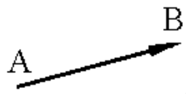
A. VECTORES

1. VECTORES FIJOS Y VECTORES LIBRES

Un **vector fijo** de origen A y extremo B, siendo A y B puntos del espacio, es un segmento orientado caracterizado por:

- **Módulo** o longitud del segmento orientado.
- **Dirección**, que es la recta que contiene al vector.
- **Sentido** u orientación de la recta, en este caso de A hacia B.

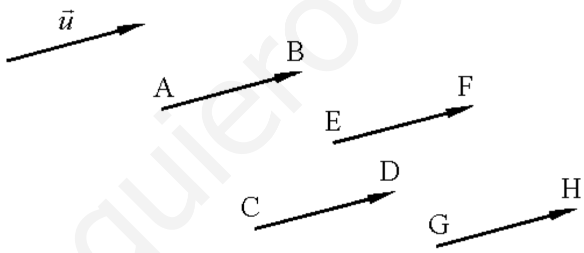


La flecha indica el sentido y el módulo es la distancia entre A y B.

Llamaremos **vector libre** al conjunto de todos los vectores fijos que tienen igual módulo, dirección y sentido (vectores fijos equipolentes) que uno dado. Se suelen representar por $\vec{u}, \vec{v}$, …

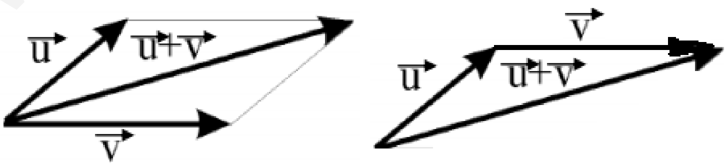
Si $\vec{u}$ es el vector libre formado por todos los vectores fijos equipolentes al vector fijo $\overrightarrow{AB}$ también se puede representar por [$\overrightarrow{AB}$].

$$\vec{u}=\left[\overrightarrow{AB}\right]=\left\{\overrightarrow{XY} \;/\; \overrightarrow{XY}\sim\overrightarrow{AB}\right\}$$



2. OPERACIONES CON VECTORES LIBRES

SUMA

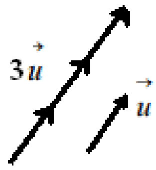


Propiedades

- Asociativa: $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$
- Elemento neutro: El vector nulo $\vec{0}$ $\quad \vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$.
- Elemento opuesto: El vector opuesto de $\vec{u}$ es $-\vec{u}$ $\quad \vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$
- Conmutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

PRODUCTO DE UN NÚMERO REAL POR UN VECTOR

- Tiene la misma dirección que $\vec{u}$
- Si $k > 0$ tiene el mismo sentido que $\vec{u}$, y si $k < 0$ tiene sentido opuesto a $\vec{u}$
- El módulo de $k\vec{u}$ es igual la valor absoluto de k por el módulo de $\vec{u}$ → $|k\vec{u}| = |k| \cdot |\vec{u}|$



Propiedades

- Distributiva del producto respecto de la suma de vectores: $k \cdot \left(\vec{u} + \vec{v}\right) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- Distributiva de la suma de números reales por un vector: $(k+p)\vec{u} = k\vec{u} + p\vec{u}$
- Asociatividad mixta: $(k \cdot p)\vec{u} = k \cdot \left(p\vec{u}\right)$
- Elemento neutro: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

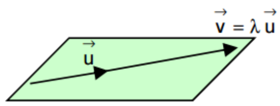
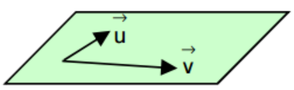
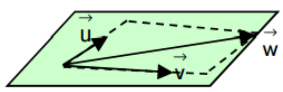
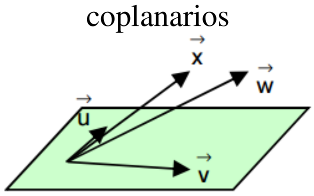
3. DEPENDENCIA LINEAL, BASES, COORDENADAS.

- $\vec{v}$ es combinación lineal de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n \iff \exists\, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \,/\, \vec{v} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \ldots + a_n\vec{u}_n$

  Diremos que $\vec{v}$ dependiente linealmente de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$

- Diremos que los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n$ son linealmente dependientes si al menos uno de ellos puede expresarse como combinación lineal de los restantes.

  En caso contrario, se dirá que son linealmente independientes.

Nº de vectores	Posición	¿Dependencia lineal?
2	Alineados 	Lin. dependientes
	No alineados 	Lin. Independientes
3	Coplanarios 	Lin. Dependientes
	No coplanarios 	Lin. Independientes

- Un conjunto de vectores es una base si:
  - son linealmente independientes, y
  - si cualquier otro vector se puede poner como combinación lineal de ellos.

- En el espacio, tres vectores de distinta dimensión forman una base.

La base más utilizada es la base ortonormal:

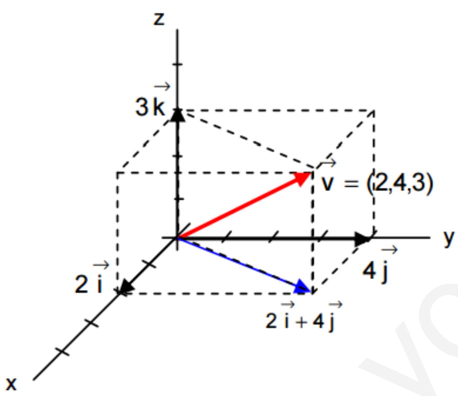
$$B=\left\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right\};\quad \left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=\left|\vec{k}\right|=1\quad y\quad \vec{i}\perp\vec{j},\vec{i}\perp,\vec{k}\ y\quad \vec{j}\perp\vec{k}$$

Una base es ortogonal si los vectores son perpendiculares dos a dos.

