GEOMETRÍA

1.- Calcula la distancia entre las rectas, estudiando antes su posición relativa:

$$r: \begin{cases} x = 13 + 12\lambda \\ y = 2 \\ z = 8 + 5\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 + \mu \\ z = -9 \end{cases}$$

$\vec{d}_r(12, 0, 5)$; $P(13, 2, 8)$

$\vec{d}_s(0, 1, 0)$; $P'(6, 6, -9)$

$\overrightarrow{PP'}(-7, 4, -17)$

$$\begin{vmatrix} 12 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & -17 \end{vmatrix} = -169 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Las rectas se cruzan.}$$

$$dist(r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\overrightarrow{PP'}, \vec{d}_r, \vec{d}_s]|}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|} = \frac{169}{|(-5, 0, 12)|} =$$

$$= \frac{169}{\sqrt{169}} = \frac{169}{13} = 13$$

2.- Calcula el volumen del tetraedro determinado por los ejes coordenados y el plano: $6x - 5y + 3z - 1 = 0$

- Hallamos los vértices:

$$x = y = 0 \quad \rightarrow \quad z = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad A\left(0, 0, \frac{1}{3}\right)$$

$$y = z = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{6} \quad \rightarrow \quad B\left(\frac{1}{6}, 0, 0\right)$$

$$x = z = 0 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{5} \quad \rightarrow \quad C\left(0, -\frac{1}{5}, 0\right)$$

$O(0, 0, 0)$

- Calculamos el volumen:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{540} \text{ u}^3$$

- Lo calculamos utilizando el producto mixto:

$$V = \frac{1}{6}\ |[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]| = |\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 \end{vmatrix}| = \frac{1}{540} \text{ u}^3$$

3.- Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta

$$\frac{x + 3}{2} = \frac{y - 4}{3} = \frac{z}{4}$$

y que pasa por el punto (–1, 1, 0), y calcula el volumen de la figura limitada por el plano anterior y los tres planos coordenados.

Un vector normal al plano es $\vec{n}(2, 3, 4)$.

La ecuación del plano es: $2(x + 1) + 3(y - 1) + 4(z - 0) = 0$

$$2x + 3y + 4z - 1 = 0$$

Calculamos los vértices:

$$x = y = 0 \;\rightarrow\; z = \frac{1}{4} \;\rightarrow\; A\left(0,\, 0,\, \frac{1}{4}\right)$$

$$y = z = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; B\left(\frac{1}{2},\, 0,\, 0\right)$$

$$x = z = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{1}{3} \;\rightarrow\; C\left(0,\, \frac{1}{3},\, 0\right)$$

$O(0, 0, 0)$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{144}\ \text{u}^3$$

4.- Determina la ecuación de la recta que pasa por $P(1, 2, 2)$ y es perpendicular a las rectas r_1 y r_2:

$$r_1: \begin{cases} x + 2y - 3z - 1 = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} 3x - y + 3z = 0 \\ x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

Obtenemos los vectores dirección de las rectas r_1 y r_2:

$$r_1: (1, 2, -3) \times (1, 2, -1) = (4, -2, 0) \;\rightarrow\; \vec{d}_1(2, -1, 0)$$

$$r_2: (3, -1, 3) \times (1, 4, 0) = (-12, 3, 13) = \vec{d}_2$$

La recta que buscamos ha de ser perpendicular a r_1 y a r_2:

$$(2, -1, 0) \times (-12, 3, 13) = (-26, -52, -12) \;\rightarrow\; \vec{d}(13, 26, 6)$$

Como pasa por el punto $P(1, 2, 2)$, sus ecuaciones son:

$$\begin{cases} x = 1 + 13\lambda \\ y = 2 + 26\lambda \\ z = 2 + 6\lambda \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \frac{x-1}{13} = \frac{y-2}{26} = \frac{z-2}{6}$$

5.-

Halla la ecuación del plano π que contiene a la recta $r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ y es ortogonal al plano $\sigma: 2x - y + 3z + 1 = 0$.

Obtén también las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π y σ.

