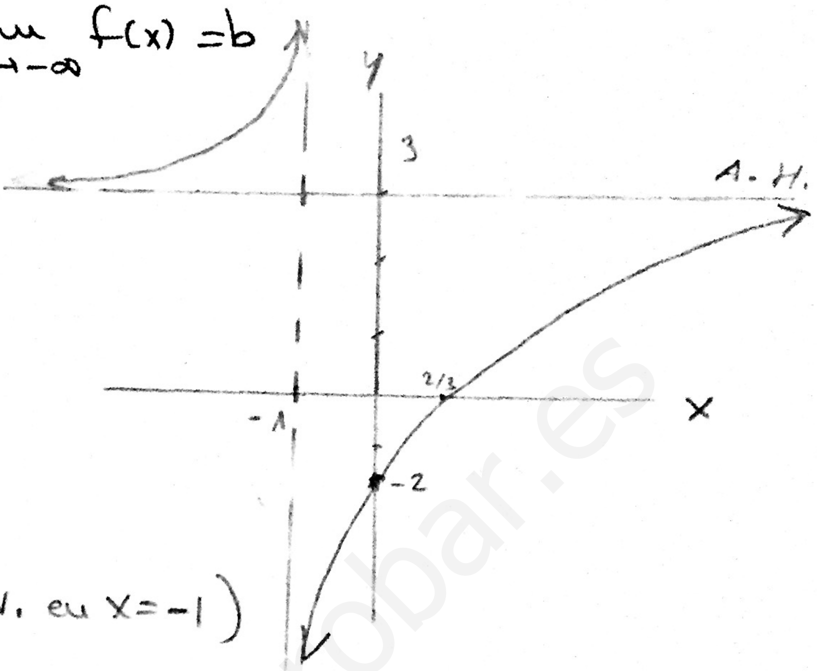
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$



$x = 0$ es A. vertical.

• ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Se dice que f tiene una asíntota horizontal $y=b$ si se verifica que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ y/o $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$



Ejemplo:

$$f(x)=\frac{3x-2}{x+1}$$

Se verifica que

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-2}{x+1}=3.$$

A.H. → $y=3$

(También vemos que tiene A.V. en $x=-1$)

• ASÍNTOTAS OBLÍCUAS.

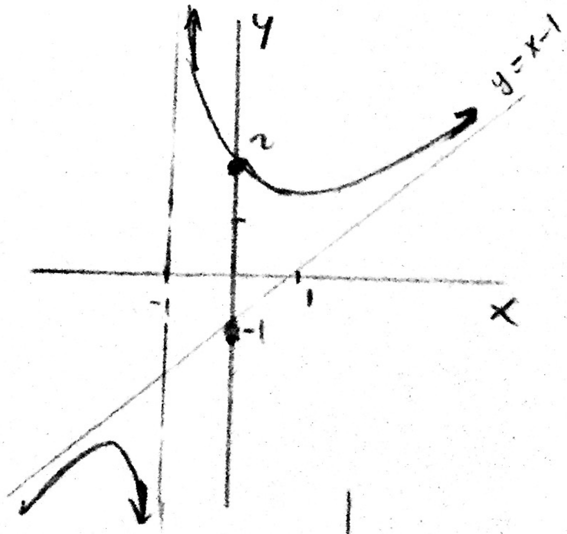
Una función puede tener asíntotas oblicuas SOLO SI NO TIENE A.H.

Las asíntotas oblicuas tienen la siguiente forma: $y=mx+n$.

Donde $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)$

Obviamente es necesario que tanto m como n sean números reales.

Ejemplo: $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x+1}$ Calculemos sus asíntotas



$\boxed{A.V}$ $\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2+2}{x+1}=\frac{3}{0^-}=-\infty$
$\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2+2}{x+1}=\frac{3}{0^+}=+\infty$ } $x=-1$ A.V.

$\boxed{A.H}$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2}{x+1}=+\infty$
$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2}{x+1}=-\infty$ } No hay A.H. (Puede haber oblicua)

$\boxed{A.O.}$ $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2+x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x+1}-1x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2-x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+1}{x+1}=-1$$

} $y=x-1$ A O

1.6.- Continuidad de una función en un punto.

Antes de comenzar a explicar la continuidad, recordemos como son las funciones definidas a trozos y las funciones valor absoluto.

- Las funciones a trozos son aquellas cuya expresión algebraica va cambiando a lo largo de su dominio.

Ej:
$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 0 \\ x^2/5 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1/x-1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Para calcular límites tenemos que tener en cuenta qué expresión adquiere la función en un entorno del punto hacia el que tiende la x.

Por ejemplo, $\lim_{x \to 1/2} f(x) = \lim_{x \to 1/2} x^2/5 = 1/20$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-1} = 0.$$

Para calcular los límites en $x=0$ o en $x=1$, deberemos recurrir a los límites laterales.

$$\lim_{x \to 0} f(x) \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} 3x = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{5} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) \begin{cases} \lim_{x \to 1^-} x^2/5 = 1/5 \\ \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 1} f(x).$$

- Las funciones valor absoluto son aquellas que siempre adquieren valores no negativos. Podemos transformarlas en funciones a trozos:

Ej: $f(x) = |x^2-4|$

$x^2-4=0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

SIGNO DE x^2-4: $\quad -\infty \quad -2 \quad 2 \quad +\infty$

$\boxed{+}\boxed{-}\boxed{+}$

$$\Rightarrow |x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2+4 & \text{si } -2 < x < 2 \\ x^2-4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

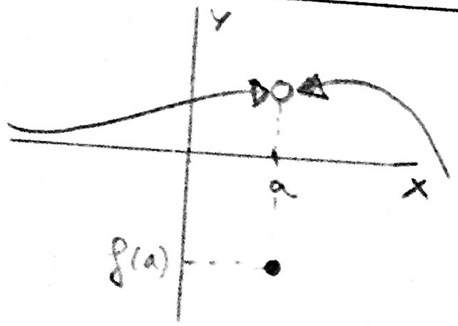
Definición: Se dice que una función f es continua en un punto $a \in \mathbb{R}$ si se cumple que la función está definida en un entorno U de a y:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}}$$

Equivalentemente:
$$\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}}$$

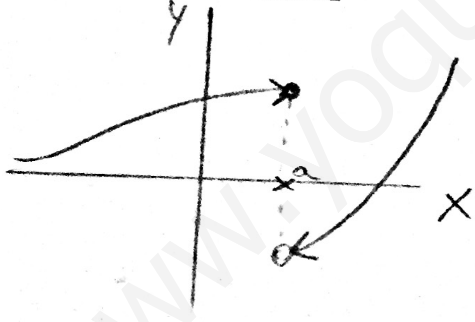
Las distintas clases de discontinuidad que, en este curso, podremos encontrarnos son:

- DISCONTINUIDAD EVITABLE.



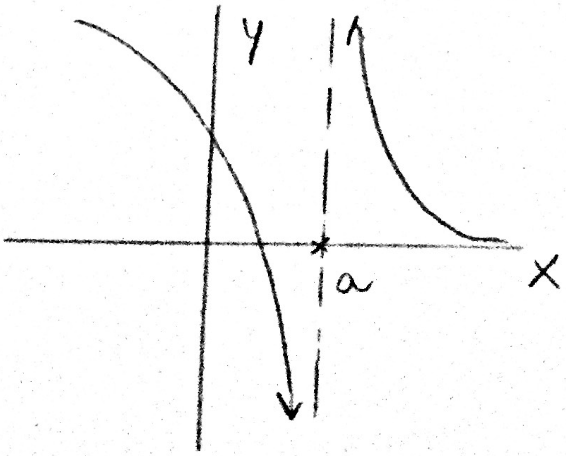
$\lim_{x\to a} f(x)$ existe y es real.
pero no coincide con f(a).
Equivalentemente
$$\underset{\in \mathbb{R}}{\lim_{x\to a^+} f(x)} = \underset{\in \mathbb{R}}{\lim_{x\to a^-} f(x)} \neq f(a)$$
(Puede que f(a) ni siquiera esté definido)

- DISCONTINUIDAD INEVITABLE DE SALTO FINITO



$$\underset{\in \mathbb{R}}{\lim_{x\to a^-} f(x)} \neq \underset{\in \mathbb{R}}{\lim_{x\to a^+} f(x)}$$
(Los límites laterales son reales, pero no coinciden.)

- DISCONTINUIDAD INEVITABLE DE SALTO INFINITO



$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$
y/o
$\lim_{x\to a^-} F(x) = \pm\infty$
(al menos un límite lat. es infinito.)

1.7.- Continuidad en un intervalo.

Se dice que una función es continua en un intervalo $[a,b]$ si es continua en cada punto de dicho intervalo.

- Las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$
- Las racionales en todo $\mathbb{R}$ menos en los puntos en los que se anula el denominador.
- Las logaritmicas $\log(f(x))$ son continuas en los puntos en los que sea continua $f(x)$ excepto en aquellos puntos en los que $f(x) = 0$. (Además debe ser $f(x) > 0$)
- Las trigonométricas $\operatorname{sen}(f(x))$ y $\cos(f(x))$ son continuas en todos los puntos en lo que f sea continua.
- Las exponenciales $a^{f(x)}$ son continuas en todos los puntos en los que $f(x)$ sea continua.
- Las radicales $\sqrt[n]{F(x)}$ son continuas si f es continua (Para n par, además debe ser $f(x) \geq 0$)

Para terminar, enunciamos tres teoremas fundamentales relacionados con la continuidad de una función:

- Teorema de Bolzano: Sea f continua en $[a,b]$ y $f(a)\cdot f(b) < 0$; entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c)=0$
- Teorema de Weierstrass: Si f es continua en $[a,b]$ entonces f alcanza su máximo y su mínimo en dicho intervalo.
- Teorema de los valores intermedios de Darboux. Sea f continua en $[a,b]$.

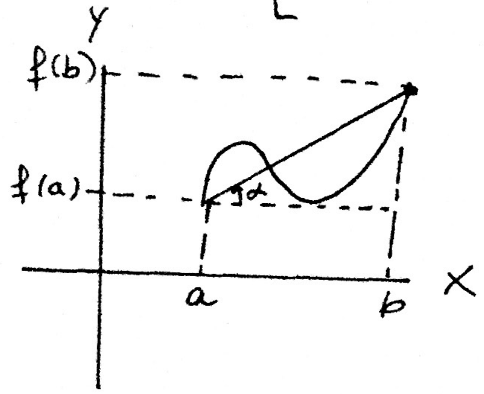
  Si $f(a) < m < f(b)$, existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = m$.

CAPÍTULO 2 : DERIVADAS

2.1.- Tasa de Variación Media

Sea f una función continua en un intervalo [a,b].
Llamamos Tasa de Variación Media de f en [a,b] a:

$$\text{TVM}[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



En realidad, lo que estamos haciendo es calcular la tangente de α.

Si TVM es mayor que 0, la función habrá crecido en el intervalo (aunque por medio haya ido variando)
Si TVM es menor que 0 habrá decrecido, y si es 0 significará que empieza y acaba a la misma altura.

Si a y b estuvieran "infinitamente" cerca, podremos estudiar el comportamiento (crecimiento o decrecimiento) de la función en cada instante. Para ello necesitaremos definir la tasa de variación instantánea. O lo que es lo mismo: definir la derivada de una función en un punto.

2.2.- Derivada de una función en un punto.

Se dice que f es derivable en un punto x_0 de su dominio si existe y es finito el siguiente límite:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

Si el límite existe cuando $x \to x_0^+$ o $x \to x_0^-$ se le llama derivada por la derecha o por la izquierda. (Derivadas laterales)

Se representan, respectivamente, por $f'(x_0^+)$ o $f'(x_0^-)$

Se verifica que f es derivable en x_0 si y solo si $\boxed{f'(x_0^+)=f'(x_0^-)\in\mathbb{R}}$

- Sea $f: U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en todo U. Se define la función derivada:

$$\begin{aligned} f': U \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x). \end{aligned}$$

(Se definen de este modo también f'' (derivada segunda) como la derivada de f', f''' (derivada tercera) como la derivada de f'', etc...)

2.3.- Cálculo de Derivadas

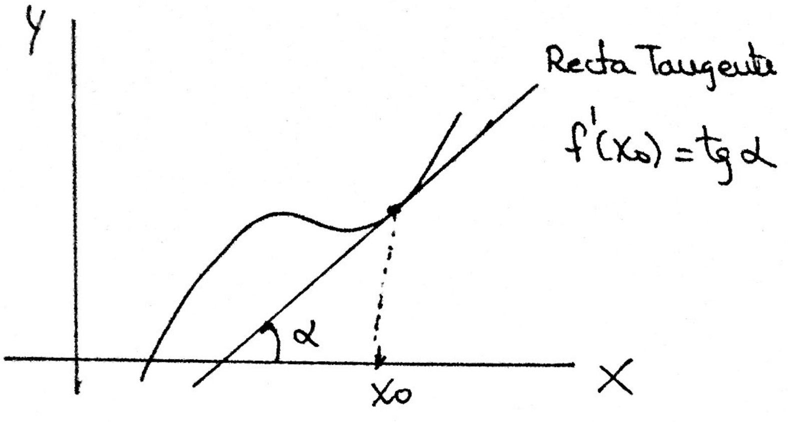
K es una constante; u y v funciones; n y m números reales. a un número positivo distinto de 1.