« $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ forman una **base** de $V^3 \rightarrow$ cualquier $\vec{x}$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base, es decir,

$$\exists\ \lambda,\mu,\eta\in\Re\ /\quad \vec{x}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}+\eta\vec{w}\quad »$$

«Se dice entonces que λ,μ y η son las **coordenadas** de $\vec{x}$ en la base $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ »



En la figura, podemos expresar $\vec{v}$ como combinación lineal de la base canónica en V^3: $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$:

$$\vec{v}=(2\vec{i}+4\vec{j})+3\vec{k}=[(2,0,0)+(0,4,0)]+(0,0,3)=(2,4,3)$$

las coordenadas de un vector coinciden con las del punto extremo

Si $A=(a_1, a_2, a_3)$ y $B=(b_1, b_2, b_3)$ → $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$

4. OPERACIONES CON COORDENADAS.

A.- Suma de vectores

$$\vec{u}=(a,b,c)\ \text{y}\ \vec{v}=(d,e,f)\quad \Rightarrow\quad \vec{u}+\vec{v}=(a+d,b+e,c+f)$$

B.- Producto de un número real por un vector

Dado un nº real k y un vector $\vec{u}=(a,b,c)$ $\Rightarrow$ $k\vec{u}=(k\cdot a,k\cdot b,k\cdot c)$

El vector nulo $\vec{0}=(0,0,0)$ El vector opuesto de $\vec{u}=(a,b,c)$ es $-\vec{u}=(-a,-b,-c)$

5. PRODUCTO ESCALAR.

Definición:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{cases}|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\alpha & \text{si } \vec{u} \text{ y } \vec{v}\neq\vec{0}\\ 0 & \text{si } \vec{u}=0 \text{ o } \vec{v}=0\end{cases}$$

Expresión analítica:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)\\ \vec{v}=(v_x,v_y,v_z)\end{array}\right\}\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z$$

respecto de $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ ORTONORMAL

Propiedades:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Longleftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$$

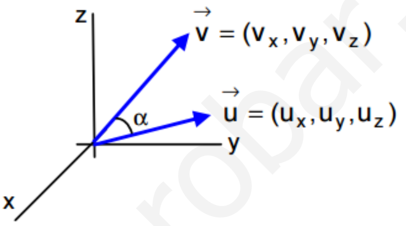
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$$

$$\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})=(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})$$

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$

Aplicaciones:

$$\vec{u}=(x,y,z)\qquad |\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$



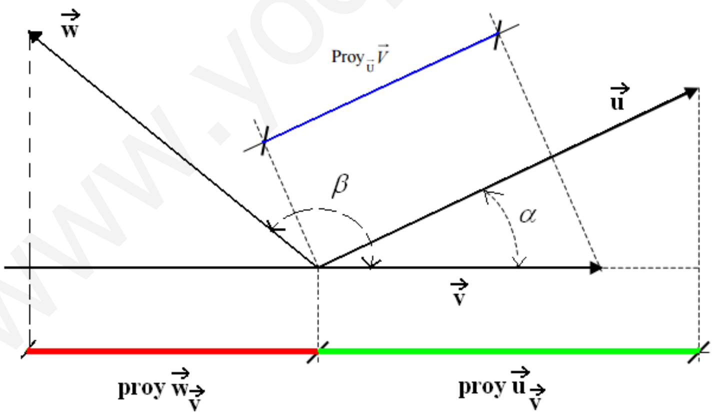
$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$$

- **Interpretación geométrica del producto escalar:**

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha \;\xrightarrow{(1)}\; \vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{v}|\cdot\text{proy}\,\vec{u}_{\vec{v}} \;\rightarrow\; \text{proy}\,\vec{u}_{\vec{v}}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\quad \text{positiva}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\cos\beta \;\xrightarrow{(2)}\; \vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{v}|\cdot\text{proy}\,\vec{w}_{\vec{v}} \;\rightarrow\; \text{proy}\,\vec{w}_{\vec{v}}=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|}\quad \text{negativa}$$

$$\left|\text{proy}\,\vec{a}_{\vec{b}}\right|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$$



$$\cos\alpha=\frac{\text{proy}\,\vec{u}_{\vec{v}}}{|\vec{u}|}\quad (1)$$

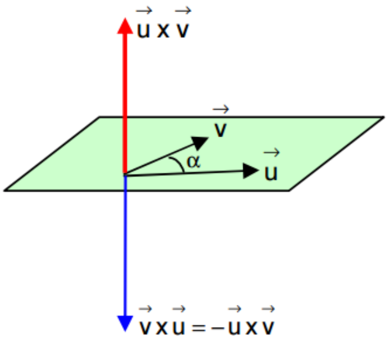
$$\cos\beta=\frac{\text{proy}\,\vec{w}_{\vec{v}}}{|\vec{w}|}\quad (2)$$

- **Cómo halla un vector unitario de la misma dirección y sentido que uno dado:**

$\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ es unitario, y con la misma dirección y sentido que $\vec{u}$

6. PRODUCTO VECTORIAL.

Definición:



El producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ <u>es un vector</u>: denominado $\vec{u} \times \vec{v}$, que tiene:

MÓDULO: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \operatorname{sen} \alpha$

DIRECCIÓN: $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ y $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$

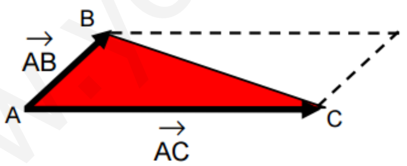
SENTIDO: El del avance de un sacacorchos al llevar $\vec{u}$ a $\vec{v}$

El **producto vectorial es 0** si:	**Exp. analítica:**	**Propiedades:**
- Uno de los dos vectores es el vector cero. - Si los dos vectores tienen la misma dirección.	$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$	$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ $\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = \lambda \vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \lambda \vec{v}$ $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

«El módulo del producto vectorial de dos vectores es igual al área del paralelogramo que determinan».

$$\textbf{área} = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

Consecuencia: Área del triángulo



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

7. PRODUCTO MIXTO

Definición:

Se define el producto mixto de tres vectores, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, y se designa como $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, al número que resulta de la siguiente operación: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

Expresión analítica:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

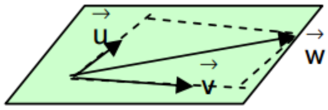
El producto mixto $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ valdrá cero si :

1) al menos uno de los vectores sea el vector $\vec{0}$

2) al menos dos vectores son iguales o proporcionales

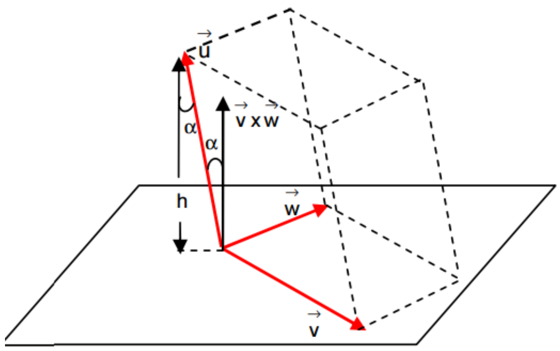
3) si los tres vectores son linealmente dependientes.