Obtenemos un punto y un vector dirección de la recta r:

$$P(1, -1, 1) \in r \;\rightarrow\; P(1, -1, 1) \in \pi$$

$$(1, 1, -1) \times (1, 2, 1) = (3, -2, 1) = \vec{d} \,//\, r \;\rightarrow\; \vec{d}(3, -2, 1) \,//\, \pi$$

Si π es ortogonal a σ, el vector normal de σ es paralelo a π:

$$\vec{n}_\sigma(2, -1, 3) \perp \sigma \quad \rightarrow \quad (2, -1, 3) \,//\, \pi$$

Obtenemos un vector normal a π: $(3, -2, 1) \times (2, -1, 3) = (-5, -7, 1) \quad \rightarrow \quad (5, 7, -1)$

La ecuación del plano π es: $5(x-1) + 7(y+1) - 1(z-1) = 0$

$$5x + 7y - z + 3 = 0$$

- Ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π y σ:

$$\left.\begin{array}{l} \pi:\ 5x + 7y - z + 3 = 0 \\ \sigma:\ 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

Vector dirección de la recta: $(5, 7, -1) \times (2, -1, 3) = (20, -17, -19)$

Punto de la recta:

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} 7y - z + 3 = 0 \\ -y + 3z + 1 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{2} \\ z = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \ R\left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Ecuaciones de la recta: $\left\{\begin{array}{l} x = 20\lambda \\ y = -\dfrac{1}{2} - 17\lambda \\ z = -\dfrac{1}{2} - 19\lambda \end{array}\right.$

6.-

Dados la recta r: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-y}{1} = \dfrac{z+1}{3}$ y el plano π: $x + 3y - 3z + 3 = 0$, halla el plano que contiene a r y es perpendicular a π.

$$r:\ \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3} \quad \rightarrow \quad P(0, 1, -1);\ \vec{d}(2, -1, 3)$$

$$\pi:\ x + 3y - 3z + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{n}(1, 3, -3)$$

El plano será paralelo a $\vec{d}$ y a $\vec{n}$ y contendrá a P.

Un vector normal será: $(2, -1, 3) \times (1, 3, -3) = (-6, 9, 7) \quad \rightarrow \quad (6, -9, -7)$

La ecuación del plano es: $6(x-0) - 9(y-1) - 7(z+1) = 0$

$$6x - 9y - 7z + 2 = 0$$

7.- Determina la perpendicular común a las rectas:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x + y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{array}\right. \qquad s:\left\{\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{array}\right.$$

Escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$r: \left\{ \begin{array}{l} x + \ \ y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{array} \right\}$ Restando la 1ª ecuación a la 2ª: $y = 3 - z$
$x = 7 - 2y = 7 - 2(3 - z) = 1 + 2z$

$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow$ Un punto genérico de r es: $R(1 + 2\lambda, 3 - \lambda, \lambda)$

$s: \left\{ \begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow s: \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = \mu \end{cases} \rightarrow$ Un punto genérico de s es: $S(2, -3, \mu)$

Un vector genérico de origen en r y extremo en s es: $\overrightarrow{RS}(1 - 2\lambda, -6 + \lambda, \mu - \lambda)$

Este vector debe ser perpendicular a r y a s:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{RS} \cdot (2, -1, 1) = 0 \rightarrow 2 - 4\lambda + 6 - \lambda + \mu - \lambda = 0 \rightarrow -6\lambda + \mu + 8 = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (0, 0, 1) = 0 \rightarrow \mu - \lambda = 0 \rightarrow \mu = \lambda \end{array} \right\}$$

$-5\lambda + 8 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{8}{5}; \ \mu = \frac{8}{5}$

Así:

$$\left. \begin{array}{l} R\left(\frac{21}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right) \\ S\left(2, -3, \frac{8}{5}\right) \end{array} \right\} \overrightarrow{RS}\left(-\frac{11}{5}, -\frac{22}{5}, 0\right) \rightarrow \vec{d}(1, 2, 0)$$

La perpendicular común a las rectas es:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = 8/5 \end{cases}$$

8.- Halla p para que las rectas r_1 y r_2 sean perpendiculares:

$r_1: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ $\qquad r_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-p}{p-1} = \frac{z-3}{3}$

Calcula su punto de intersección y la ecuación del plano que las contiene.

a) $(4, -2, 2) \cdot (1, p - 1, 3) = 4 - 2p + 2 + 6 = 12 - 2p = 0 \rightarrow p = 6$

b) $r_1: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ $\qquad r_2: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 6 + 5\mu \\ z = 3 + 3\mu \end{cases}$

• Punto de intersección:

$$\left.\begin{aligned} 4\lambda &= 1 + \mu \\ 1 - 2\lambda &= 6 + 5\mu \\ 2\lambda &= 3 + 3\mu \end{aligned}\right\}$$ Sumando las dos últimas ecuaciones:

$1 = 9 + 8\mu \quad \rightarrow \quad -8 = 8\mu \quad \rightarrow \quad \mu = -1$

$\lambda = \dfrac{3 + 3\mu}{2} = \dfrac{3 - 3}{2} = 0$

1ª ecuación: $4 \cdot 0 = 1 - 1$. Luego $\lambda = 0$, $\mu = -1$.