FUNCIÓN	DERIVADA
$y=K$	$y'=0$
$y=x$	$y'=1$
$y=u^n$	$y'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$
$y=\sqrt{u}$	$y'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y=\sqrt[n]{u}$	$y'=\dfrac{u'}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$y=e^u$	$y'=u'\cdot e^u$
$y=a^u$	$y'=u'\cdot a^u\cdot \ln a$
$y=\ln u$	$y'=\dfrac{u'}{u}$
$y=\log_a u$	$y'=\dfrac{u'}{u}\cdot\log_a e$

FUNCIÓN	DERIVADA
$y=\operatorname{sen} u$	$y'=u'\cdot\cos u$
$y=\cos u$	$y'=-u'\cdot\operatorname{sen} u$
$y=\operatorname{tg} u$	$y'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}=u'\cdot\sec^2 u$
$y=\operatorname{arcsen} u$	$y'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y=\arccos u$	$y'=\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y=\operatorname{arctg} u$	$y'=\dfrac{u'}{1+u^2}$
$y=K\cdot u$	$y'=K\cdot u'$
$y=u+v$	$y'=u'+v'$
$y=u\cdot v$	$y'=u'\cdot v+u\cdot v'$
$y=\dfrac{u}{v}$	$y'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$

2.4.- Interpretación Geométrica de la Derivada.

Gráficamente, la derivada de una función f en un punto x_0, $f'(x_0)$, es la pendiente de la recta tangente en dicho punto.



(La recta normal a f en x_0 sería la recta perpendicular a la Recta Tangente en dicho punto, cuya pendiente es $-1/f'(x_0)$)

ECUACIONES DE LA RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL DE UNA FUNCIÓN f EN UN PUNTO x_0:

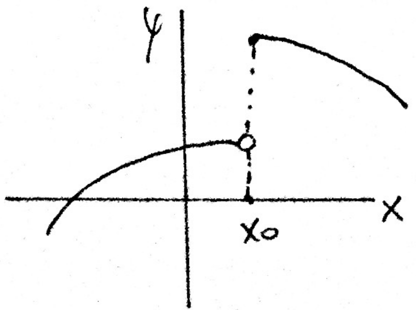
$$\boxed{\begin{aligned} RT &\equiv y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) \\ RN &\equiv y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0) \end{aligned}}$$

2.5.- Derivabilidad y Continuidad.

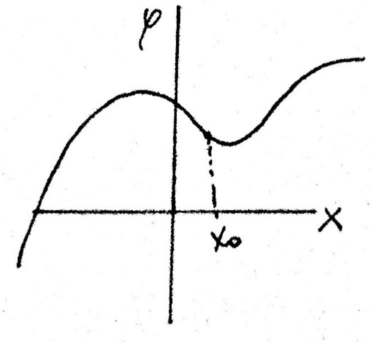
Para que una función sea derivable en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ es NECESARIO que sea continua en dicho punto.

Toda función derivable debe ser continua, pero no toda función continua tiene que ser derivable.

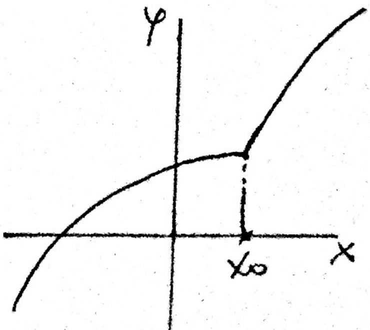
Veamos ejemplos gráficos:



No continua
No derivable
en x_0



continua y
derivable
en x_0



Continua pero
no derivable en x_0
(Hay un "pico")

- La derivabilidad mantiene las mismas reglas que vimos para la continuidad. (Mirar página 17 del capítulo 1)

2.6 - Aplicación de la derivada al cálculo de límites.

* REGLA DE L'HOPITAL:

Sean f y g dos funciones derivables en un entorno de x_0.

Entonces se verifica que:

Si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ será

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplo:

$$L = \lim_{x \to 2} \frac{\ln(3-x)}{x-2} = \frac{0}{0}$$

Por la regla de L'Hopital:

$$L = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{-1}{3-x}}{1} = -1.$$

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{3x+2}{2x-1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Por la regla de L'Hopital:

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

2.7.- Aplicación de la derivada al estudio general de una función

2.7.1.- Crecimiento y Decrecimiento: Monotonía.

Sea f continua y derivable en x_0.

Si $f'(x_0) > 0 \Rightarrow$ f es creciente en x_0

Si $f'(x_0) < 0 \Rightarrow$ f es decreciente en x_0.

Si $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ f tiene un punto crítico en x_0. (Máximo, mínimo o p. de inflex.)

- Para poder decidir de qué se trata lo que haremos será estudiar el signo de la derivada en un entorno reducido de x_0.

Ejs: $f(x) = x^2 + 5x$

$f'(x) = 2x + 5$

$2x + 5 = 0 \leftrightarrow x = -5/2$

$-\infty$ $\quad -5/2 \quad$ $+\infty$

f'	$-$	$+$
f	↘	↗

f tiene en $x = -5/2$ un mínimo (absoluto)

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$3x^2 = 0 \leftrightarrow x = 0$

$-\infty$ $\quad 0 \quad$ $+\infty$

f'	$+$	$+$
f	↗	↗

f tiene en $x = 0$ un p. de inflexión.

- Otra forma de estudiar si es un máximo, mínimo o punto de inflexión:

Si $f'(x_0) = 0$, hacemos $f''(x_0)$

Si $f''(x_0) > 0 \Rightarrow \cup$ Es un mínimo.

Si $f''(x_0) < 0 \Rightarrow \cap$ Es un máximo.

Si $f''(x_0) = 0$ y la primera derivada no nula es impar, es un punto de inflexión.

2.7.2 - Concavidad y Convexidad: Curvatura.

Una funcion continua y derivable en x_0 se dice que es:

- Concava en x_0 si $f''(x_0) < 0$ $\cap$
- Convexa en x_0 si $f''(x_0) > 0$ $\cup$

- Por tanto, para estudiar la curvatura de una funcion tendremos que estudiar el signo de la derivada segunda.

Ej:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 1$$
$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$$
$$f''(x) = 12x + 6$$
$$12x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1/2$$

$-1/2$

f''	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$

En $x = -1/2$ hay un p. de inflexion.

- Un p. de inflexion es un punto que pertenece al dominio de la funcion en el cual cambia de curvatura (De concava a convexa o de convexa a cóncava)

2.8 - Estudio general de una funcion.

Para hacer el estudio general de una funcion tendremos que estudiar los siguientes aspectos:

- DOMÍNIO
- PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES
- SIMETRÍA (OPCIONAL)
- ASÍNTOTAS
- MONOTONÍA
- CURVATURA.

$\Rightarrow$ Podemos representar gráficamente la funcion (Esbozarla)

Veamos a continuacion un ejemplo:

Ejemplo: $f(x) = \ln(x^2+1)$

- DOMINIO: Debe ser $x^2+1>0$, que al ser $x^2 \geq 0$, es siempre cierto; luego Dom f = $\mathbb{R}$.
- P. de corte ejes: EJE Y: $x=0 \to y=\ln 1 = 0 \Rightarrow P(0,0)$
  EJE X: $y=0 \Rightarrow \ln(x^2+1)=0 \Rightarrow x=0$; $P(0,0)$
- SIMETRÍA: Como $f(x)=f(-x)$ presenta simetría PAR.
- ASÍNTOTAS: . A. verticales no tiene.
  . A. Horizontales: $\lim_{x\to+\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$ $\Rightarrow$ No tiene
  . A. Oblicuas: $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = \frac{\infty}{\infty}$
  Por L'Hopital: $= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0$
  $\lim_{x\to\infty} \ln(x^2+1) - 0x = \infty$
  No tiene A. oblicua
- MONOTONÍA: $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} = 0 \leftrightarrow x=0$

0

f'	−	+
f	↘	↗

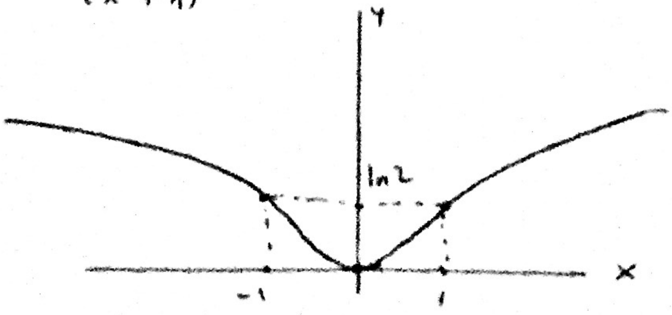
En x=0 hay un mínimo (absoluto) Está en el punto P(0,0)

- Curvatura: $f''(x) = \frac{2\cdot(x^2+1) - 2x\cdot(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$.

$\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 0 \leftrightarrow -2x^2+2=0 \leftrightarrow x = \pm 1$

		-1		1	
f''	−		+		−
f	∩		∪		∩

x=-1 p. inflex. P(-1, ln 2)
x=1 p. inflex. P(1, ln 2)



2.9 - Problemas de Optimización.

Optimizar un proceso es conseguir que una magnitud sea lo mayor o lo menor posible sujeta a ciertas condiciones.

En estos problemas, lo fundamental es encontrar la función que queremos maximizar o minimizar, que generalmente vendrá dada en función de dos variables.

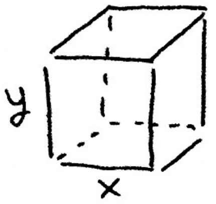
Con los datos del problema tendremos que poner una variable en función de la otra.

Una vez conseguido, derivamos la función a optimizar respecto a dicha variable e igualamos a cero.

Comprobamos que el valor que la hace cero es efectivamente el máximo o el mínimo que nos pedían.

Veamos un ejemplo:

E): Se quiere fabricar una caja abierta de chapa con base cuadrada de 32 l de capacidad. Halla las dimensiones de la caja que precisa menor cantidad de chapa.



La función que queremo maximizar es el área de la caja.

$$A = x^2 + 4x\cdot y$$

Por otro lado, como $V = 32l \Rightarrow x^2\cdot y = 32$

Por tanto $y = 32/x^2$

Podemos escribir $A = x^2 + 4\cdot x\cdot \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}$

$= \frac{x^3+128}{x}$

Derivamos: $A' = \frac{3x^2\cdot x - x^3 - 128}{x^2} = \frac{2x^3-128}{x^2}$

$\frac{2x^3-128}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 = 128$

$x^3 = 64$

$\boxed{x = 4}$

	0	4	$+\infty$
A'	—	+	
A	↘	↗	

↳ Es un mínimo.

Como $y = 32/x^2 = \frac{32}{16} = 2$

Sol: La caja debe tener 4dm de ancho y 2dm de alto

CAPÍTULO 3 : INTEGRAL INDEFINIDA.

3.1: Función Primitiva de una función. Concepto de Integral.

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real.
Llamamos función primitiva de $f(x)$ a otra función $F(x)$ que cumpla que:

$$F'(x) = f(x).$$

Es decir:

$$\boxed{F \text{ es primitiva de } f \iff F'(x) = f(x)}$$

Ejemplo: Sea $f(x) = 2x$

Entonces $F(x) = x^2$ es primitiva de $f(x)$ puesto que

$$F'(x) = 2x = f(x).$$

Sin embargo, no es la única función que es primitiva de f puesto que $G(x) = x^2 + 7$ también lo es. (Al derivar, $G'(x) = 2x = f(x)$).

* En general, todas las funciones de la forma

$$F(x) = x^2 + C \; ; \; C \in \mathbb{R}$$

cumplen que son primitivas de f.
A todo este conjunto de soluciones, se le llama INTEGRAL INDEFINIDA DE f (con respecto a x) y se escribe $\int f(x)\,dx$.

En nuestro ejemplo:

$$\int 2x\,dx = x^2 + C \; ; \; C \in \mathbb{R}.$$

3.2.- Propiedades de la Integral.