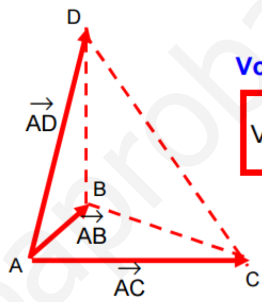
$$\vec{u},\vec{v} \text{ y } \vec{w} \text{ coplanarios (lin. dep.)} \Leftrightarrow [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = 0$$



Las propiedades del producto mixto se deducen de las propiedades de los determinantes

Volumen del paralelepípedo = $|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$



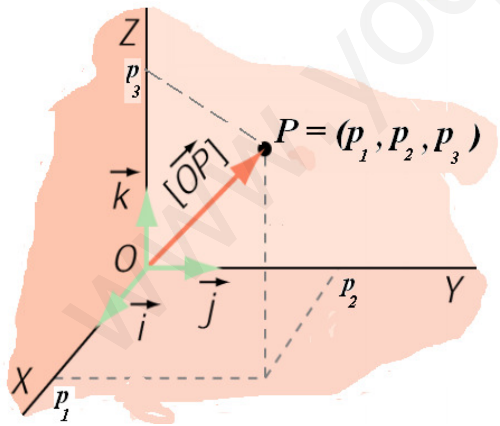


Volumen del tetraedro

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}]\right|$$

B. PLANOS Y RECTAS EN EL ESPACIO

8. SISTEMAS DE REFERENCIA EN EL ESPACIO



Un sistema de referencia en el espacio está formado por un punto (origen de coordenadas) y por una base.

Normalmente se trabaja con un sistema de referencia ortonormal, cuya base es ortonormal.

En un sistema de referencia cualquier punto del espacio P tiene tres coordenadas que son las coordenadas del vector de posición del punto.

$P \leftrightarrow \vec{OP}$, *vector de posición de P*

Coordenadas de P $\leftrightarrow$ *Coordenadas de* $\vec{OP} = (p_1, p_2, p_3)$

- Coordenadas de un vector:

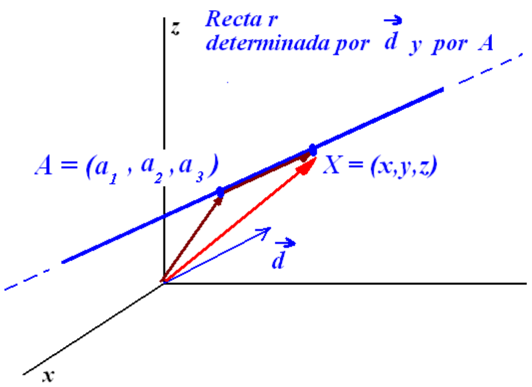
$A=(a_1,a_2,a_3)$ y $B=(b_1,b_2,b_3)$ $\vec{AB}=(b_1-a_1\ ,\ b_2-a_2\ ,\ b_3-a_3)$

- Coordenadas del punto medio de un segmento:

$A=(a_1,a_2,a_3)$ y $B=(b_1,b_2,b_3)$ $M=\left(\dfrac{a_1+b_1}{2},\dfrac{a_2+b_2}{2},\dfrac{a_3+b_3}{2}\right)$

9. ECUACIONES DE LA RECTA EN EL ESPACIO

Sea r la recta que pasa por el punto A y tiene la dirección del vector $\vec{d}$



Ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{AX}$$

$$(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+\lambda(d_1,d_2,d_3)$$

Si la recta r estuviese **determinada por dos puntos A y B,** pasaríamos a este caso tomando por el punto de la determinación, cualquiera de los dos puntos y por el vector director el vector $\overrightarrow{AB}$ o el $\overrightarrow{BA}$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x=a_1+\lambda d_1 \\ y=a_2+\lambda d_2 \\ z=a_3+\lambda d_3 \end{cases}$$

Ecuación en forma continua:

$$\frac{x-a_1}{d_1}=\frac{y-a_2}{d_2}=\frac{z-a_3}{d_3}$$

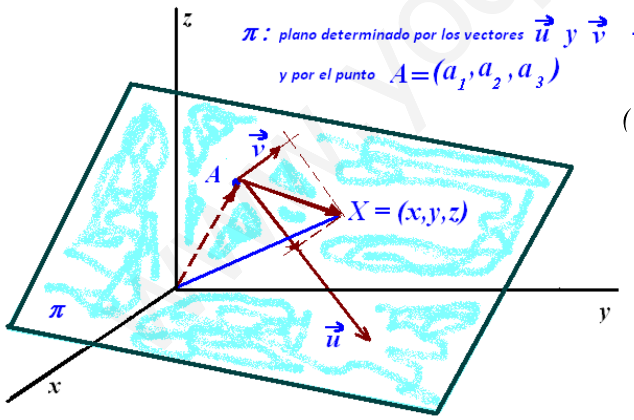
Ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} \dfrac{x-a_1}{d_1}=\dfrac{y-a_2}{d_2} \\ \dfrac{x-a_1}{d_1}=\dfrac{z-a_3}{d_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$

Nota: son las ecuaciones de dos planos

9. ECUACIONES DEL PLANO EN EL ESPACIO

Sea π el plano determinado por el punto **A** y por los vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$



Ecuación vectorial

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{OA}+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$$

$$(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+\lambda(u_1,u_2,u_3)+\mu(v_1,v_2,v_3)$$

Si el plano π estuviese **determinado por tres puntos A, B y C,** pasaríamos al caso anterior tomando por el punto de la determinación, cualquiera de los tres puntos y por los vectores directores los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ (u otros).