Sustituyendo $\lambda = 0$ en las ecuaciones de r_1 (o bien $\mu = -1$ en las de r_2), obtenemos el punto de corte: $(0, 1, 0)$.

• Ecuación del plano que las contiene:

$(4, -2, 2) \times (1, 5, 3) = (-16, -10, 22) \quad \rightarrow \quad (8, 5, -11)$ es un vector normal al plano.

Ecuación: $8(x - 0) + 5(y - 1) - 11(z - 0) = 0$

$$8x + 5y - 11z - 5 = 0$$

9.-

Dados la recta $r: \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$ **y el plano** $\pi: \; x + 2y + 3z - 1 = 0$, **halla la ecuación de una recta situada en el plano** π, **que pase por el punto** $P(2, 1, -1)$ **y sea perpendicular a** r.

Un vector dirección de r es: $(1, 0, -2) \times (0, 1, -1) = (2, 1, 1)$

La recta que buscamos ha de ser perpendicular a $(2, 1, 1)$ y perpendicular a $(1, 2, 3)$ (pues está situada en el plano π). Un vector dirección de la recta es:

$$(2, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -5, 3)$$

El punto $P(2, 1, -1)$ pertenece al plano y debe pertenecer a la recta buscada. Luego la recta es:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

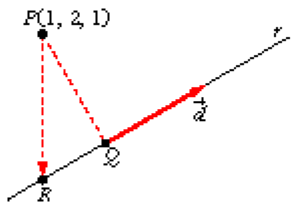
10.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 2, 1) y corta perpendicularmente a la recta:

$r: \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$

Escribimos r en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x - y - z = 1 \quad \rightarrow \quad y = x - z - 1 = 2 - z - z - 1 = 1 - 2z \\ x + z = 2 \quad \rightarrow \quad x = 2 - z \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \text{ Un punto genérico de } r \text{ es: } R(2 - \lambda, 1 - 2\lambda, \lambda)$$



Si llamamos al punto $P(1, 2, 1)$, el vector $\overrightarrow{PR}$ ha de ser perpendicular a r, es decir, perpendicular a $\vec{d}(-1, -2, 1)$.

Por tanto, como $\overrightarrow{PR}(1 - \lambda, -1 - 2\lambda, -1 + \lambda)$:

$\overrightarrow{PR} \cdot \vec{d} = 0 \quad \rightarrow \quad (1 - \lambda, -1 - 2\lambda, -1 + \lambda) \cdot (-1, -2, 1) = 0$

$-1 + \lambda + 2 + 4\lambda - 1 + \lambda = 0 \quad \rightarrow \quad 6\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 0$

La recta que buscamos pasa por el punto $P(1, 2, 1)$ y por el punto $Q(2, 1, 0)$ (Q se obtiene sustituyendo $\lambda = 0$ en las ecuaciones de r).

Un vector dirección será: $\overrightarrow{PQ}(12, -1, -1)$

La recta es: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

11.- Halla la ecuación del plano que contiene a la recta de ecuaciones paramétricas: $(-1 + 3\lambda, 1 + 2\lambda, 2 + \lambda)$ y es perpendicular al plano $2x + y - 3z + 4 = 0$. Determina también el ángulo formado por la recta y el plano dados.

Un vector normal al plano es: $(3, 2, 1) \times (2, 1, -3) = (-7, 11, -1) \quad \rightarrow \quad (7, -11, 1)$

Un punto del plano es $(-1, 1, 2)$ (pues contiene a la recta).

- La ecuación del plano será:

$7(x + 1) - 11(y - 1) + 1(z - 2) = 0$

$7x - 11y + z + 16 = 0$

- Ángulo formado por la recta y el plano dados:

$\vec{d}(3, 2, 1)$; $\vec{n}(2, 1, -3)$

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}|\,|\vec{n}|} = \frac{6 + 2 - 3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{5}{14} = 0{,}357$$

$90° - \alpha = 69°\ 4'\ 31'' \quad \rightarrow \quad \alpha = 20°\ 55'\ 29''$

12.- Determina, razonadamente, si las rectas

$$r: \begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x - y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

se cortan o se cruzan. Halla también el coseno del ángulo que forman sus direcciones.