- $\int 0\,dx = K \in \mathbb{R}$
- Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y f y g son funciones integrables:

$$\boxed{\int(\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \cdot \int f(x)dx + \mu \int g(x)\,dx}$$

(Linealidad de la Integral)

Ej: $\int(14x^3 + 7x)dx = 14 \cdot \int x^3 dx + 7 \cdot \int x\,dx =$

$$= \cancel{14}^{7} \cdot \frac{x^4}{\cancel{4}_{2}} + \frac{7x^2}{2} + C;\ C \in \mathbb{R}.$$

- Esta última propiedad es interesante para conseguir integrales inmediatas, ya que si $K \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$ podremos poner $\ulcorner \int f(x)\,dx = \frac{1}{K} \cdot \int K \cdot f(x)\,dx \lrcorner$

Por ejemplo, para $\int x^3 dx$ sabemos que $(x^4)' = 4x^3$ por lo que podremos poner $\int x^3 dx = \frac{1}{4} \cdot \int 4x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C;\ C \in \mathbb{R}$

3.3.- Integrales de Funciones Elementales

- Integral de una constante: $(K \in \mathbb{R})$

$$\int K\,dx = Kx + C;\ C \in \mathbb{R}$$

- Integral de funciones potenciales (u es una función $n \in \mathbb{R}$, $n \neq -1$.)

$$\underset{(n \neq -1)}{\int u^n \cdot u'\,dx} = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C;\ C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C;\ C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{u'}{2\sqrt{u}}\,dx = \sqrt{u} + C;\ C \in \mathbb{R}.$$

- Integral de funciones exponenciales.

$$\int a^u \cdot u' \, dx = \frac{a^u}{\ln a} + C_1 ; C_1 \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{pmatrix}$$

$$\int e^u \cdot u' \, dx = e^u + C_1 ; C_1 \in \mathbb{R}$$

- Integral de funciones trigonométricas.

$$\int u' \cdot \operatorname{sen} u \, dx = -\cos u + C_1 ; C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int u' \cdot \cos u \, dx = \operatorname{sen} u + C_1 ; C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int u' \cdot (1 + tg^2 u) \, dx = \int \frac{u'}{\cos^2 u} dx = tg\, u + C_1 ; C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \operatorname{arc\,sen} u + C_1 ; C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arccos u + C_1 ; C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \operatorname{arctg} u + C_1 ; C_1 \in \mathbb{R}$$

3.4.- Métodos de Integración.

• Integración por partes.

Usaremos este método si tenemos

$$\int u \cdot dv$$

donde dv es una función sencilla de integrar. Se verifica que:

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$$

Ejemplo: $I = \int x \cdot \ln x \, dx$

$u = \ln x$	$du = \frac{1}{x} dx$
$dv = x dx$	$v = \frac{x^2}{2}$

$$I = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x \, dx =$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C_1 ; \ C_1 \in \mathbb{R}$$

* * *

• Integración por cambio de variable.

Se trata de definir una nueva variabte t en función de x y conseguir así algo más sencillo de integrar.

Ejemplo: $I = \int \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}} dx$

Llamamos $t = 1 + 3x^2$.
Entonces:

$$dt = 6x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{dt}{6}$$

Luego $I = \int \frac{dt}{6\sqrt{t}} = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{3}\sqrt{t} + C_1, \ C_1 \in \mathbb{R}$

Volvemos a deshacer el cambio y queda: $I = \frac{\sqrt{1+3x^2}}{3} + C_1, \ C_1 \in \mathbb{R}$

* * *

• Integración de Funciones Racionales.

supongamos que tenemos $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ P, Q polinomios.

* Si $gr(P) < gr(Q)$

se factoriza Q.

Si todas las raíces de Q son simples: $Q(x) = (x-a)(x-b)\cdots(x-n)$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A}{x-a} + \int \frac{B}{x-b} + \dots + \int \frac{N}{x-n}$$

Si alguna raíz es múltiple:

Por ejemplo $(x-a)^3$ tendremos que poner $\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3}$

* Si $gr(P) \geq gr(Q)$

se divide $\begin{array}{l|l} P & Q \\ \hline R & C \end{array} \Rightarrow P = Q \cdot C + R$

$$\frac{P}{Q} = C + \frac{R}{Q}$$

Luego $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)\,dx + \underbrace{\int \frac{R(x)}{Q(x)}}$

donde $gr(R) < gr(Q)$ y se aplica el primer apartado.

Ejemplo: $J = \int \frac{2x^4 - 4x^2 + 4x + 1}{x^3 - 3x + 2}\,dx$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{2x^4} + \cancel{0x^3} - 4x^2 + 4x + 1 & x^3 - 3x + 2 \\ \cline{2-2} -\cancel{2x^4} \quad\quad + 6x^2 - 4x & 2x \\ \hline \quad\quad 2x^2 \quad\quad + 1 & \end{array}$$

$$J = \underbrace{\int 2x\,dx}_{x^2} + \underbrace{\int \frac{2x^2+1}{x^3-3x+2}\,dx}_{J}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \end{array} \quad x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2 \cdot (x+2)$$

$$\frac{2x^2+1}{x^3-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+2)} = \frac{A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

Para $x = -2$ $\quad 2(-2)^2 + 1 = C\cdot(-2-1)^2 \Rightarrow \boxed{C = 1}$

Para $x = 1$ $\quad 2\cdot 1^2 + 1 = B\cdot(1+2) \Rightarrow \boxed{B = 1}$ $\quad \boxed{A = 1}$

Para $x = 0$ $\quad 2\cdot 0^2 + 1 = A(-1)\cdot(2) + 1\cdot(0+2) + 1\cdot(0-1)^2 \rightarrow 1 = -2A + 2 + 1$

$$J = \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int \frac{1}{x+2}dx = \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \ln|x+2| + K;\ K \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = x^2 + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \ln|x+2| + C;\ C \in \mathbb{R}}$$

- Integrales cíclicas

A veces, sobre toda al realizar una integracion por partes, ocurre que volvemos a encontrarnos con la integral original. En tal caso, llamaremos a dicha integral I e intentaremos despejarla como si fuera la incognita de una ecuacion

Ejemplo:

$$I = \int e^x \cdot \operatorname{sen} x \, dx \; ; \quad \text{Por partes:} \quad \begin{array}{l|l} u = e^x & du = e^x dx \\ \hline dv = \operatorname{sen} x \, dx & v = -\cos x \end{array}$$

$$I = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \; ; \quad \text{Por partes:} \quad \begin{array}{l|l} u = e^x & du = e^x dx \\ \hline dv = \cos x \, dx & v = \operatorname{sen} x \end{array}$$

$$I = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \underbrace{\int e^x \operatorname{sen} x \, dx}_{I}$$

$$I = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - I$$

$$2I = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

$$I = \frac{-e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x}{2} + C \; ; \; C \in \mathbb{R}$$

CAPITULO 4: INTEGRALES DEFINIDAS

4.1.- Sumas inferiores y sumas superiores. Concepto de Integral Definida

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una funcion acotada en $[a,b]$.

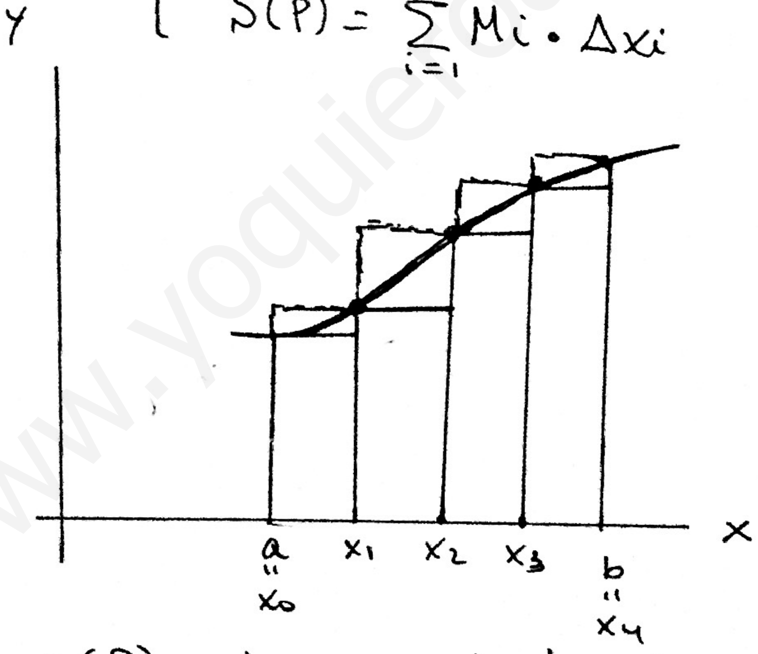
Consideremos $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una particion de $[a,b]$ $(x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b)$

Denotemos por m_i al infimo de la funcion en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, y M_i al supremo en dicho intervalo

- Llamamos suma inferior y suma superior (de Darboux) de f correspondiente a la particion P a:

$$\begin{cases} s(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i \\ S(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i \end{cases}$$

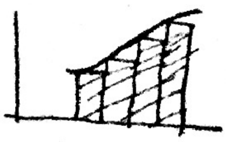
Ej.



s(P) es la suma de las áreas de los rectángulos que están por debajo de la curva.

S(P) es la suma del área de los rectángulos que tienen su base superior encima de la curva.

s(P)



S(P)

NOTA: (si algún rectángulo queda debajo del eje X su área la expresaremos con un número negativo) si existe una sucesión P_n de particiones de $[a,b]$ tal que $\lim_{n\to\infty} s(P_n) = \lim_{n\to\infty} S(P_n)$ a dicho límite se le llama INTEGRAL DEFINIDA DE f EN $[a,b]$. y se denota:

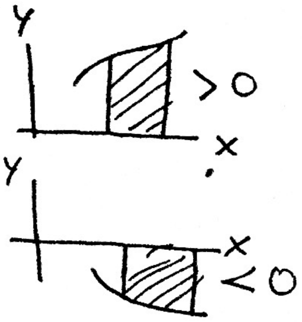
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s(P_n) = \lim_{n\to\infty} S(P_n)}$$

4.2: Propiedades de la integral definida.

1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2) si $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

si $f(x) \leq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq 0$



3) si c es un punto del intervalo $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)\,dx$$

(Aditividad respecto al intervalo)

4) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

5) si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y f y g funciones acotadas en $[a,b]$:

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx + \mu\int_a^b g(x)\,dx.$$

6) si $f(x) \leq g(x)$ en $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

4.3.- Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

Sea f continua en [a,b]. Consideremos

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad ; \; x \in [a,b]$$

Entonces F es derivable en (a,b) y se verifica que

$$F'(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in (a,b)$$

- Se cumple además que si $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)\,dt$

entonces $F'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x)$

Ejemplos: Si $F(x) = \int_0^x (\operatorname{sen} t + e^t)\,dt$ entonces

$$F'(x) = \operatorname{sen} x + e^x$$

si $F(x) = \int_0^{x^2} \cos t\,dt \Rightarrow F'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$

4.4.- Regla de Barrow (2º Teorema Fundamental)

Sea f una función continua en [a,b], y sea F(x) una primitiva de f(x). Entonces:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

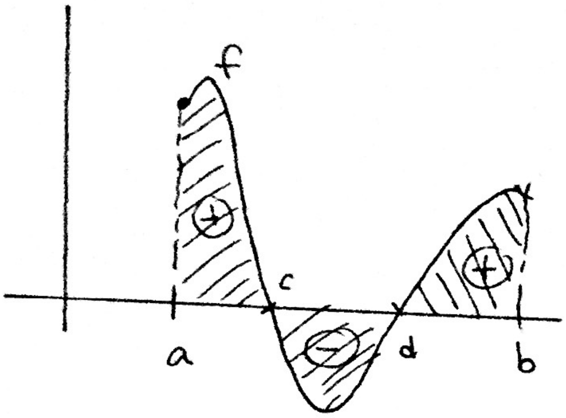
Ejemplo: Sea $f(x) = x^3 + 7$

$$\int_2^3 (x^3+7)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + 7x\right|_2^3 = \left(\frac{3^4}{4} + 7\cdot 3\right) - \left(\frac{2^4}{4} + 7\cdot 2\right)$$

$$= \frac{81}{4} + 21 - \frac{16}{4} - 14 = \frac{65}{4} + \frac{28}{4} = \boxed{\frac{93}{4}}$$

4.5 - Área encerrada bajo una curva.

Supongamos que queremos calcular el área siguiente:

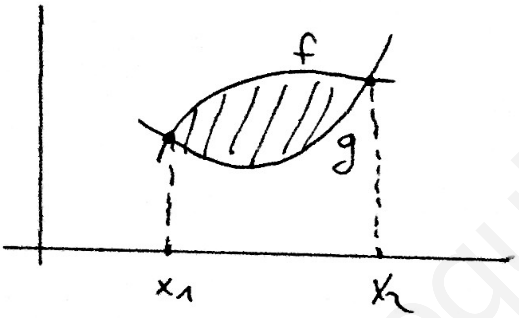


Habrá que tener en cuenta que $\int_c^d f(x)\,dx < 0$

Por tanto, tendremos que poner; para asegurarnos:

$$\text{Área} = \left|\int_a^c f(x)\,dx\right| + \left|\int_c^d f(x)\,dx\right| + \left|\int_d^b f(x)\,dx\right|$$

4.6 - Área encerrada entre dos curvas.



Si queremos calcular el área acotada entre dos curvas, en primer lugar tendremos que calcular en qué puntos se cortan. Para ello igualamos $f(x) = g(x)$ y resolvemos la ecuación.

Una vez sepamos en qué abcisa se cortan (supongamos x_1 y x_2) Calcularemos $\int_{a=x_1}^{b=x_2}(f(x)-g(x))\,dx$ escribiendo siempre primero la función que quede por encima de la otra. Si no estamos seguros de cuál es usamos el valor absoluto y así eliminamos ese problema. En general: $\text{Área} = \left|\int_{x_1}^{x_2}(f(x)-g(x))\,dx\right|$

Veamos a continuación un ejemplo:

Ejemplo: Halla el área comprendida entre $f(x) = x+2$ y $g(x) = x^2$.