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x=a_1+\lambda u_1+\mu v_1 \\ y=a_2+\lambda u_2+\mu v_2 \\ z=a_3+\lambda u_3+\mu v_3 \end{cases}$$

Ecuación implícita:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x-a_1 \\ u_2 & v_2 & y-a_2 \\ u_3 & v_3 & z-a_3 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \mathbf{Ax+By+Cz+D=0;}$$

Se demuestra que **(A,B,C)** son las coordenadas de un **vector normal** al plano.

Ecuación normal:

Si π: Ax+By+Cz+D=0

$$A(x-a_1)+B(y-a_2)+C(z-a_3)=0$$

siendo (A,B,C) = vector normal al plano

Ecuaciones de los ejes de coordenadas:

	Ecs. Paramétricas	Ec. en forma continua	Ecs. Implícitas
Eje X: A = (0,0,0) $\vec{d}$ = (1,0,0)	$\begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$	$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}$	$\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$
Eje Y: A = (0,0,0) $\vec{d}$ = (0,1,0)	$\begin{cases} x=0 \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$	$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$	$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$
Eje Z: A = (0,0,0) $\vec{d}$ = (0,0,1)	$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$	$\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$	$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

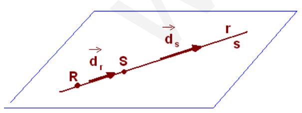
Ecuaciones de los planos coordenados

	Ecs. Paramétricas	Ec. Implícita
Plano XY: A = (0,0,0) $\vec{u}$ = (1,0,0) $\vec{v}$ = (0,1,0)	$\begin{cases} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=0 \end{cases}$	z = 0
Plano XZ: A = (0,0,0) $\vec{u}$ = (1,0,0) $\vec{v}$ = (0,0,1)	$\begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=\mu \end{cases}$	y = 0
Plano YZ: A = (0,0,0) $\vec{u}$ = (0,1,0) $\vec{v}$ = (0,0,1)	$\begin{cases} x=0 \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{cases}$	x = 0

10. POSICIONES RELATIVAS DE PLANOS Y RECTAS EN EL ESPACIO

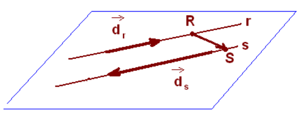
A. RECTA – RECTA:

Coincidentes



$rango\ (\vec{d_r},\vec{d_s},\vec{RS})=1$

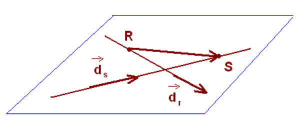
Paralelas



$rango\ (\vec{d_r},\vec{d_s},\vec{RS})=2$

$rango\ (\vec{d_r},\vec{d_s})=1$

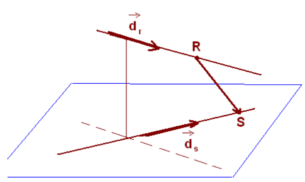
Secantes



$rango\ (\vec{d_r},\vec{d_s},\vec{RS})=2$

$rango\ (\vec{d_r},\vec{d_s})=2$

Se cruzan



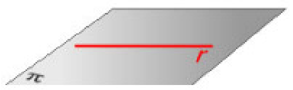
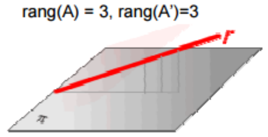
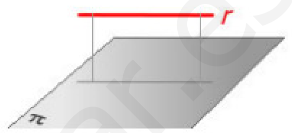
$rango\ (\vec{d_r},\vec{d_s},\vec{RS})=3$

B. RECTA – PLANO:

- Sea la recta $r:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=D_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z=D_2 \end{cases}$ y el plano $\pi: A_3x+B_3y+C_3z=D_3$

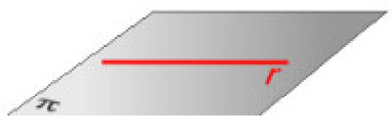
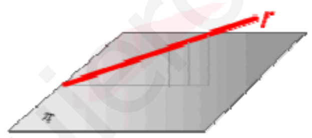
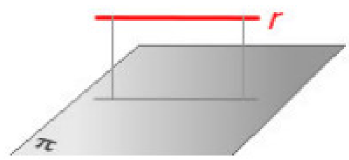
Llamaremos A a la matriz del ***sistema formado por esas tres ecuaciones***, y A' a la ampliada.

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \quad y \quad A'=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

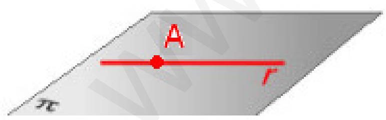
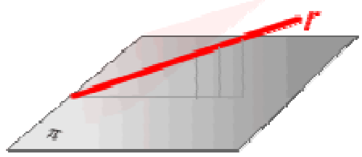
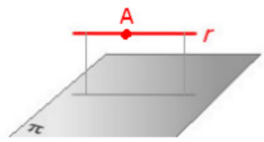
Recta contenida en el plano	Recta secante al plano	Recta paralela al plano
rang(A) = 2, rang(A')=2.	rang(A) = 3, rang(A')=3	rang(A) = 2, rang(A')=3
	 El punto de corte es la solución del sistema	
Sistema Compatible Indeterminado	Sistema Compatible Determinado	Sistema Incompatible

- Sea $r:\begin{cases} x=a_1+\lambda d_1 \\ y=a_2+\lambda d_2 \\ z=a_3+\lambda d_3 \end{cases}$ y π : Ax + By + Cz + D = 0 .

Al hacer $A\,(a_1+\lambda\, d_1)+B\,(a_2+\lambda\, d_2)+C\,(a_3+\lambda\, d_3)+D=0$, se obtiene una ecuación de grado 1 cuya incógnita es λ.

