Nombre:_____________________________________________________

ACLARACIONES PREVIAS

- No se permite el uso de calculadoras que representen gráficas.
- NOTA: Es importante hacer un pequeño dibujo que represente la situación de cada ejercicio y explicar claramente los pasos que se desarrollarán.

1. Consideramos el paralelepípedo cuyas bases son ABCD y EFGH, siendo los vértices A(1,1,1), B(2,1,1), C(2,4,1) y E(1,2,7). Halla el área de una de las bases, el volumen del paralelepípedo y la altura del paralelepípedo.
(3 puntos)

2. Sean la recta $r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$ y el plano $\pi \equiv 2x - y + kz = 0$.

   a) Calcular el valor de m y k para que la recta sea perpendicular al plano. (1 punto)
   b) Calcular m y k para que la recta esté contenida en el plano. (1 punto)

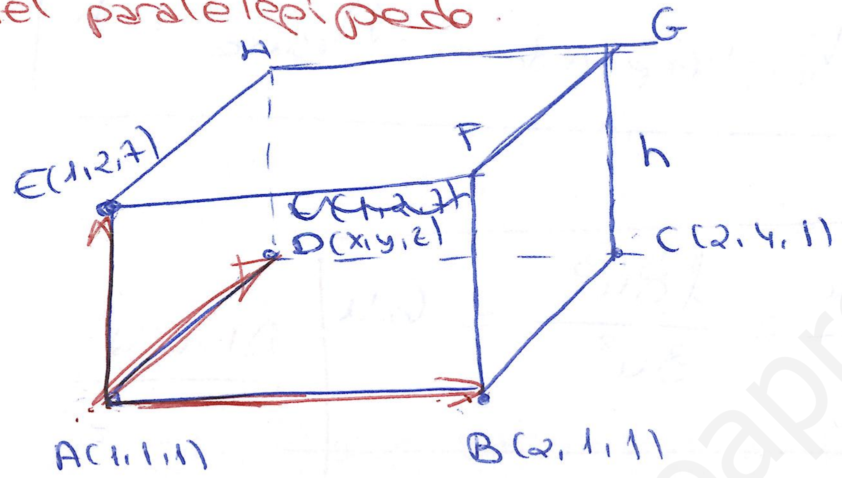
3. Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x + 2y = 2 \\ x = -2z \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = -y \\ y = z + 1 \end{cases}$.

   a) Determina las coordenadas del punto P en que se cortan $r_1$ y $r_2$ y la ecuación del plano que las contiene. (1,75 puntos)

   b) Escribe la ecuación de la recta s que pasa por el punto Q(2,0,1) y corta perpendicularmente a $r_1$. (1,5 puntos)

   c) Obtén las coordenadas del punto R, intersección de $r_1$ y s, y el área del triángulo de vértices P, Q, R. (1 punto) (1,75 puntos)

Consideramos un paralelepípedo cuyas bases son ABCD y EFGH, siendo los vértices A(1,1,1), B(2,1,1), C(2,4,1) y E(1,2,7). Halla el área de una de las bases, el volumen del paralelepípedo y la altura del paralelepípedo.




$$\vec{AB} = (1,0,0)$$

$$\vec{AD} = (0,3,0)$$

$$\vec{AB} = \vec{DC}$$

$$(1,0,0) = (2-x, 4-y, 1-z)$$

$2-x=1$; $x=1$

$4-y=0$; $y=4$

$1-z=0$; $z=1$

$D(1,4,1)$

$$\text{Área Base} \Rightarrow |\vec{AB} \times \vec{AD}| =$$

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3\vec{k} = (0,0,3)$$

$$\boxed{|\vec{AB} \times \vec{AD}| = \sqrt{0^2+0^2+3^2} = 3\ u^2}$$ Área de la base

$$|[\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}]| = \text{volumen paralelepípedo.}$$

$\vec{AB} = (1, 0, 0)$
$\vec{AD} = (0, 3, 0)$
$\vec{AE} = (0, 1, 6)$

$$V_{paralelepípedo} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \boxed{18\,u^3 = V}$$ Volumen

Por otro lado: $\boxed{V_{paralelepípedo} = A_{Base} \cdot h}$

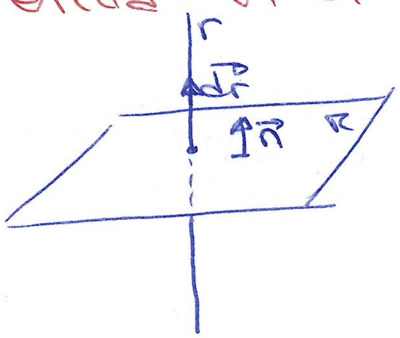
$$\boxed{h = \frac{V_{paralelepípedo}}{A_{Base}} = \frac{18u^3}{3u^2} = 6u}$$ Altura

* Sean la recta $r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$ y el plano $\pi \equiv 2x - y + kz = 0$.

a) Calcular el valor de $m$ y $k$ para que la recta sea perpendicular al plano.

b) Calcular $m$ y $k$ para que la recta esté contenida en el plano.

a)




Para que $r$ sea $\perp$ a $\pi$ $\Rightarrow$ $\vec{d_r}$ y $\vec{n}$ deben ser dos vectores proporcionales.