1) Igualamos $x^2 = x+2 \leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{1\pm 3}{2} \begin{array}{l} \nearrow 2. \\ \searrow -1. \end{array}$$

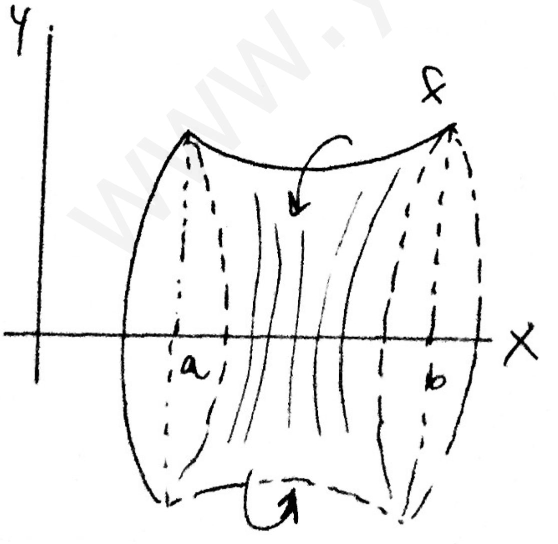
2) Calculamos $\left| \int_{-1}^{2} (x+2-x^2)\,dx \right|$

$$\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(2+4-\frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6}\right) = \boxed{\frac{27}{6}\,u^2}$$

4.6.- Volúmenes

Si queremos calcular el volumen que genera un "trozo" de curva al girar sobre el eje X haremos lo siguiente:



$$\boxed{V = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2\,dx.}$$

CAPÍTULO 5: MATRICES

5.1.- Concepto de Matriz

Una matriz A de orden $m \times n$ es un conjunto de $m \cdot n$ elementos pertenecientes a un conjunto K, dispuestos en m filas y n columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Este curso, siempre será $K = \mathbb{R}$.

Ejemplos:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Matriz de 2x3

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ Matriz de 4x2

CASOS PARTICULARES

- Si $m=1$ la matriz se llama MATRIZ FILA.

  Ej: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

- Si $n=1$ la matriz se llama MATRIZ COLUMNA.

  Ej: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Si $m \neq n$ la matriz se llama MATRIZ RECTANGULAR

  Ej: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

- Si $m=n$ la matriz se llama MATRIZ CUADRADA.

  Ej: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ En este caso, se diría que la matriz es de orden 3, en vez de 3x3.

- Aparte de su estructura, las matrices también se pueden clasificar según los elementos que la forman:

- **MATRIZ NULA**: Aquella matriz en la que todos sus elementos son cero.

Ejs: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ son matrices nulas.

- **MATRIZ IDENTIDAD**: Es una matriz cuadrada en la que los elementos de la diagonal principal (que es la diagonal que va desde la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha) son unos, y todos los demás elementos son cero.

Ej: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matriz identidad de orden 2

$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matriz identidad de orden 4.

- **MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR**: Es una matriz cuadrada en la que los elementos que están por debajo de la diagonal principal son todos nulos.

$(a_{ij} = 0 \quad \forall \quad i > j)$ Ej: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

- **MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR**: Es una matriz cuadrada en la que los elementos que están por encima de la diagonal principal son todos nulos.

$(a_{ij} = 0 \quad \forall \, i < j)$ Ej: $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

NOTA: Llamamos TRAZA de una matriz cuadrada a la suma de todos los elementos de su diagonal principal.

Ej: $$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix} \; ; \; Tr(A) = -2+6+3 = 7.$$

5.2.- Operaciones con matrices.

- **Igualdad:** Dos matrices A y B del mismo orden se dice que son iguales si $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i,j$

Ej: Hallar x, y, z para que A y B sean iguales.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} x-5 & 2 & y \\ 4 & z+8 & 6 \end{pmatrix}$$

Debe ser
$$x-5=1 \Rightarrow x=6$$
$$y=3$$
$$z+8=5 \Rightarrow z=-3$$

- **Suma de matrices**

Solo podemos sumar/restar matrices del mismo orden.

Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ entonces

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$$

Ej:
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Producto de una matriz por un número.**

Sea $A = (a_{ij})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$; Entonces

$$\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij})$$

Ej:
$$(-2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & +2 \\ -4 & -10 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Producto de matrices

Para poder multiplicar dos matrices, el número de columnas de la primera, debe coincidir con el número de filas de la segunda.

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p}$$

deben coincidir.

El resultado será una matriz C que tendrá el número de filas de A y el número de columnas de B.

$$\boxed{A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}}$$

Cada elemento c_{ij} de C vendrá dado por:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Veámoslo con un ejemplo:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A(2\times 3)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{B(3\times 3)}$$

El resultado será una matriz $C_{2\times 3}$

$$C = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + (-1)\cdot 4 + 5\cdot 0 & 2\cdot(-2) + (-1)\cdot 1 + 5\cdot 1 & 2\cdot 3 + (-1)\cdot 2 + 5\cdot(-2) \\ 4\cdot 1 + 2\cdot 4 + 3\cdot 0 & 4\cdot(-2) + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 & 4\cdot 3 + 2\cdot 2 + 3\cdot(-2) \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 12 & -3 & 10 \end{pmatrix}$$

Resulta evidente ver que el producto de matrices NO ES CONMUTATIVO. Es decir, que en general $A\cdot B \neq B\cdot A$.

En el ejemplo anterior, ni siquiera sería posible hacer

$$B_{3\times 3} \cdot A_{2\times 3}$$

No son iguales.

- Potencia de matrices: sea A cuadrada y $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A \quad n \text{ veces.}$$

Por tanto, para elevar una matriz a un número, NO hay que elevar cada elemento a dicho número, sino que lo que haremos será ir multiplicando la matriz por sí misma las veces que haga falta.
(y es obvio también que solo podremos hacer potencias de matrices cuadradas)

Ej: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; Calcular A^3.

$$A^3 = A \cdot A \cdot A$$

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{A \cdot A} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -26 & 27 \end{pmatrix} = A^3}$$

NOTA: Si ocurre que $A^n = A \ \forall n \in \mathbb{N}$ se dice que A es idempotente.

- Elemento neutro y elemento simétrico de una matriz cuadrada

El elemento neutro de una matriz respecto al producto es aquella matriz tal que al multiplicarla por ella (a izq. o der.) no la varía. En el caso de las matrices cuadradas, el elemento neutro es la matriz identidad.

Ej: Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ el elemento neutro respecto al producto es $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se cumple que $A \bullet I_2 = I_2 \bullet A = A$.

También puede comprobarse que cualquier matriz identidad In cumple que $(I_n)^m = I_n \quad \forall m,n \in \mathbb{N}$

- Decimos que una matriz cuadrada A de orden n tiene elemento inverso, o simplemente inversa, si existe otra matriz A^{-1} del mismo orden que cumpla que

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I_n.$$

En tal caso se dice que A es una matriz REGULAR.

En caso de no existir dicha matriz inversa, diremos que A es una matriz SINGULAR.

Es decir que:

$$\boxed{\text{Si } A \text{ es una matriz cuadrada y } \begin{array}{l} \nearrow \exists A^{-1} \Rightarrow A \text{ Regular} \\ \searrow \nexists A^{-1} \Rightarrow A \text{ singular.} \end{array}}$$

Más adelante estudiaremos como saber si una matriz tiene o no inversa, y como calcularla.

- <u>Trasposición de matrices</u>

Dada una matriz $A_{m\times n}$, se define $(A_{m\times n})^t$ a aquella matriz tal que $a^t_{ij} = a_{ji}$.

(Es decir, con las filas y las columnas intercambiadas).

Ej.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Propiedades:

a) $(A+B)^t = A^t + B^t$

b) $(A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t$

c) $(A^t)^t = A$

d) $(k\cdot A)^t = k\cdot A^t$

- Si $A^t = A$ se dice que A es simétrica.
- Si $A^t = -A$ se dice que A es antisimétrica
- Si $A^t = A^{-1}$ se dice que A es ortogonal

5.3.- Rango de una matriz

Decimos que una fila F de una matriz depende linealmente de otras filas $F', F'', \dots, F^n$ $(n \in \mathbb{N})$ si existen $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$F = k_1 \cdot F' + k_2 \cdot F'' + \dots + k_n F^n .$$

[Se dice también que F es combinación lineal de esas otras filas.]

(Análoga definición para columnas)

Ejemplo: En la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$ la tercera fila depende linealmente de las otras dos, ya que se puede comprobar que $F_3 = 2 \cdot F_1 + 1 \cdot F_2$

NOTA: Una fila o una columna de ceros dependerá linealmente de cualquier otra.

Llamamos RANGO de una matriz al número de filas (o columnas) que son linealmente independientes.

Ejemplo: La matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ tiene rango 2, ya que sus dos filas son linealmente independientes. No existe ningún k tal que $(1\ 2\ 3) = k \cdot (2\ 4\ 7)$ o $(2\ 4\ 7) = k \cdot (1\ 2\ 3)$

- De todos modos, por lo general, no suele ser sencillo ver "a simple vista" el rango de una matriz.
- Por ejemplo, hay un caso en el que sí es sencillo, si hay un triángulo de ceros, por ejemplo, el rango coincidirá con el número de filas de la matriz:

Ej: $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ tiene rango 3.

- Para los demás casos, adivinaremos su rango con determinantes, que los veremos en el próximo capítulo.

5.4.- Matriz Inversa

Como dijimos en un apartado anterior, hay matrices cuadradas que tienen inversa y otras que no. Pues bien, podemos afirmar que una matriz A de orden n tiene inversa si su rango es también n.

Para calcularla, existen dos métodos, uno por determinantes, que lo veremos en el próximo capítulo, y el llamado método de Gauss-Jordan.

MÉTODO GAUSS-JORDAN.

Se trata de transformar nuestra matriz en una matriz identidad mediante transformaciones elementales (intercambiar filas, sustituir una fila por una combinación lineal de otras, o multiplicar o dividir cualquier fila por un número distinto de cero)

Estas transformaciones las haremos también en una matriz identidad que colocaremos a la derecha de nuestra matriz. Al final del proceso, a la izquierda nos quedará la matriz identidad, y a la derecha la matriz inversa de nuestra matriz original.

Ejemplo: Hallar la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ -6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 + 3F_1]{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 + F_2]{}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 - 5F_3]{F_1 + 2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 - F_2]{}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 10 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(-1)\cdot F_2 \\ (-1)\cdot F_3}]{\frac{1}{2}\cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 5 & 3 & 7/2 \\ 7 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{matrix}}_{A^{-1}}$$

- NOTA: Si en el proceso obtenemos alguna vez alguna fila o columna entera de ceros diremos que la matriz A no tiene inversa.

5.5.- Ecuaciones matriciales.

Por lo general, se resuelven de forma análoga a las ecuaciones a las que estamos acostumbrados, pero tenemos que tener cuidado porque cuando en una ecuacion "pasamos dividiendo" lo que estamos haciendo realmente es multiplicar por el elemento inverso.

Y al ser matrices, hay que tener también en cuenta si multiplicamos por la izquierda o por la derecha; y que las únicas matrices que pueden tener inversa son las matrices cuadradas.

Ejemplo: Sean A, B, C matrices. (A matriz cuadrada con inversa)

Despejar X de $AX + C = B$

$$AX + C = B$$
$$AX = B - C$$
$$A^{-1} \cdot (AX) = A^{-1} \cdot (B - C)$$
$$(A^{-1} \cdot A) X = A^{-1} \cdot (B - C)$$
$$I \cdot X = A^{-1} \cdot (B - C)$$
$$\boxed{X = A^{-1} \cdot (B - C)}$$

CAPÍTULO 6: DETERMINANTES

NOTA: Los determinantes solo están definidos para MATRICES CUADRADAS.

6. 1: Determinantes de orden 2 y 3.

- Consideremos la siguiente matriz cuadrada:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

se define su determinante como:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \in \mathbb{R}$$

Ej:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 5 = \underline{\underline{-13}}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-2) - (-3) \cdot 4 = \underline{\underline{14}}$$

- Para calcular determinantes de orden 3 usaremos la denominada REGLA DE SARRUS:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{12} a_{23} a_{31}) -$$
$$- (a_{13} a_{22} a_{31} + a_{12} a_{21} a_{33} + a_{23} a_{32} a_{11})$$

Ej:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3(-1)) - (1 \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1)$$
$$= (-1) - (9) = \underline{\underline{-10}}$$

- También pueden calcularse los determinantes de orden 3 usando los adjuntos, concepto que veremos más adelante.

6.2.- Propiedades de los determinantes (de cualquier orden)

NOTA: Todas las matrices de las que hablamos son cuadradas.

1) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

$$|A| = |A^t|$$

2) Al intercambiar filas o columnas en un determinante, el determinante cambia de signo.

Ej: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

* De aquí podemos deducir que si una matriz tiene dos filas o dos columnas iguales, su determinante debe ser 0.

3) Si multiplicamos una fila o una columna de una matriz por un número, su determinante queda multiplicado por dicho número.

Ej: Si $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y multiplicamos la segunda fila por 2, entonces:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 8 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

* De aquí podemos deducir que si una matriz tiene una fila o una columna de ceros, su determinante debe ser 0.

4) Si una matriz tiene una fila o columna de ceros su determinante es nulo.

5) Si una matriz tiene dos filas o columnas iguales su determinante es nulo.