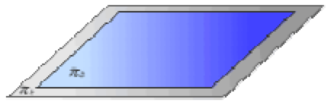
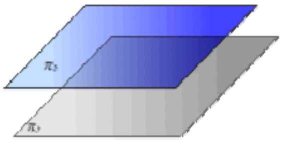
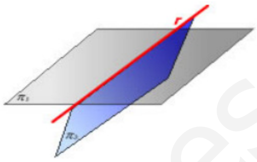
Recta contenida en el plano	Recta secante al plano	Recta paralela al plano
		
La ecuación tiene infinitas soluciones (0=0)	La ecuación tiene una solución (λ = número)	La ecuación NO tiene solución (0=5)

- Sea $r:\begin{cases} x=a_1+\lambda d_1 \\ y=a_2+\lambda d_2 \\ z=a_3+\lambda d_3 \end{cases}$ y π : Ax + By + Cz + D = 0 . $A=(a_1,a_2,a_3)\,,\ \vec{d}_r=(d_1,d_2,d_3)\ \ y\ \ \vec{n}_\pi=(A,B,C)$

Recta contenida en el plano	Recta secante al plano	Recta paralela al plano
		
$\vec{d}_r\cdot\vec{n}_\pi=0 \quad y \quad A\in\pi$	$\vec{d}_r\cdot\vec{n}_\pi\neq 0$	$\vec{d}_r\cdot\vec{n}_\pi=0 \quad y \quad A\notin\pi$

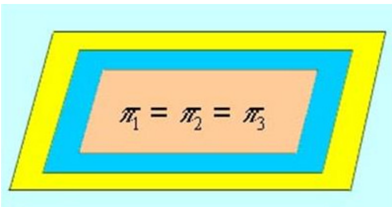
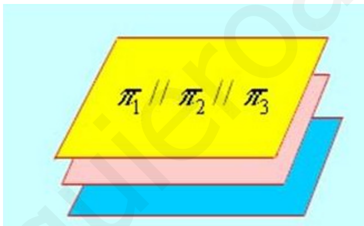
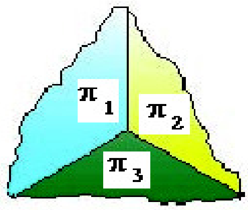
C. PLANO – PLANO:

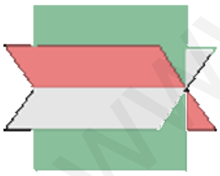
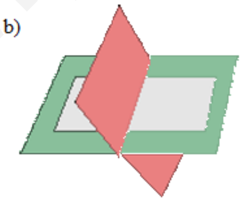
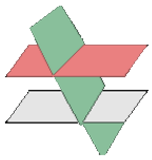
Sean $\pi_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ y $\pi_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ los dos planos. Se considera el sistema de tres incógnitas formado por las dos ecuaciones de los dos planos. Sea A la matriz de coeficientes de ese sistema y A’ la matriz ampliada de ese sistema.

Los planos son coincidentes	Los planos son paralelos	Los planos son secantes (se cortan en una recta)
 $\text{rango}(A)=1 \quad \text{rango}(A')=1$ Sistema Compatible Indeterminado (solución: dos parámetros)	 $\text{rango}(A)=1 \quad \text{rango}(A')=2$ Sistema Incompatible	 $\text{rango}(A)=2=\text{rango}(A')$ Sistema Compatible Indeterminado (solución: un parámetro)

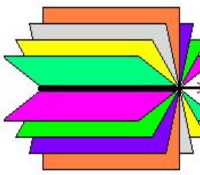
D. PLANO – PLANO – PLANO:

Sean $\pi_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$, $\pi_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ y $\pi_3 : A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0$ los tres planos. Se considera el sistema de tres incógnitas formado por las tres ecuaciones de los tres planos. Sea A la matriz de coeficientes de ese sistema y A’ la matriz ampliada de ese sistema.

Los planos son coincidentes	Los planos son paralelos	Los planos se cortan en un punto (forman un triedro)
 Rango A = 1 = rango A’ Sistema Compatible Indeterminado (Solución: dos parámetros)	 Rango A = 1 < 2= rango A’ Sistema Incompatible (No hay Solución)	 Rango A = 3 = rango A’ Sistema Compatible Determinado (Solución: Un punto)

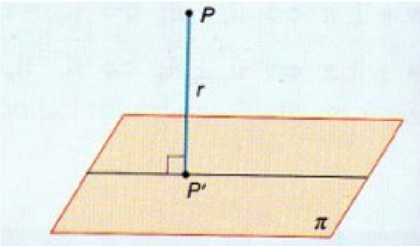
Los planos se cortan en una recta	**Los planos se cortan dos a dos en una recta o hay dos planos paralelos y el otro los corta**
a)  b)  Rango A = 2 = rango A’ Sistema Compatible Indeterminado (Solución: un parámetro)	a)  b)  Rango A = 2 < 3 = rango A’ Sistema Incompatible (No hay Solución al sistema)

11. HAZ DE PLANOS

	Se llama **haz de planos** a los infinitos planos que pasan por una recta r. Si r viene dada por $r: \begin{cases} \pi : Ax+By+Cz+D=0 \\ \pi' : A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$ el haz de planos está formado por los planos $Ax+By+Cz+D+\lambda(A'x+B'y+C'z+D')=0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ más el plano π’

12. PROYECCIONES

A. Proyección de un punto sobre un plano



Calculamos la recta perpendicular al plano *π* que pasa por el punto *P.*

Cortamos la recta obtenida con el plano (ya sabes, sustituir la paramétrica de la recta en la implícita del plano).

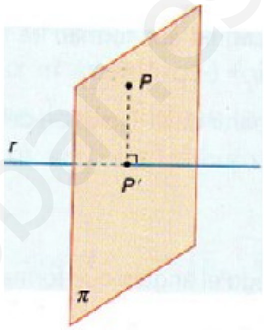
El punto de corte obtenido, es la proyección *P'* del punto *P* sobre el plano *π*.