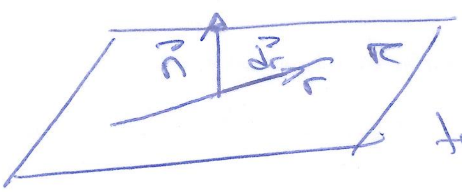
Sean $\vec{d_r} = (m, 4, 2)$ y $\vec{n} = (2, -1, k)$, como tienen que ser proporcionales, se tiene que verificar que

$$\frac{m}{2} = \frac{4}{-1} = \frac{2}{k} \Rightarrow \frac{m}{2} = -4; \boxed{m = -8}$$

$$\frac{2}{k} = -4; \boxed{k = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}}$$

Así si $\boxed{m = -8 \text{ y } k = -\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{r \perp \pi}$

b)




Para que $r \subset \pi$ se tiene que verificar que $\vec{n} \perp \vec{d_r}$.

Luego su producto escalar debe ser 0.

Sean $\vec{d_r} = (m, 4, 2)$ y $\vec{n} = (2, -1, k)$

$$\vec{d_r} \cdot \vec{n} = 2m - 4 + 2k = 2m + 2k - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{m + k = 2}.$$

Todos aquellos valores que verifiquen que $\boxed{m + k = 2}$ hacen que la recta esté contenida en el plano

* Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x+2y & = 2 \\ x & = -2z \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = -y \\ y = z+1 \end{cases}$

a) Determina las coordenadas del punto P en que se cortan $r_1$ y $r_2$ y la ecuación del plano que las contiene.

b) Escribe la ecuación de la recta s que pasa por el punto Q(2,0,1) y corta perpendicularmente a $r_1$.

c) Obtén las coordenadas del punto R, intersección de $r_1$ y s, y el área del triángulo de vértices P, Q, R.

a) Escribimos $r_1$ y $r_2$ en paramétricas.

$$r_1 \equiv \begin{cases} y = \frac{2-x}{2} \\ x = -2z \\ z = z \end{cases} \rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = \frac{2+2\lambda}{2} = 1+\lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x = -y \\ y = y \\ z = y-1 \end{cases} \rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = -\mu \\ y = \mu \\ z = \mu - 1 \end{cases}, \ \mu \in \mathbb{R}$$

Como $\boxed{P \in r_1 \cap r_2}$ $\Rightarrow$ Resolvemos el sistema $\begin{cases} x = x \Rightarrow -2\lambda = -\mu \\ y = y \Rightarrow 1+\lambda = \mu \\ z = z \Rightarrow \lambda = \mu - 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} \mu = 2\lambda \\ \mu = 1+\lambda \end{cases} \longrightarrow (-)\begin{cases} \mu - 2\lambda = 0 \\ \mu - \lambda = 1 \end{cases}$$

$$-\lambda = -1 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$$

$$\boxed{\mu = 2 \cdot 1 = 2}$$

Sustituyendo $\lambda$ o $\mu$, obtenemos P

$\boxed{P(-2,2,1)}$ Punto de corte

Si $\pi$ contiene a $r_1$ y $r_2$, como se cortan en un punto tienen dos direcciones que son vectores linealmente independientes. Así, calculamos el plano que tiene $\vec{d}_{r_1}$ y $\vec{d}_{r_2}$ y pasa por

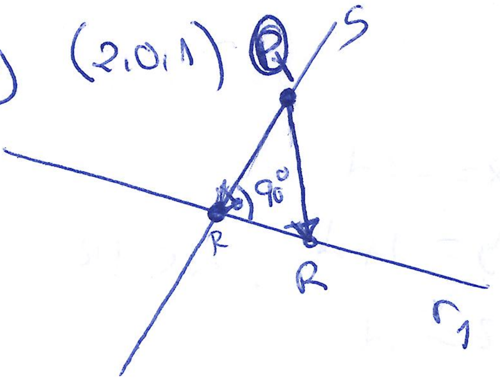
$P(-2,2,1)$.

$\vec{d}_{r_1} = (-2,1,1) \quad \vec{d}_{r_2} = (-1,1,1)$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+2 & y-2 & z-1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \cancel{x}+2-y+2 \quad -2z+2+z-1-\cancel{x}-2+2y-4=0$$

$\boxed{\pi \equiv y - z + 1 = 0}$ Plano

b) (2,0,1)




Sea s la recta que pasa por Q y es perpendicular a $r_1$.