6) Si una matriz tiene dos filas o columnas proporcionales su determinante es nulo.

Ej: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0$ porque $F_2 = 2 \cdot F_1$

7) si a una fila o columna de una matriz se le suma una combinación lineal de las demás, su determinante no varía.

Ej:
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \leftarrow F_1+F_2+F_3.$$

8) si una matriz tiene una fila o columna que es comb. lineal de las demás, su determinante es nulo.

9) Para cualquier fila o columna de un determinante se cumple que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+j & h+k & i+l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ j & k & l \end{vmatrix}$$

⑩ $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$; De aquí se deduce que:

- $|I| = 1$
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$; siempre que exista A^{-1}.

Dem// • $|A| = |A \cdot I| = |A| \cdot |I| \Rightarrow |I| = 1$ (si $|A| \neq 0$)

• $|I| = |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| \Rightarrow$

$|A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ (si $|A| \neq 0$)

* Comprobamos aquí también que para que exista A^{-1} es necesario que $|A| \neq 0$.

6.3.- Menor Complementario y Adjunto

Sea A una matriz cuadrada de orden n.

- Llamamos menor complementario del elemento a_{ij} al determinante de orden $n-1$ que resulta de tachar la fila i y la columna j de A. Se denota α_{ij}.

Ej:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \alpha_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \quad \alpha_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\alpha_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} ; \alpha_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} ; \alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} ; \alpha_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} ; \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

- Llamamos adjunto de a_{ij} a la expresión

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$$

Ej: En el ejercicio anterior; $A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$$

<u>TRUCO</u>: si $i+j$ es par se queda positivo y si es impar, negativo.

En una matriz 3x3 los signos de los adjuntos serían:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

y en una de 2x2

$$\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$$

6.4.- Cálculo de determinantes por adjuntos. (válido para determinantes de cualquier orden)

Podemos calcular el valor de un determinante a partir de sus adjuntos; el determinante coincidirá con la suma de los productos de los elementos de una fila (o columna) cualquiera por sus respectivos adjuntos.

Ej:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

¡OJO CON LOS SIGNOS DE LOS ADJUNTOS!

$$= 2 \cdot 5 + 4 \cdot (1) = 14 //$$

6.5.- Cálculo del Rango de una matriz con determinantes

El rango de una matriz cualquiera (no necesariamente cuadrada) coincide con el orden del mayor determinante no nulo que encontremos en la matriz.

Ej:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$; matriz de 2x3.

obviamente, a lo sumo el rango puede ser 2 (no podemos hacer determinantes de orden 3 en esta matriz)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ; \ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow rg A = 2 //.$$

Si todos los determinantes de orden 2 hubieran sido cero, buscaríamos determinantes de orden 1.

Ej: Halla el rango de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ; \ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0 \ ; \ \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ; \ \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow rg A < 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg A = 2 //.$$

6.6.- Cálculo de la inversa de una matriz.

Podemos calcular la inversa de una matriz a partir de su determinante y sus adjuntos.

Sea una matriz cuadrada A tal que $|A| \neq 0$.

Consideremos

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \dots & A_{2n} \\ \vdots & & \\ A_{m1} & A_{m2} \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{adj}(A)^t.}$$

Ej: Hallar la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & -3 \end{pmatrix}$

1.) Hallamos $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 54. \neq 0 \Rightarrow$ Existe inversa.

2.) Calculamos

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 25 & -9 & 4 \\ 7 & -9 & -14 \\ -1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Hacemos

$$\operatorname{adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 25 & 7 & -1 \\ -9 & -9 & 9 \\ 4 & -14 & 2 \end{pmatrix}$$

4) Finalmente

$$A^{-1} = \frac{1}{54} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 7 & -1 \\ -9 & -9 & 9 \\ 4 & -14 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{54} & \frac{7}{54} & -\frac{1}{54} \\ -1/6 & -1/6 & 1/6 \\ \frac{2}{27} & -\frac{7}{27} & \frac{1}{27} \end{pmatrix}$$

CAPÍTULO 7: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

7.1.- Ecuaciones lineales

Una ecuacion lineal de n incognitas es una expresión algebraica de la forma:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$$

donde $a_i, b \in \mathbb{R}$.

Llamamos solución de la ecuación a cada conjunto

$$\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \subset \mathbb{R}$$

que cumpla que

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_n c_n = b$$

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incognitas es el conjunto formado por dichas ecuaciones.

Una solución será el conjunto $\{c_1, \ldots, c_n\} \subset \mathbb{R}$ que cumpla todas y cada una de las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij} son los coeficientes del sistema

b_i son los términos independientes. (si todos los $b_i = 0$ el sistema se dice que es HOMOGÉNEO)

Según el número de soluciones los sistemas se clasifican:

- COMPATIBLES (Tienen solución)
  - COMPATIBLES DETERMINADOS. (Tienen una única solución)
  - COMPATIBLES INDETERMINADOS (Tienen infinitas soluciones)
- INCOMPATIBLES (No tienen solución)

7.2: Método de Gauss para resolver sistemas

Los sistemas más sencillos de resolver son los que están dispuestos de forma escalonada.

Ej:
$$\left\{\begin{aligned} x+y+z&=2\\ 2y+z&=4\\ 3z&=6 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left|\begin{aligned} &z=6/3=2 \,//\\ &2y+2=4 \Rightarrow y=1 \,//\\ &x+1+2=2 \Rightarrow x=-1 \,// \end{aligned}\right.$$

El método de Gauss consiste en transformar un sistema en otro equivalente que sea escalonado mediante transformaciones elementales.

Además, es útil usar una matriz para colocar los coeficientes y los términos independientes para simplificar el proceso.

Ej: Resolver por Gauss
$$\left\{\begin{aligned} x-3y+2z&=-1\\ -2x+4z&=-6\\ x-2y+z&=0 \end{aligned}\right.$$

1.) Escribimos en forma de matriz:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & -3 & 2 & -1\\ -2 & 0 & 4 & -6\\ \underbrace{1 \quad -2 \quad 1}_{\text{matriz de los coeficientes}} & & & 0 \end{array}\right)}_{\text{matriz ampliada}}$$

2) Transformamos la matriz en una triangular superior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1\\ -2 & 0 & 4 & -6\\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{transformaciones elementales}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

3) Resolvemos el sistema desde abajo hasta arriba:

$$2z=-2 \Rightarrow z=-1 \,/$$
$$y-z=1 \Rightarrow y=0 \,//$$
$$x-3y+2z=-1 \Rightarrow x=1 \,//$$

NOTA: Si haciendo transformaciones elementales nos queda una fila entera de ceros en la matriz ampliada, el sistema será C. Indet.
Si hay una fila de ceros pero el término indep. no es cero, será INCOMP.

Ej: Resolver $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x - y = 2 \\ 3x + 2z = 3 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nos queda una fila de ceros → sistema comp. indet.

En este caso llamamos $z = \lambda \in \mathbb{R}$ y resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + 2\lambda = 1 \\ -3y - 4\lambda = 0 \end{array}\right| \rightarrow y = -\frac{4}{3}\lambda$$

$$x = 1 + \frac{4}{3}\lambda - 2\lambda$$

$$x = \frac{3 + 4\lambda - 6\lambda}{3} = \frac{-2\lambda + 3}{3}$$

soluciones: $\begin{cases} x = \dfrac{-2\lambda + 3}{3} \\ y = -\dfrac{4\lambda}{3} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Ej: Resolver $\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ -3x + y + z = 0 \\ -y + 2z = -1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[F_3-F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Es INCOMPATIBLE //}$$

(¡Nos queda $0 = -2$!!!)

7. 3 - Teorema de Rouché-Fröbenius.

Nos sirve para estudiar si un sistema es compatible o no antes de empezar a resolverlo.

Sea un sistema de la forma $A \cdot X = B$ donde A es la matriz de los coeficientes, X es la matriz columna formada por las incognitas, y B la matriz columna formada por los términos independientes.

Llamemos A^* a la matriz ampliada formada por los coeficientes y los términos independientes.

Entonces:

Diremos que el sistema es COMPATIBLE si $rg(A) = rg(A^*)$

- Además, si $rg(A) = rg(A^*) = n^{\underline{o}}$ de incognitas diremos que el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.
- Si $rg(A) = rg(A^*) < n^{\underline{o}}$ incognitas el sistema será COMPATIBLE INDETERMINADO.
- Si $rg(A) \neq rg(A^*)$ entonces el sistema es INCOMPATIBLE

NOTA: $rg(A^*)$ siempre será mayor o igual que $rg(A)$.

Ej: Discutir el siguiente sistema: $\left\{\begin{array}{l} x - 3y + z = 2 \\ -2x + 2z = 0 \\ x - 4y - 3z = -2 \end{array}\right.$

$$\overbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & -3 & -2 \end{array}\right)}^{A^*} \qquad \underbrace{}_{A}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 28 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3$$

Como $rg(A^*) \geq rg(A) \Rightarrow rg(A^*) = 3$

Por tanto como $rg(A) = rg(A^*) = n^{\underline{o}}$ incognitas (3) el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

Ej: Discutir $\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ -2x + 2z = 0 \\ -x - 3y + 3z = 2 \end{cases}$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\begin{matrix}1 & -3 & 1\\ -2 & 0 & 2\\ -1 & -3 & 3\end{matrix}}^{A}} & \begin{matrix}2\\0\\2\end{matrix}\end{array}\right)}_{A^*}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A) \leq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2.$$

Estudiemos ahora $rg(A^*)$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A^*) \leq 2$$

y como $rg(A^*) \geq rg(A) \Rightarrow rg(A^*) = 2$

Al ser $rg(A) = rg(A^*) <$ nº incógnitas decimos que el sistema es compatible indeterminado.

———·———

Ej: Discutir $\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ -2x + 2z = 0 \\ x - 3y + 3z = 8 \end{cases}$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\begin{matrix}1 & -3 & 1\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & -3 & 3\end{matrix}}^{A}} & \begin{matrix}2\\0\\8\end{matrix}\end{array}\right)}_{A^*}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A) \leq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 8 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 3.$$

Como $rg(A) \neq rg(A^*)$ entonces el sistema es INCOMPATIBLE.

———·———

7.4.- Regla de Cramer para resolver sistemas

supongamos que tenemos un sistema de n ecuaciones con n incognitas. Llamemos A a la matriz de los coeficientes. Entonces, si $|A| \neq 0$ la solucion del sistema puede expresarse de la siguiente forma:

$$x_i = \frac{|A_{x_i}|}{|A|} \qquad 1 \leq i \leq n$$

donde A_{x_i} es la matriz que resulta de sustituir la columna de la incognita x_i por los términos independientes.

Veámoslo en un ejemplo:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -2 \\ -2x \quad\; - 2z = 0 \\ 3x - 2y - 3z = 4 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$|A| = 32$

$|A| \neq 0 \Rightarrow$

$rg(A) = rg(A^*) = 3$

S.C.D.

Podemos resolverlo por Cramer:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 32$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 32 \quad \Rightarrow$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -32$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{32}{32} = 1 \,//$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{32}{32} = 1 \,//$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-32}{32} = -1 \,//$$

Aunque el método se realiza para sistemas compatibles determinados es posible adaptarlo a sistemas compat. indeterminados. Lo veremos en un ejemplo.

Ej: Resolver $\begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ -2x + y - z = 1 \\ x + 2y - 2z = 3 \end{cases}$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix}3 & 1 & -1\\ -2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -2\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}2\\1\\3\end{matrix}\end{array}\right)}_{A^*}$$

$$\begin{vmatrix}3 & 1 & -1\\ -2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A) \leq 2$$

$$(*)\begin{vmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(A) = rg(A^*) = 2 \Rightarrow S.C.I.$$

Eliminamos del sistema la fila que queda fuera del determinante (*), que es la tercera.

Nos queda:

$$\begin{cases}3x + y - z = 2\\ -2x + y - z = 1\end{cases}$$

y llamamos $z = \lambda \in \mathbb{R}$

(la incógnita de la columna que queda fuera del determinante (*))

$$\begin{cases}3x + y = 2 + \lambda\\ -2x + y = 1 + \lambda\end{cases}$$

← Aplicamos Cramer a este sistema.

$$|A| = \begin{vmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix} = 5.$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix}2+\lambda & 1\\ 1+\lambda & 1\end{vmatrix} = 1$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix}3 & 2+\lambda\\ -2 & 1+\lambda\end{vmatrix} = 7 + 5\lambda$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{1}{5}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{7+5\lambda}{5} \quad ; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$z = \lambda$$

7.5.- Discusión de sistemas con parámetros

Veamos un ejemplo de este problema, muy típico en los ejercicios de Selectividad:

- Discutir y resolver el sistema en función de λ:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ 2x \qquad -4z = -4 \\ \quad -y + \lambda z = 1 \end{cases} \qquad \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & \lambda & 1 \end{array}\right)}_{A^*}$$

(la submatriz de las tres primeras columnas es A)

1.) Calculamos $|A|$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda - 12 .$$

Ahora igualamos dicha expresión a 0: $2\lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\lambda = 6}}$

2) Estudiamos el sistema según ese valor:

$\boxed{\text{Si } \lambda \neq 6}$ $\Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ El sistema es compat. determinado.

Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} |A_x| = 4 - 4\lambda \\ |A_y| = 12 - 12\lambda \\ |A_z| = -10 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{4-4\lambda}{2\lambda-12} \\ y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{12-12\lambda}{2\lambda-12} \\ z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = \dfrac{-10}{2\lambda-12} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Si } \lambda = 6}$ Nos queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

$|A| = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{por adjuntos de la tercera fila}}{=} -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(-12) + (+2) = 14 \neq 0$$

$\Rightarrow rg(A^*) = 3$

Luego en este caso el sistema es INCOMPATIBLE.

CAPÍTULO 8: GEOMETRÍA EN EL ESPACIO $\mathbb{R}^3$

8.1: Vectores en el espacio

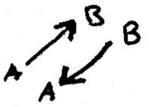
Consideremos dos puntos del espacio, A y B.

Llamamos vector $\vec{AB}$ al zegmento orientado que empieza en A y acabo en B

Un vector tiene:

- Módulo: La longitud del zegmento. Se denota $|\vec{AB}|$
- Dirección: Es la que determina la recta sobre la que está situada el vector.
- Sentido: Se obtiene al fijar el origen y el extremo del vector.

- Si tenemos un vector $\vec{AB}$, el vector $\vec{BA}$ tendría el sentido contrario. Se dice que $\vec{AB}$ y $\vec{BA}$ son vectores opuestos y ze denota $\vec{AB} = -\vec{BA}$



- Los vectores que tienen el mismo módulo, dirección y sentido ze dice que son equipolentes. (A efectos prácticos podemos decir que es el mismo vector)

COORDENADAS O COMPONENTES DE UN VECTOR

Consideremos un vector $\vec{AB}$ tal que las coordenadas de A son (x_1, y_1, z_1) y las coordenadas de B son (x_2, y_2, z_2)

Entonces las componentes (o coordenadas) del vector $\vec{AB}$ son $\vec{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ (extremo menos origen)

Ej: Sea $A(2, 1, 5)$ y $B(7, -2, 3)$

Entonces $\vec{AB}(5, -3, -2)$

- Si solo conocemos las componentes del vector podemos designarlos por letras minúsculas. Por ejemplo, el vector $\vec{v}(5, -3, -2)$.

- PARALELISMO ENTRE VECTORES

Dos vectores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ son paralelos si sus componentes son proporcionales. Es decir:

$$\text{Si } \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3} \Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$$

Ej: $\vec{u}(-2,10,1)$
$\vec{v}(6,30,-3)$ son proporcionales/paralelos ya que

$$\frac{-2}{6} = \frac{10}{-30} = \frac{1}{-3}$$

- MÓDULO DE UN VECTOR

Sea $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ un vector del espacio $\mathbb{R}^3$. Su módulo viene dado por: $\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}}$

Ej: Calcular el módulo del vector $\vec{AB}$ donde $A(2,0,1)$
$B(1,3,0)$

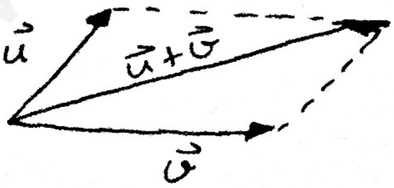
Primero calculamos las componentes de $\vec{AB}(-1,3,-1)$

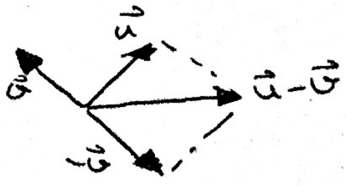
Y ahora: $|\vec{AB}| = \sqrt{(-1)^2+3^2+(-1)^2} = \sqrt{11}$ u.

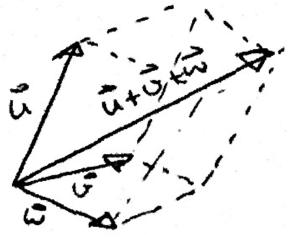
- OPERACIONES CON VECTORES

Sean $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w}(w_1,w_2,w_3)$ vectores.

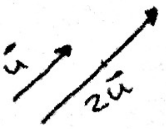
•) $\vec{u} \pm \vec{v} = (u_1 \pm v_1, u_2 \pm v_2, u_3 \pm v_3)$







•) $K \cdot \vec{u} = (Ku_1, Ku_2, Ku_3)$ Ej: si $\vec{u}(1,2,3)$
$2\vec{u}(2,4,6)$



8.2.- Combinación lineal de vectores. Concepto de Base.

- se dice que un vector $\vec{v}$ es combinación lineal de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ si existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{u}_n$$

Ej: $\vec{u}(3,4,6)$ es comb. lineal de $\vec{a}(1,0,0)$ $\vec{b}(0,2,0)$ y $\vec{c}(0,0,3)$

ya que $(3,4,6) = 3\cdot(1,0,0) + 2\cdot(0,2,0) + 2\cdot(0,0,3)$

- se dice que un conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ de vectores es linealmente independiente si ninguno puede escribirse como combinación lineal.

Esto implica que si un conjunto de vectores es l. indep. y se verifica que

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0}$$

deben ser todos los $\lambda_i = 0$. (condición necesaria y suficiente)

Ej: Comprobar que $(2,1,1)$, $(0,3,2)$ y $(3,0,0)$ son l. indep.

Hacemos $x\cdot(2,1,1) + y(0,3,2) + z\cdot(3,0,0) = (0,0,0)$

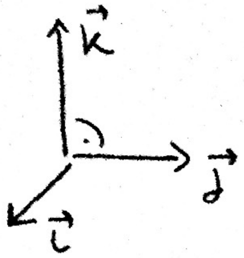
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + 3z = 0 \\ \left.\begin{array}{l} x + 3y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow z = 0 \end{array}\right.$$

Luego los vectores son lin. independientes.

- Un conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ se dice que es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$ si cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ se puede expresar como una combinación lineal de ellos. Si además, dicho conjunto es linealmente independiente se dice que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ forma una BASE.

NOTA: En $\mathbb{R}^3$, todo conjunto de tres vectores l. independientes forma una base de $\mathbb{R}^3$.

- La base más usada en $\mathbb{R}^3$ es la denominada base canónica formada por los vectores $\{\vec{i}(1,0,0)\,;\ \vec{j}(0,1,0)\,;\ \vec{k}(0,0,1)\}$



Son perpendiculares entre sí (ortogonales) y su módulo es 1.

Las componentes de cualquier vector coinciden con sus coordenadas en esta base.

Ej: $\vec{v}(3,2,-5) = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$.

- En $\mathbb{R}^3$, el máximo número de vectores l. independientes es 3; y cualquier sistema generador debe contar como mínimo con 3 vectores. Esto significa que:
  - Cualquier base de $\mathbb{R}^3$ debe tener exactamente 3 vectores.
  - Cualquier conjunto de más de tres vectores en $\mathbb{R}^3$ es linealmente dependiente.

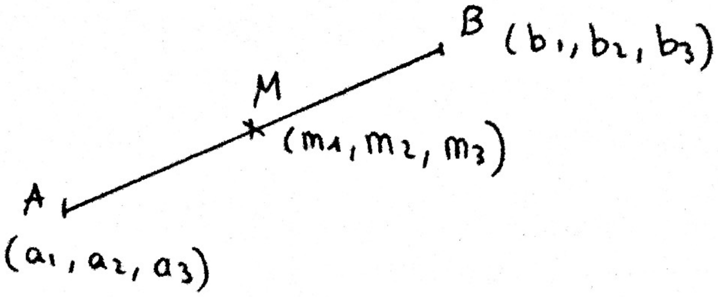
- Es bastante obvio que si colocamos los vectores en una matriz el número de vectores l. independientes coincidirá con el rango de la matriz.

Ej: La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ tiene rango 3,

luego hay tres vectores (filas) que son l. independientes.

8.3 - Punto medio de un segmento y punto simétrico.

- **PUNTO MEDIO**: Sea M el p. medio del segmento $\overline{AB}$



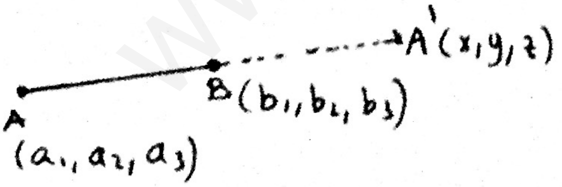
Al ser $\vec{AM} = \vec{MB}$ (mismo módulo, dirección y sentido) podemos igualar sus componentes.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{AM}(m_1 - a_1, m_2 - a_2, m_3 - a_3) \\ \vec{MB}(b_1 - m_1, b_2 - m_2, b_3 - m_3) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m_1 - a_1 = b_1 - m_1 \\ m_2 - a_2 = b_2 - m_2 \\ m_3 - a_3 = b_3 - m_3 \end{array}\right.$$

Despejando m_1, m_2 y m_3 tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2} \\ m_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2} \\ m_3 = \dfrac{a_3 + b_3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}\right)$$

- **PUNTO SIMÉTRICO**; Llamemos A' al simétrico de A respecto a B.



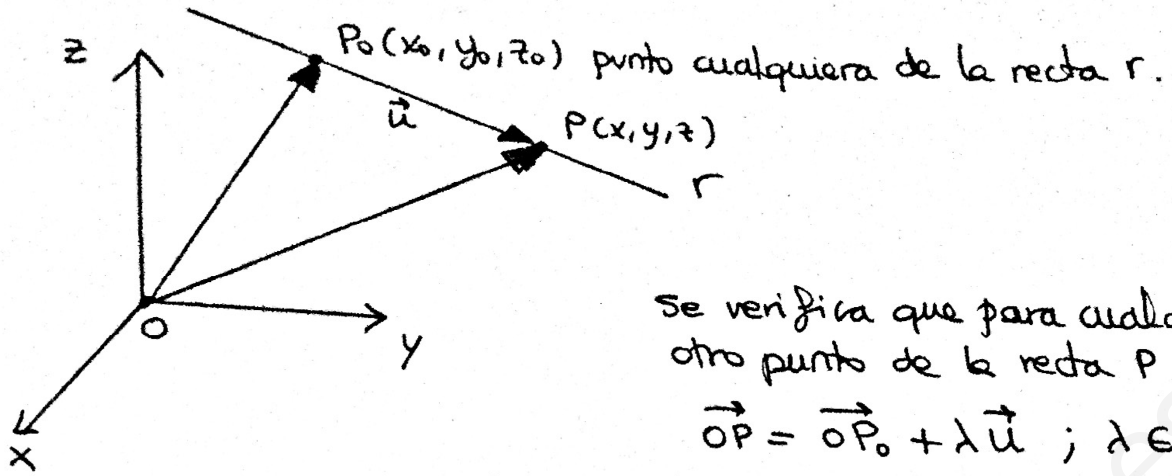
Como B queda justo entre A y A' en su punto medio, podemos decir que

$$b_1 = \frac{a_1 + x}{2} \; ; \; b_2 = \frac{a_2 + y}{2} \; ; \; b_3 = \frac{a_3 + z}{2}$$

Despejando x, y, z se obtiene que el simétrico de A respecto de B es:

$$A'(2b_1 - a_1, 2b_2 - a_2, 2b_3 - a_3)$$

8.4: Ecuaciones de la Recta en $\mathbb{R}^3$



Se verifica que para cualquier otro punto de la recta P:

$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + \lambda \vec{u} \quad ; \lambda \in \mathbb{R}$$

El vector $\vec{u}$ es el llamado vector director de la recta (es cualquier vector que esté en la dirección de la recta) y generalmente lo denotaremos por $\vec{d_r}$.

Tenemos entonces que:

$$r \equiv \boxed{(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda\cdot(u_1,u_2,u_3)} \quad ; \lambda \in \mathbb{R}$$

ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA

A partir de dicha ecuación ze deduce que:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 \end{cases}} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

$\Longrightarrow$ ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA.

Si despejamos λ en las ecuaciones paramétricas ze obtiene:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}}$$

ECUACIÓN CONTINUA DE LA RECTA.

y si igualamos y despejamos dos a dos dicha ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-x_0}{u_1} = \dfrac{y-y_0}{u_2} \Longrightarrow u_2 x - u_1 y = u_2 x_0 - u_1 y_0 \\ \dfrac{x-x_0}{u_1} = \dfrac{z-z_0}{u_3} \Longrightarrow u_3 x - u_1 z = u_3 x_0 - u_1 z_0 \end{array}\right|$$

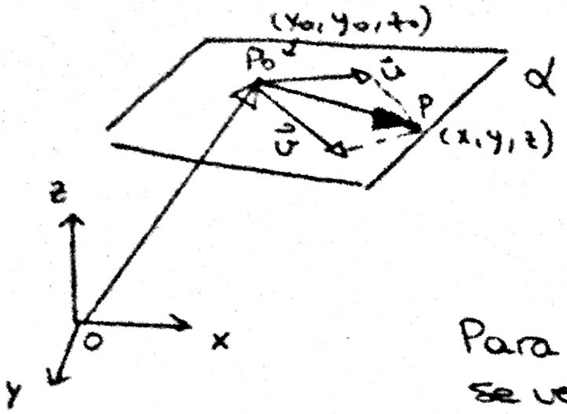
Ecuaciones implícitas de la recte

Que en general tendrán esta forma:

$$\boxed{\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}}$$

Ecuaciones IMPLÍCITAS DE LA RECTA.