Obtenemos un punto y un vector dirección de cada una de las dos rectas:

$\vec{d}_r$: $(1, 1, -2) \times (2, -1, 1) = (-1, -5, -3) \quad \rightarrow \quad \vec{d}_r(1, 5, 3)$; $P(0, -1, 0)$

$\vec{d}_s$: $(2, 1, -1) \times (1, -1, -2) = (-3, 3, -3) \rightarrow \vec{d}_s(1, -1, 1)$; $P'(0, 1, 0)$

$\overrightarrow{PP'}(0, 2, 0)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r|\ |\vec{d}_s|} = \frac{|1 - 5 + 3|}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{105}} = 0{,}0976$$

13.- Sean los puntos $P(3, 1, 5)$ y $Q(-1, 7, 3)$. Por el punto medio del segmento PQ trazamos un plano π perpendicular a dicho segmento. Este plano corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C.

a) Escribe la ecuación de π.

b) Calcula el área del triángulo ABC.

a) El plano es perpendicular al vector $\overrightarrow{PQ}(-4, 6, -2)$; un vector normal al plano es $(2, -3, 1)$.

Pasa por el punto medio del segmento PQ: $M(1, 4, 4)$.

La ecuación del plano es: $2(x - 1) - 3(y - 4) + 1(z - 4) = 0$

$$\pi: 2x - 3y + z + 6 = 0$$

b) Hallamos los vértices del triángulo:

$y = z = 0 \rightarrow 2x + 6 = 0 \rightarrow x = -3 \rightarrow A(-3, 0, 0)$

$x = z = 0 \rightarrow -3y + 6 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow B(0, 2, 0)$

$x = y = 0 \rightarrow z + 6 = 0 \rightarrow z = -6 \rightarrow C(0, 0, -6)$

$\overrightarrow{AB}(3, 2, 0)$ $\overrightarrow{AC}(3, 0, -6)$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-12, 18, -6) \rightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{504}$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{504}}{2} \approx 11{,}22 \text{ u}^2$$

14.- Halla los puntos simétricos de $P(1, 2, 3)$ respecto del plano

$\alpha: x - 3y - 2z + 4 = 0$ **y respecto de la recta** $r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 4x - z = 0 \end{cases}$

- Simétrico respecto del plano:

  - Ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a α:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

  - Punto de corte de α con la recta anterior:

$$(1 + \lambda) - 3(2 - 3\lambda) - 2(3 - 2\lambda) + 4 = 0$$

$$1 + \lambda - 6 + 9\lambda - 6 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$14\lambda - 7 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

La recta y el plano se cortan en $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$. Este es el punto medio del segmento PP', siendo P' el simétrico de P respecto del plano α. Luego, si $P'(x, y, z)$, entonces: $\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z+3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2\right) \quad \rightarrow \quad P'(2, -1, 1)$

- Simétrico respecto de la recta:

  - Escribimos la recta en paramétricas:

$$\left.\begin{cases} x - y + 3 = 0 & \rightarrow \quad y = x + 3 \\ 4x - z = 0 & \rightarrow \quad z = 4x \end{cases}\right\} \quad \rightarrow \quad r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

  - Hallamos la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P:

$$1(x - 1) + 1(y - 2) + 4(z - 3) = 0$$

$$x + y + 4z - 15 = 0$$

  - Obtenemos el punto de intersección de la recta r con el plano:

$$\lambda + 3 + \lambda + 16\lambda - 15 = 0$$

$$18\lambda - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{2}{3}$$

El punto de corte es $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$. Este es el punto medio del segmento PP'', siendo P'' el simétrico de P respecto de la recta r. Así, si $P''(a, b, c)$, entonces: $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2}, \frac{c+3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right) \quad \rightarrow \quad P''\left(\frac{1}{3}, \frac{16}{3}, \frac{7}{3}\right)$

15.- Halla la distancia entre el punto $P(2, 1, 3)$ y la recta

$$r: \begin{cases} 2x - y - z - 3 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

- Escribimos la recta r en forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 3 + z \\ x - y = 2 - z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \text{Restando:} \quad x = \ \ 1 + 2z \\ y = x + z - 2 = -1 + 3z \end{array}\right\} \quad r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- Hallamos la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r:

$$2(x - 2) + 3(y - 1) + 1(z - 3) = 0$$

$$\pi: 2x + 3y + z - 10 = 0$$

- Obtenemos el punto de corte de r con π:

$$2(1 + 2\lambda) + 3(-1 + 3\lambda) + \lambda - 10 = 0$$

$$2 + 4\lambda - 3 + 9\lambda + \lambda - 10 = 0$$

$$14\lambda - 11 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{11}{14}$$

El punto de corte es $Q\left(\frac{18}{7}, \frac{19}{14}, \frac{11}{14}\right)$.