B. Proyección de un punto sobre una recta

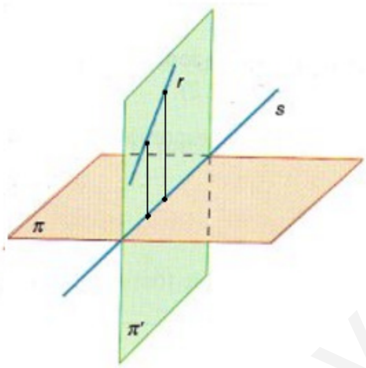
Calculamos el plano perpendicular a la recta r que pasa por P

Cortamos recta y plano.

El punto obtenido P', es la proyección del punto P sobre la recta r



C. Proyección de una recta sobre un plano



Podemos hacerlo de dos formas:

Forma 1: Cogemos dos puntos de la recta P y Q y hacemos la proyección de estos sobre el plano, obteniendo así dos puntos en el plano P' y Q'. La recta que une estos puntos es la proyección de la recta r sobre el plano π.

Forma 2:

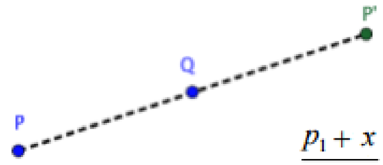
Calculamos el plano π' perpendicular a π y que contiene a r

La recta s que se obtiene al cortar los planos π y π', es la proyección de r sobre π.

13. ELEMENTOS SIMÉTRICOS

A. Simétrico de un punto respecto a otro punto

El simétrico de un punto P respecto de otro punto Q es otro punto P' de manera que el punto Q es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.

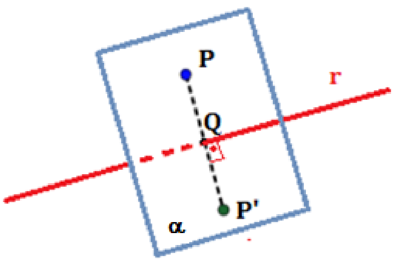


Si $P(p_1, p_2, p_3)$ y $Q(q_1, q_2, q_3)$, y representamos a P' por $P'(x, y, z)$:

$$\frac{p_1 + x}{2} = q_1 \qquad \frac{p_2 + y}{2} = q_2 \qquad \frac{p_3 + z}{2} = q_3$$

Despejamos x **Despejamos y** **Despejamos z**

B. Simétrico de un punto respecto a una recta



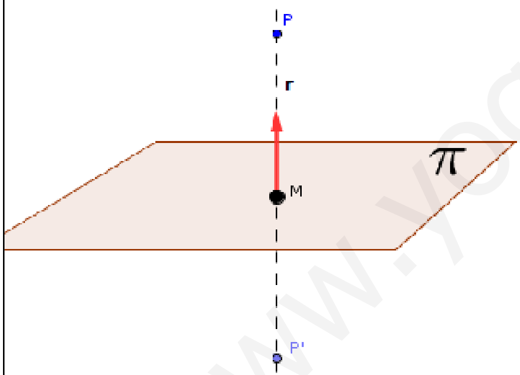
Para hallar el simétrico de un punto respecto de una recta debemos seguir los siguientes pasos:

1. **Hallamos la ecuación de un plano α que pase por P y cuyo vector normal es el director de r**
2. **Hallamos el punto Q (interseccion de r y α)**
3. **Obligamos a que Q sea el punto medio de PP'**

(nombramos P'(x,y,z) y $\frac{p_1+x}{2} = q_1$, análogo con y y z)

($2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP'}$)

C. Simétrico de un punto con respecto a un plano

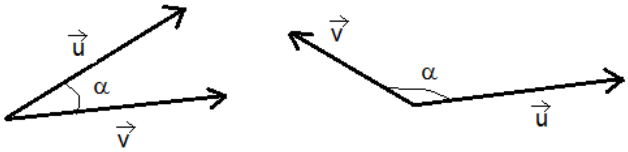


Para hallar el simétrico del punto P con respecto al plano seguimos los siguientes pasos:

1. **Hallamos la ecuación de r (determinada por $\overrightarrow{n}_\pi$ y P).**
2. **Hallamos el punto M (haciendo r intersección π)**
3. **Obligamos a que M sea el punto medio de PP' (nombramos P' = (x,y,z))**

14. ÁNGULOS

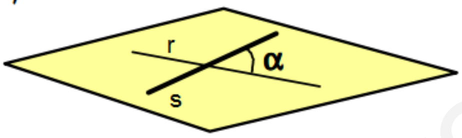
A. Ángulo de dos vectores



$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} \qquad \alpha = \arccos\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

B. Ángulo de dos rectas (que se cortan o que se cruzan)

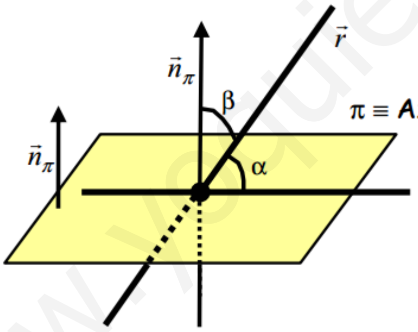
Sean $\vec{r}$ y $\vec{s}$ los vectores de dos rectas r y s



$$\cos\alpha = \cos(r, s) = \cos(\vec{r}, \vec{s}) = \frac{|\vec{r}\cdot\vec{s}|}{|\vec{r}|\cdot|\vec{s}|}$$

C. Ángulo de recta y plano

Sea $\vec{n}_\pi$ el vector normal del plano . Sea $\vec{r}$ el vector director del la recta



$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

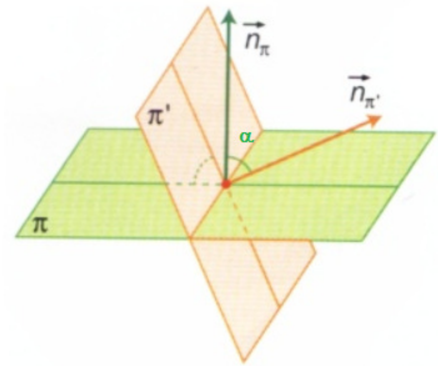
$$\cos\beta = \cos(\vec{n}_\pi, \vec{r}) = \frac{|\vec{n}_\pi\cdot\vec{r}|}{|\vec{n}_\pi|\cdot|\vec{r}|}$$