8.5.- Ecuaciones del plano en $\mathbb{R}^3$



Sea P_0 un punto cualquiera del plano α.
$\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores del plano (coplanarios) no proporcionales

Para cualquier punto P del plano α se verifica que:

$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \quad ; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Usando coordenadas nos queda:

$$\alpha \equiv \boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)}$$

ECUACIÓN VECTORIAL DEL PLANO. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Efectuando las operaciones se obtiene:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \quad ; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}}$$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS DEL PLANO

Como $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu \cdot (v_1, v_2, v_3)$ esos vectores serán linealmente dependientes.

Luego:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0}$$

ECUACIÓN GENERAL DEL PLANO.

Si efectuamos el determinante nos queda una expresión del tipo:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

EC. GENERAL DEL PLANO. (forma despejada)

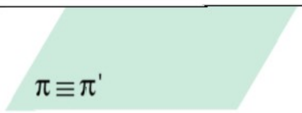
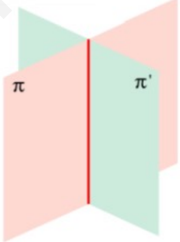
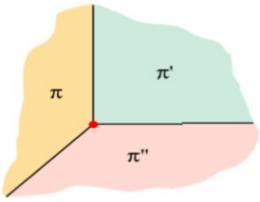
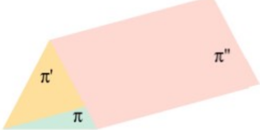
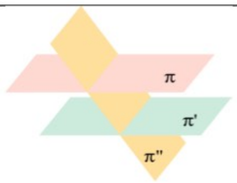
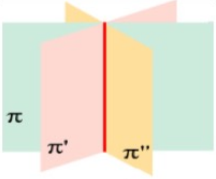
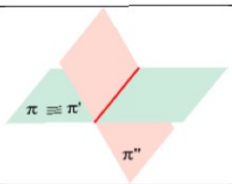
8.6.- Posiciones Relativas

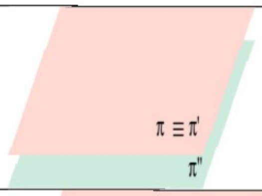
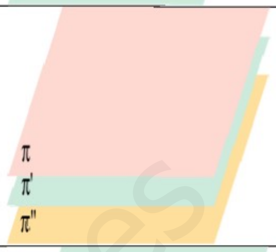
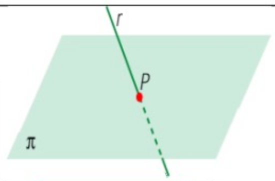
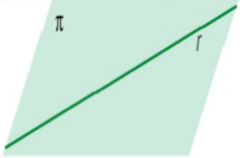
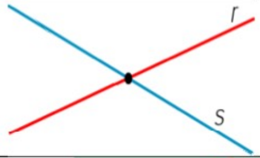
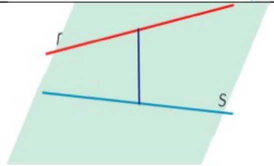
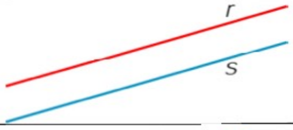
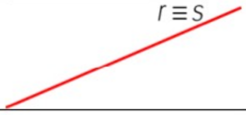
A continuación, veremos cuadros correspondientes al estudio de posiciones relativas de los siguientes tipos:

- Posición relativa de dos rectas
- Posición relativa de dos planos
- Posición relativas de tres planos
- Posición relativa de recta y plano

NOTA: En todos ellos, cuando aparece M^* se refiere a la matriz ampliada de M con los términos independientes.

Resumen de posiciones relativas en el espacio

DOS PLANOS π: Ax+By+CZ+D=0 π’:A’x+B’y+C’z+D’=0 M=$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$	rangM=rangM*=1	Planos coincidentes	 Planos coincidentes Son el mismo plano
	rangM=1≠ rangM*=2	Planos paralelos	 Planos paralelos No tienen puntos comunes
	rangM=rangM*=2	Planos secantes	 Planos secantes Tienen una recta común
TRES PLANOS π: Ax+By+CZ+D=0 π’:A’x+B’y+C’z+D’=0 π’’:A’’x+B’’y+C’’z+D’’=0 M=$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$	rangM=rangM*=3	Planos secantes en un punto formando un triedro	
	rangM=2≠ rangM*=3 (los 3 planos no tienen ningún punto en común)	Planos secantes 2 a 2 formando una superficie prismática.	
		2 planos paralelos y el otro los corta.	
	rangM=2=rang M* (planos que se cortan en una recta)	Planos distintos que se cortan en una recta.	
		2 de los planos son coincidentes y el otro los corta.	

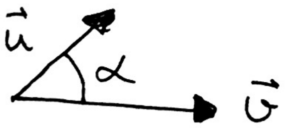
TRES PLANOS π: Ax+By+CZ+D=0 π':A'x+B'y+C'z+D'=0 π'':A''x+B''y+C''z+D''=0 $M=\begin{pmatrix}A & B & C\\ A' & B' & C'\\ A'' & B'' & C''\end{pmatrix}$	rangM =1≠ rang M*=2 (los 3 planos no tienen ningún punto en común)	2 planos coincidentes y el otro paralelo.	
		Planos paralelos y distintos 2 a2	
	rangM=1=rangoM*	Planos coincidentes (3 ecuaciones equivalentes del mismo plano).	
RECTA Y PLANO $\left.\begin{matrix}Ax+By+Cz+D=0\\ A'x+B'y+C'z+D'=0\end{matrix}\right\}:r$ Π : A''x+B''y+C''z+D''=0 $M=\begin{pmatrix}A & B & C\\ A' & B' & C'\\ A'' & B'' & C''\end{pmatrix}$	rangM=rangM*=3	Recta y plano secantes. (P=r∩ π=pto de corte).	
	rangM=2≠ rangM*=3	Recta y plano paralelos	
	rangM=rangM*=2	Recta contenida en el plano	
DOS RECTAS r (A , $\vec{v}$) s (B , $\vec{w}$)	rango ($\vec{v}$, $\vec{w}$)=2 rango($\vec{v}$, $\vec{w}$, $\overrightarrow{AB}$)=2	Rectas secantes (tienen un único punto en común)	
	rango ($\vec{v}$, $\vec{w}$)=2 rango($\vec{v}$, $\vec{w}$, $\overrightarrow{AB}$)=3	Rectas que se cruzan (no tienen nigúnpto en común)	
	rango ($\vec{v}$, $\vec{w}$)=1 rango($\vec{v}$, $\vec{w}$, $\overrightarrow{AB}$)=2	Rectas paralelas	
	rango ($\vec{v}$, $\vec{w}$)=1 rango($\vec{v}$, $\vec{w}$, $\overrightarrow{AB}$)=1	Rectas coincidentes	

CAPÍTULO 9 PRODUCTO ESCALAR, VECTORIAL Y MIXTO

9.1.- Producto Escalar.

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Se define su producto escalar como:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha ,$$ siendo α el ángulo comprendido entre ambos vectores.



Si tenemos sus componentes $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$; $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$ podemos definir

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

(EL PRODUCTO ESCALAR ES UN <u>NÚMERO</u>)

- Como consecuencia de la primera definición se obtiene que si dos vectores son perpendiculares entonces su producto escalar es CERO.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \bullet \vec{v} = 0 \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} \text{ no nulos.}$$

Aplicaciones del producto escalar.

- Podemos usarlo para calcular el ángulo comprendido entre dos vectores no nulos, como vimos en el curso pasado.

Si $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$ entonces

$$|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

$$\Rightarrow \left[\cos\alpha = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \right]$$

Luego α será el arco cuyo coseno es dicha expresión.

- Sirve para demostrar que en la ecuación de un plano $\alpha \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, el vector (A,B,C) es un vector perpendicular a dicho plano. (Lo llamamos vector normal al plano)

Veámoslo: Supongamos que $P(p_1, p_2, p_3)$ y $Q(q_1, q_2, q_3)$ son dos puntos del plano α.

Entonces:

$$Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D = 0$$
$$Aq_1 + Bq_2 + Cq_3 + D = 0$$

Si restamos ambas expresiones:

$$A(p_1 - q_1) + B(p_2 - q_2) + C(p_3 - q_3) = 0$$

Es decir que

$$(A, B, C) \bullet \big(\underbrace{p_1 - q_1,\ p_2 - q_2,\ p_3 - q_3}_{\text{vector } \overrightarrow{QP} \text{ perteneciente al plano } \alpha}\big) = 0$$

Luego (A, B, C) es el vector normal al plano α.

Ejemplos:

1) Halla la recta que pasa por $P(0,2,0)$ y es $\perp$ al plano $2x - 3y + z - 1 = 0$.

El vector normal al plano será el vector director de nuestra recta, luego

$\vec{dr}(2, -3, 1)$ y pasa por P.

La recta buscada es $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \ ; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$

2) Halla el plano perpendicular a $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{1}$ que contiene a $P(0,2,0)$

Como el plano es perpendicular a la recta, el vector normal del plano será el vector director de la recta, luego $\vec{n}(A, B, C) = \vec{n}(2, -3, 1)$

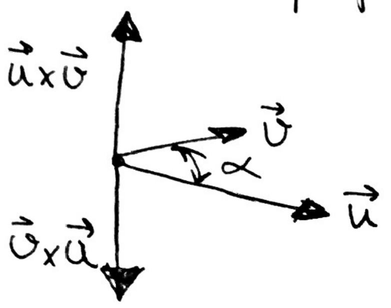
El plano será $2x - 3y + z + D = 0$

Como pasa por $P(0,2,0) \Rightarrow 2 \cdot 0 - 3 \cdot 2 + 0 + D = 0 \rightarrow D = 6$

El plano será $\pi \equiv 2x - 3y + z + 6 = 0$

9.2 - Producto Vectorial

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$. El producto vectorial $\vec{u}\times\vec{v}$ es otro vector perpendicular a ambos



El sentido del vector es hacia arriba si multiplicamos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en sentido antihorario y hacia abajo si multiplicamos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en sentido horario

(pensar en un tapón de rosca de una botella)

- El módulo del producto vectorial es $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot \operatorname{sen}\alpha$

(Aunque el módulo es obviamente un número el prod. vectorial es un vector)

- Geométricamente, el módulo del vector $\vec{u}\times\vec{v}$ coincide con el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

- Si sabemos las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se puede definir el producto vectorial así:

$\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$
$\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$

$$\boxed{\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}}$$

<u>Ejemplo</u>: Hallar $\vec{u}\times\vec{v}$ siendo $\vec{u}(1,2,1)$ $\vec{v}(0,2,-2)$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

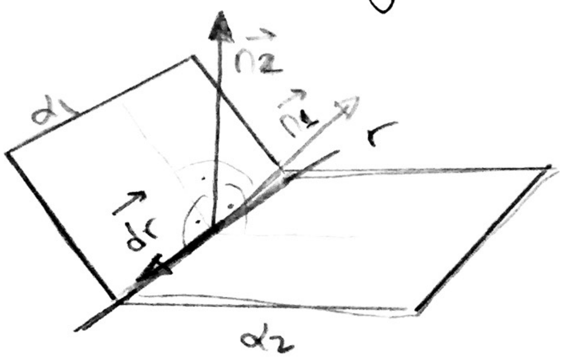
$$= -6\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} = (-6, 2, 2).$$

Aplicaciones del producto vectorial

- Nos servirá para calcular un vector perpendicular a otros dos vectores dados.

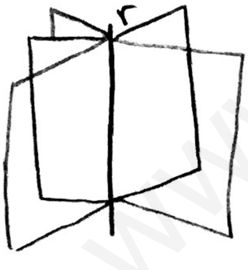
- Podremos obtener de modo sencillo el vector director de una recta dadas sus ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases} \quad ; \text{ El vector director será } \underset{\vec{n}_1}{(A, B, C)} \times \underset{\vec{n}_2}{(A', B', C')}$$



9.3.- El Haz de planos.

- HAZ DE PLANOS SECANTES A r.



Sea $r \equiv \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

si introducimos un nuevo plano del haz, debe tener el sistema resultante la misma solución que el original, luego la nueva ecuación será combinación lineal de las otras dos.

Es decir:

$$A'x+B'y+C'z+D' = \lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)$$

para cualquier $A'x+B'y+C'z+D'$ perteneciente al haz.