Como es $\perp$ a $r_1$, si R es un punto genérico de $r_1 \Rightarrow \overrightarrow{QR}$ tiene que ser perpendicular a $\vec{d}_{r_1}$, luego

$\boxed{\overrightarrow{QR} \cdot d_{r_1} = 0}$ Como $r_1 \equiv \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

$\vec{d}_{r_1} = (-2, 1, 1)$

$R(-2\lambda, 1+\lambda, \lambda)$

$\overrightarrow{QR} = (-2\lambda - 2, 1+\lambda, \lambda - 1)$

$\overrightarrow{QR} \cdot \vec{d}_{r_1} = 0 \Rightarrow (-2\lambda-2)\cdot(-2) + (1+\lambda)\cdot 1 + (\lambda-1)1 = 0$

$4\lambda + 4 + 1 + \lambda + \lambda - 1 = 0;\ 6\lambda + 4 = 0;\ \lambda = -\frac{2}{3}$

$R\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

$\overrightarrow{QR} = \left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-5}{3}\right)$

Calculo s que pasa por Q (2,0,1) y tiene dirección $\overrightarrow{QR} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

PARAMETRICAS

$\boxed{s \equiv \begin{cases} x = 2 - \frac{2}{3}t \\ y = \frac{1}{3}t \\ z = 1 - \frac{5}{3}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$

SEG CONTINUA

$s \equiv \boxed{\frac{x-2}{-2} = y = \frac{z-1}{-5}}$

c) $R \in r_1 \cap s$.

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 - \frac{2}{3}t \\ y = \frac{1}{3}t \\ z = 1 - \frac{5}{3}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \qquad r_1 \equiv \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

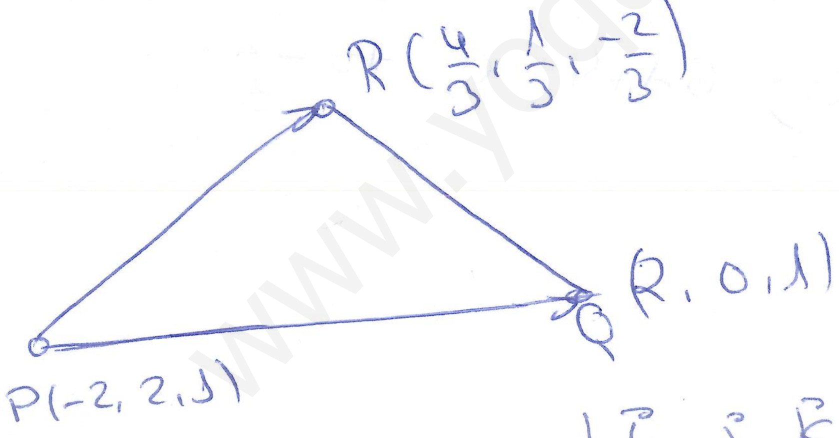
$$2 - \frac{2}{3}t = -2\lambda ; \quad 6 - 2t = -6\lambda ; \quad 6\lambda - 2t = -6 \rightarrow -3\lambda + t = 3$$

$$\frac{1}{3}t = 1 + \lambda ; \quad t = 3 + 3\lambda ; \quad -3\lambda + t = 3$$

$$1 - \frac{5}{3}t = \lambda ; \quad 3 - 5t = 3\lambda \rightarrow +3\lambda + 5t = 3$$

$$6t = 6 \quad \boxed{t = 1} \qquad \rightarrow \lambda = \frac{t-3}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{4}{3} \\ y &= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ z &= -\frac{2}{3} \end{aligned}} \qquad R\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$




Por definición:

$$A_{PQR} = \frac{|\vec{PQ} \times \vec{PR}|}{2}$$

$$\vec{PQ} = (4, -2, 0)$$
$$\vec{PR} = \left(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$

$$\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 4 & -2 & 0 \\ \frac{10}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{3} \end{vmatrix} = \frac{5}{3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{10}{3} \cdot (\vec i \cancel{-2\vec k} \cancel{+2\vec k} + 2\vec j) = \frac{10}{3} \cdot (\vec i + 2\vec j) = \frac{10}{3}\vec i + \frac{20}{3}\vec j$$

$$= \left(\frac{10}{3}, \frac{20}{3}, 0\right)$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{20}{3}\right)^2 + 0^2}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{500}}{3}}{6} = \frac{\sqrt{500}}{18} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 5^3}}{18} = \frac{10\sqrt{5}}{18} = \frac{5\sqrt{5}}{3} u$$