El ángulo pedido es α:

$$\alpha = 90 - \beta$$

D. Ángulo de dos planos

Sean $\vec{n}_\pi$ y $\vec{n}_{\pi'}$ los vectores **normales** de dos planos π π'



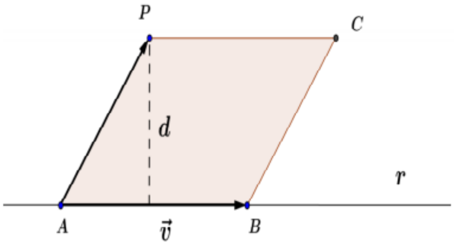
El ángulo de dos planos es igual al ángulo de sus vectores normales

15. DISTANCIAS

A. Distancia entre dos puntos

$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|$

B. Distancia de un punto a una recta



$$d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

d (P,r) = altura del paralelogramo formado por el vector $\overrightarrow{AP}$ y el vector $\vec{v}$ (director de la recta)

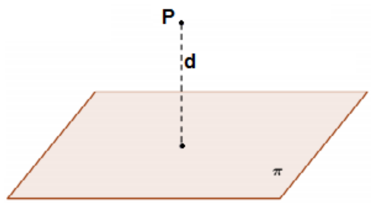
Otra forma de hallar la distancia de un punto P a una recta r es:

1.- Hallamos el plano π, $r \perp \pi$ tal que $\pi \supset P$
2.- Hallamos el punto $P' = \pi \cap r$.
3.- Tendremos que $d(P,r) = d(P,P') = |\overrightarrow{PP'}|$.

C. Distancia de un punto a un plano.

$P(x_0, y_0, z_0)$ y $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$

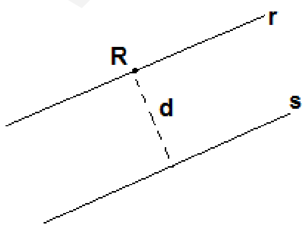
$$d(P,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Otra forma de hallar la distancia de un punto P a un plano π es:

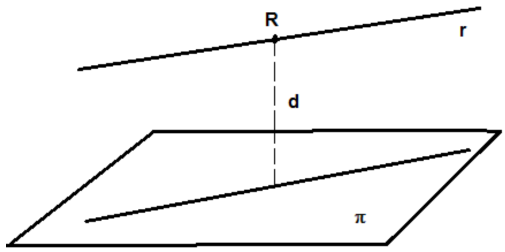
1.- Hallamos la recta r, $r \perp \pi$ tal que P pertenece a r. $(\vec{d}_r = \vec{n}_\pi)$
2.- Hallamos el punto $P' = \pi \cap r$.
3.- Tendremos que $d(P,\pi) = d(P,P') = |\overrightarrow{PP'}|$.

D. Distancia entre dos rectas paralelas.



d(r,s) = d(R,s),
siendo R un punto cualquiera de r

E. Distancia de una recta a un plano paralelo a ella.

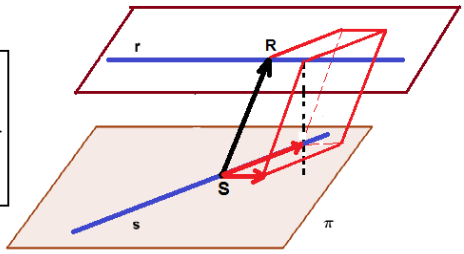


d(r, π) = d(R, π) siendo R un punto cualquiera de r

E. Distancia entre dos rectas que se cruzan

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{SR},\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{v_s}\right|}$$

d = altura del paralelepípedo

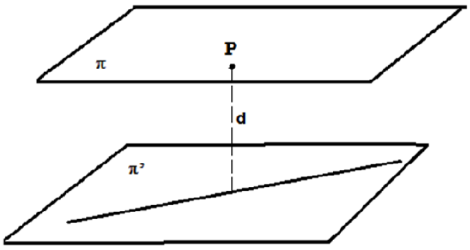


Otra forma de hallar la distancia entre dos rectas r y s que se cruzan es:

1.- Hallamos el plano π que contiene a una de ellas y es paralelo a la otra, por ejemplo, el plano $\pi \parallel r$ tal que $\pi \supset s$.

2.- Tendremos que $d(r,s)=d(r,\pi)=d(\mathbf{R},\pi)$.

F. Distancia entre dos planos paralelos.



d (π , π') = d (P , π') , siendo P un punto cualquiera de π

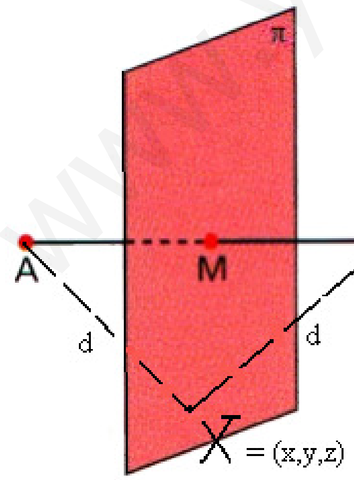
También:

$$d(\pi,\pi')=\frac{|D-D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

siendo $\begin{cases}\pi: Ax+By+Cz+D=0\\ \pi': Ax+By+Cz+D'=0\end{cases}$

15. LUGARES GEOMÉTRICOS. ESFERA

A. Plano mediador



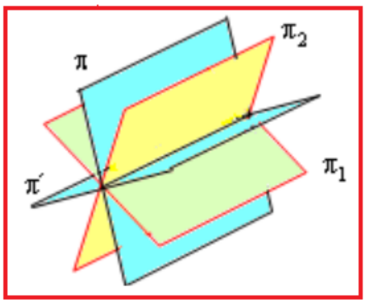
Es el lugar geométrico de los puntos del espacio equidistantes de A y de B

$$d(A,X) = d(B,X)$$

$$\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2}=\sqrt{(a-b_1)^2+(y-b_2)^2+(z-b_3)^2}$$