Si $\lambda \neq 0$ podemos dividir por él y se tiene que:

$$\boxed{A'x+B'y+C'z+D' = A_1x+B_1y+C_1z+D_1+K\cdot(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)}$$

(donde $K = \mu/\lambda$)

Ejemplo: Hallar la ecuación del plano que pasa por $P(3,2,-3)$ y que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+3y-z-9=0 \\ -x+2y+3z+2=0 \end{cases}$

Como el plano buscado contiene a r, debe pertenecer al haz de planos de r. Por tanto tiene que tener esta forma:

$$(2x+3y-z-9)+k\cdot(-x+2y+3z+2)=0$$

y como pasa por $P(3,2,-3)$:

$$(2\cdot 3+3\cdot 2-(-3)-9)+k\cdot(-3+2\cdot 2+3\cdot(-3)+2)=0$$

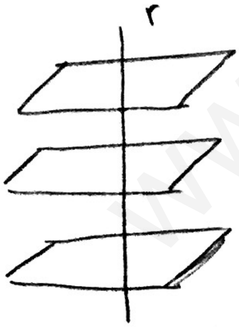
Despejando k se obtiene que $k=1$. Luego la ecuación del plano buscado es:

$$(2x+3y-z-9)+1\cdot(-x+2y+3z+2)=0$$

y efectuando las operaciones queda:

$$\boxed{x+5y+2z-7=0}$$

- HAZ DE PLANOS PERPENDICULARES A r



Si el vector director de $\vec{r}$ es $\vec{d_r}(A,B,C)$ como será perpendicular a todos lo planos dicho vector será el vector normal de todos ellos.

Luego el haz de planos $\perp$ a r será:

$$Ax+By+Cz+D=0;\ D\in\mathbb{R}.$$

9.4.- Ángulos en el espacio.

★ ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS.

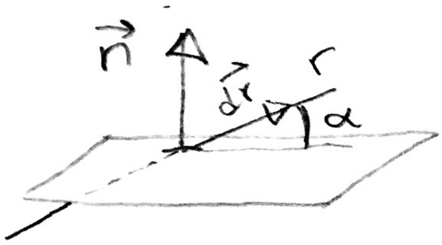
El ángulo entre dos rectas coincidirá con el ángulo comprendido entre sus dos vectores directores.

r con v. director $\vec{dr}$
s con v. director $\vec{ds}$

$$\alpha = \arc\cos\left(\frac{|\vec{dr} \bullet \vec{ds}|}{|\vec{dr}|\cdot|\vec{ds}|}\right)$$

↙ valor absoluto

★ ÁNGULO ENTRE RECTA Y PLANO.



sea $\vec{n}$ el vector normal del plano
$\vec{dr}$ el vector director de la recta
Calculamos el ángulo entre $\vec{n}$ y $\vec{dr}$:

$$\beta = \arc\cos\left(\frac{|\vec{dr} \bullet \vec{n}|}{|\vec{dr}|\cdot|\vec{n}|}\right)$$

El ángulo buscado será $\alpha = 90 - \beta$.

★ ÁNGULO ENTRE DOS PLANOS.

El ángulo entre dos planos coincidirá con el ángulo comprendido entre sus dos vectores normales.

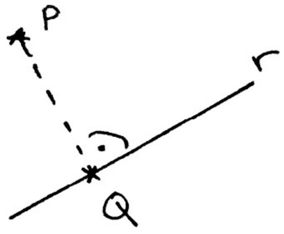
Sea el plano Π_1 con vector normal $\vec{n_1}$
Sea el plano Π_2 con vector normal $\vec{n_2}$

Entonces el ángulo α comprendido entre ambos planos será:

$$\alpha = \arc\cos\left(\frac{|\vec{n_1} \bullet \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}\right)$$

9.5 - Proyecciones Ortogonales.

* PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO SOBRE UNA RECTA.



La proyección ortogonal de un punto P sobre una recta r es otro punto Q de la recta con el que se cumple que $\vec{PQ} \perp \vec{d_r}$

(O equivalentemente $\vec{PQ} \bullet \vec{d_r} = 0$)

Para calcularlo, haremos lo siguiente:

1.) Hallamos la ecuación del plano que es perpendicular a r y que pasa por el punto P.

2) Hallamos el punto de corte recta-plano.

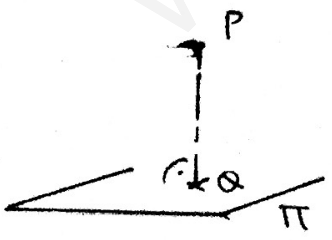
OTRA FORMA: si r está en forma paramétrica $r \equiv \begin{cases} x = x_0 + u_1\lambda \\ y = y_0 + u_2\lambda \\ z = z_0 + u_3\lambda \end{cases}$

como $Q \in r$ debe ser $Q(x_0 + u_1\lambda, y_0 + u_2\lambda, z_0 + u_3\lambda)$

Calculamos el vector $\vec{PQ}$ y despejamos λ de la ecuación $\vec{PQ} \bullet \vec{d_r} = 0$. Una vez hecho, sustituimos λ en Q y tendremos el punto buscado.

* * *

* PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO SOBRE UN PLANO.



La proyección ortogonal de un punto P sobre un plano π es un punto Q del plano con el que se cumple que el vector $\vec{PQ}$ es perpendicular al plano π; $\vec{PQ} \perp \pi$

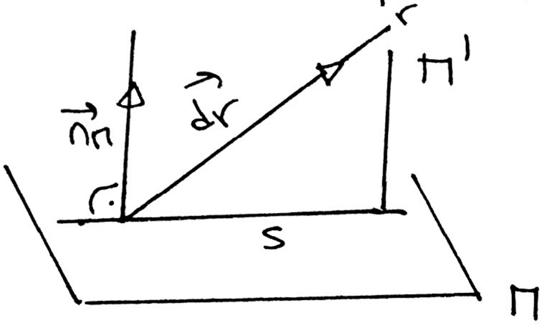
Para calcularlo, haremos lo siguiente:

1.) Hallamos la ecuación de la recta que pasa por P y que tiene como vector director el vector normal de π.

2.) Hallamos el punto de corte recta-plano.

* PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UNA RECTA SOBRE UN PLANO.

La proyección ortogonal de una recta r sobre un plano π es otra recta s contenida en el plano π y en el plano π' perpendicular a π que contiene a r.



Para calcularla, haremos lo siguiente:

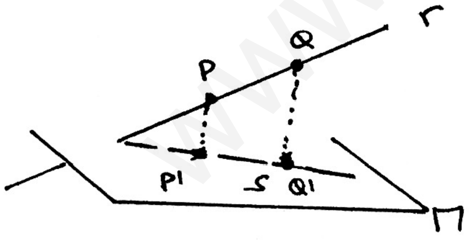
1·) Calculamos:
- Un vector director de la recta r, $\vec{d_r}$
- Un vector normal del plano π, $\vec{n_\pi}$
- Un punto cualquiera de r, P.

2·) Hallamos la ecuación del plano π' que contiene a los vectores $\vec{d_r}$ y $\vec{n_\pi}$ y que pasa por el punto P.

3) Dicha ecuación junto con la ecuación del plano π formarán las ecuaciones implícitas de la recta s.

—— · ——

OTRA FORMA:



- Tomamos dos puntos de la recta r. (P y Q)
- Hallamos la proyección ortogonal de dichos puntos sobre el plano π. (P' y Q')
- Hallamos la ecuacion de la recta que pasa por esos dos puntos del plano π, P' y Q'.

—— · ——

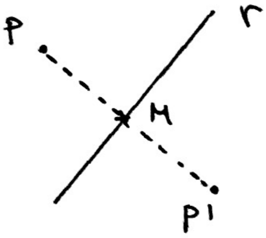
9.6.- Puntos simétricos.

* PUNTO SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO A OTRO.

Ya lo vimos en el tema anterior.

El punto simétrico de $A(a_1, a_2, a_3)$ respecto de $B(b_1, b_2, b_3)$ viene dado por $A'(2b_1 - a_1, 2b_2 - a_2, 2b_3 - a_3)$

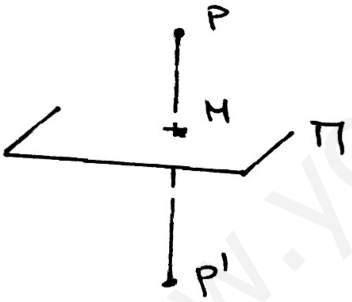
* PUNTO SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO A UNA RECTA.



1.) Calculamos la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r. (M)

2.) Hallamos el punto simétrico de P respecto de dicho punto M.

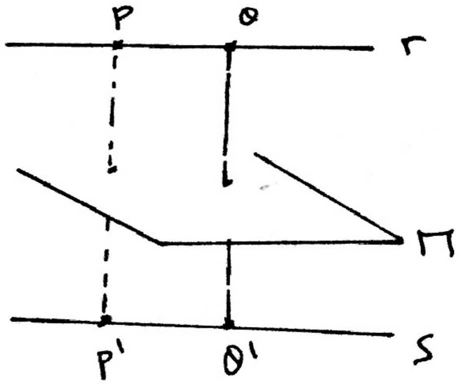
* PUNTO SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO A UN PLANO



1.) Calculamos la proyección ortogonal del punto P sobre el plano Π. (M)

2.) Hallamos el punto simétrico de P respecto de dicho punto M.

* RECTA SIMÉTRICA DE OTRA RECTA RESPECTO A UN PLANO



1.) Obtenemos dos puntos cualesquiera de la recta r. (P y Q)

2.) Hallamos sus simétricos respecto al plano Π (P' y Q')

3.) Calculamos la ecuación de la recta que pasa por P' y Q'.

(También válido para rectas no paralelas a Π)

9.7: Distancias.

- **DISTANCIA DE PUNTO A PUNTO**

$A(a_1, a_2, a_3)$

$B(b_1, b_2, b_3)$

$$\boxed{d(A,B) = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}}$$

- **DISTANCIA PUNTO A RECTA** : $\left\{ \begin{array}{l} \text{FÓRMULA} \longrightarrow \\ \text{Tomamos } A \in r \end{array} \right.$ $\boxed{d(P,r) = \frac{|\vec{d_r} \times \vec{AP}|}{|\vec{d_r}|}}$

  1.) Calculamos la proyección ortogonal del punto sobre la recta.

  2.) Aplicamos la distancia de punto a punto.

- **DISTANCIA PUNTO A PLANO**

  1.) Calculamos la proyección ortogonal del punto sobre el plano.

  2.) Aplicamos la distancia de punto a punto.

* OTRA FORMA:

Si $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$

$P(p_1, p_2, p_3)$

la formula para calcular la distancia de P a π es:

$$\boxed{d(P,\pi) = \frac{|Ap_1+Bp_2+Cp_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

- **DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS PARALELOS**

  1.) Se escoge un punto cualquiera de uno de los planos

  2.) Se calcula la distancia desde ese punto hasta el otro plano con la formula anterior.

- **DISTANCIA ENTRE RECTA Y PLANO PARALELOS**

  1.) Se escoge un punto cualquiera de la recta.

  2.) Se aplica la distancia de punto a plano.

- DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS.

•) Si las rectas son secantes o coincidentes, la distancia será cero.

•) Si las rectas son paralelas:

Se escoge un punto cualquiera de una de ellas y se aplica la distancia de dicho punto a la otra recta.

•) Si las rectas se cruzan:

- Se toman los dos vectores directores de las rectas y un punto cualquiera de una de ellas.
- Se calcula el plano que pasa por dicho punto y tiene como vectores directores los de las dos rectas.
- Una vez hecho esto, se calcula un punto de la otra recta y se aplica la distancia de dicho punto al plano.

Ej: Halla la distancia entre $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+4}{-1}$ y $s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$ sabiendo que se cruzan.

Escogemos un punto de r $P(0,1,-4)$
y los dos vectores directores $\vec{dr}(2,4,-1)$ y $\vec{ds}(1,1,4)$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z+4 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot x - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot (y-1) + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot (z+4) = 0$$

$$\Rightarrow 17x - (9)\cdot(y-1) + (-2)\cdot(z+4) = 0$$

$$17x - 9y + 9 - 2z - 8 = 0 \Longrightarrow \pi \equiv 17x - 9y - 2z + 1 = 0$$

Tomamos un punto Q de s ; $Q(0,0,0)$

$$d(r,s) = d(Q,\pi) = \frac{|5\cdot 0 - 9\cdot 0 - 2\cdot 0 + 1|}{\sqrt{17^2+9^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{374}} = \frac{\sqrt{374}}{374}\ u \text{ //}$$

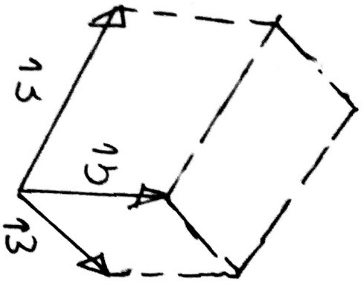
9.8.- Producto mixto

Sean $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores de $\mathbb{R}^3$.

Definimos el producto mixto de $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ a:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

- Geométricamente, es el volumen del paralelepipedo que generan $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$.

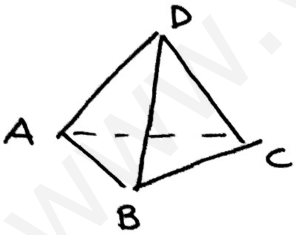


$$\boxed{V = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]}$$

(en valor absoluto)

Más aplicaciones:

- Sirve para calcular el volumen de un tetraedro



$$\boxed{V = \frac{[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]}{6}}$$

(en valor absoluto)

- Sirve para calcular la distancia entre dos rectas que se cruzan.

Sean r y s rectas que se cruzan y $A \in r$, $B \in s$.

$$\boxed{d(r,s) = \frac{[\vec{AB}, \vec{d_r}, \vec{d_s}]}{|\vec{d_r} \times \vec{d_s}|}}$$

(en valor absoluto)

* * *