Podemos calcular, si reconocemos el lugar geométrico pedido, directamente el plano perpendicular a $\overline{AB}$ que pasa por M (punto medio de $\overline{AB}$)

B. Planos bisectores de dos planos dados que se cortan en una recta



Si los planos dados son:

$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ y $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, y

el punto $P(x, y, z)$ pertenece al plano bisector π, se cumple que

$$d(P,\pi_1) = d(P,\pi_2) \Rightarrow \frac{|a_1x + b_1y + c_1z + d_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2z + d_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}\,(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = + \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\,(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) \\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}\,(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = - \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\,(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) \end{array}}$$

Dos soluciones, dos planos bisectores

C. Esfera

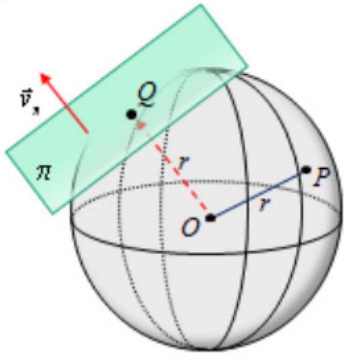
La superficie esférica (la esfera) es el conjunto de puntos del espacio que equidistan de otro punto fijo, llamado centro.

Si el centro es el punto $O(a, b, c)$ y el radio vale r, un punto $P(x, y, z)$ es de la esfera si su distancia a O mide r: $r = d(O,P)$.

Por tanto, su ecuación será:

$$d(O,P) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r \Leftrightarrow$$

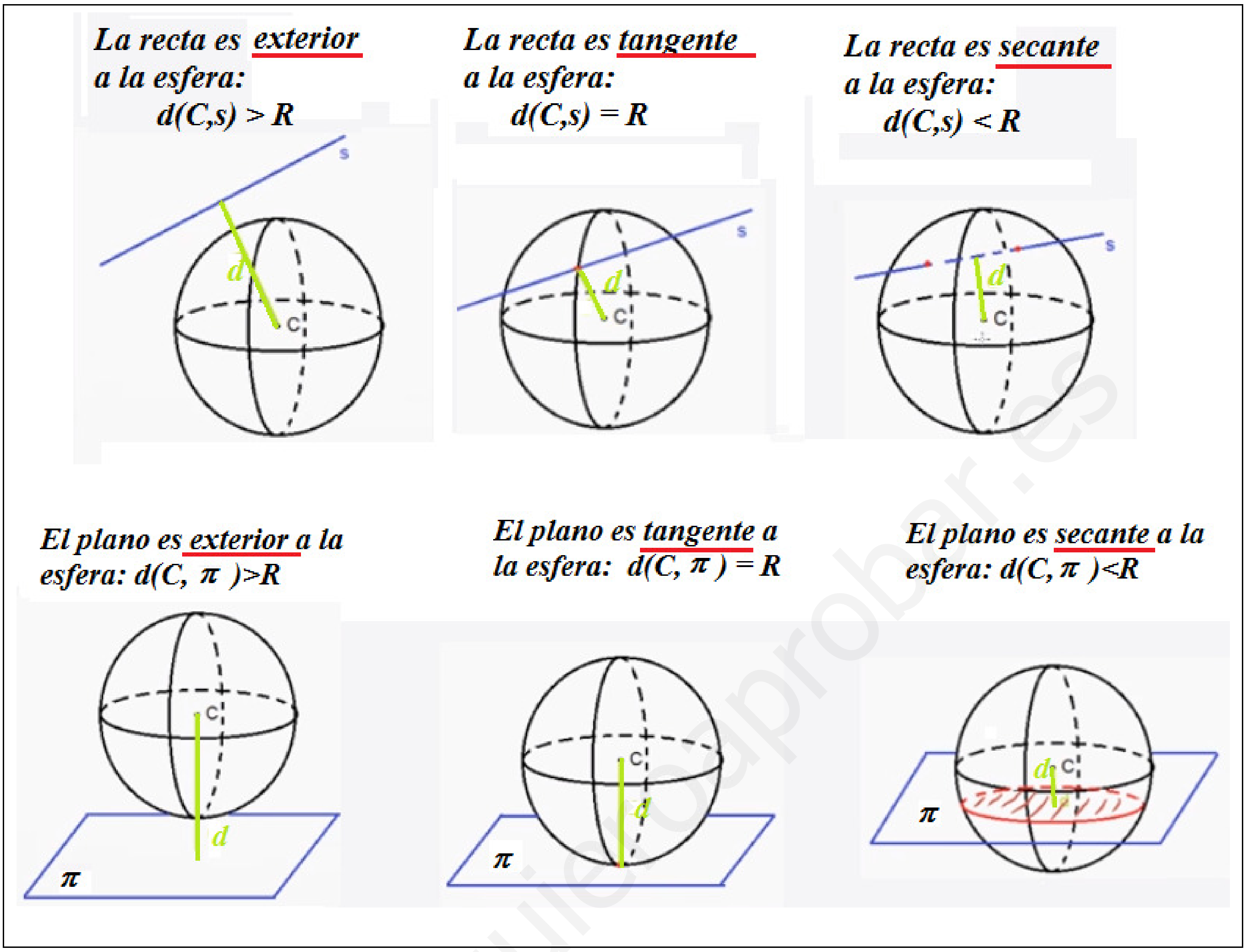
$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$



Haciendo los cuadrados y agrupando se obtiene la ecuación implícita:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ex + Fy + Gz + H = 0$$

<u>Propiedad del plano tangente a la superficie esférica</u>: El plano tangente a una esfera en cualquiera de sus puntos es perpendicular al radio correspondiente al punto de tangencia. Por tanto, el vector normal del plano tangente a la esfera en el punto Q es el vector $\boldsymbol{OQ}$.


La recta es exterior a la esfera: d(C,s) > R
La recta es tangente a la esfera: d(C,s) = R
La recta es secante a la esfera: d(C,s) < R
s
d
C
El plano es exterior a la esfera: d(C, π)>R
El plano es tangente a la esfera: d(C, π) = R
El plano es secante a la esfera: d(C, π)<R
π