- Calculamos la distancia:

$$dist\,(P, r) = dist\,(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \left|\left(\frac{4}{7}, \frac{5}{14}, \frac{-31}{14}\right)\right| = \sqrt{\frac{1050}{196}} = \sqrt{\frac{75}{14}} = 2{,}31$$

16.- Determina la ecuación de un plano π paralelo al plano de la ecuación $x - 2y + 3z + 6 = 0$ y que dista 12 unidades del origen.

Un plano paralelo a $x - 2y + 3z + 6 = 0$ es de la forma $\pi: x - 2y + 3z + k = 0$. Tenemos que hallar k para que la distancia al origen sea de 12 unidades:

$$dist\,[(0, 0, 0), \pi] = \frac{|k|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{|k|}{\sqrt{14}} = 12 \begin{cases} k = 12\sqrt{14} \\ k = -12\sqrt{14} \end{cases}$$

Hay dos planos: $x - 2y + 3z + 12\sqrt{14} = 0$ y $x - 2y + 3z - 12\sqrt{14} = 0$

17.- Halla la ecuación de la proyección ortogonal r' de la recta $\boldsymbol{r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}}$ **sobre el plano** $\boldsymbol{\alpha: x - 3y + 2z + 12 = 0}$.

La proyección ortogonal de r sobre α es la recta intersección del plano α con otro plano π, perpendicular a α y que contiene a r.

$$P(1, 1, 2); \ \vec{d}_r(2, 1, 2); \ \vec{n}(1, -3, 2)$$

$$\vec{d}_r \times \vec{n} = (2, 1, 2) \times (1, -3, 2) = (8, -2, -7)$$

La ecuación de π es: $8(x - 1) - 2(y - 1) - 7(z - 2) = 0$

$$\pi: 8x - 2y - 7z + 8 = 0$$

La proyección ortogonal de r sobre α es:

$$r': \begin{cases} x - 3y + 2z + 12 = 0 \\ 8x - 2y - 7z + 8 = 0 \end{cases}$$

18.-

Los puntos $P(0, 1, 0)$ y $Q(-1, 1, 1)$ son dos vértices de un triángulo, y el tercero, S, pertenece a la recta $r: \begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases}$. La recta que contiene a P y a S es perpendicular a la recta r.

a) Determina las coordenadas de S.

b) Calcula el área del triángulo PQS.

a) $\overrightarrow{PS} \perp \vec{d}_r \rightarrow \overrightarrow{PS} \cdot \vec{d}_r = 0$

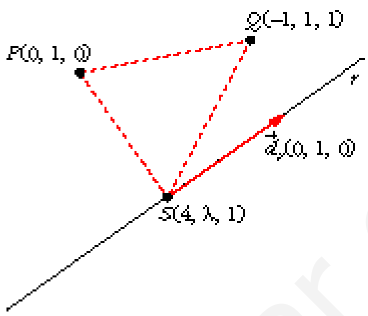
$(4, \lambda - 1, 1) \cdot (0, 1, 0) = \lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda = 1$

$S(4, 1, 1)$

b) $\overrightarrow{PS}(4, 0, 1)$ $\overrightarrow{PQ}(-1, 0, 1)$

$\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ} = (4, 0, 1) \times (-1, 0, 1) = (0, -5, 0)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ}|}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ u}^2$$



19.-

Sea la recta $r: \begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$

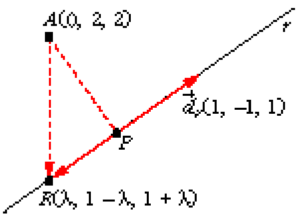
a) Determina la ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por $(0, 2, 2)$, y las coordenadas del punto P intersección de r y s.

b) Halla la ecuación del plano π que contiene a r y s y la de la recta t perpendicular a π por el punto P.

c) Si Q es cualquier punto de t, explica, sin hacer ningún cálculo, qué relación hay entre las distancias de Q a r, a s y a π.

a) Escribimos r en forma paramétrica:

$$\left.\begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 & \rightarrow \quad z = 3x + 2y - 1 = 1 + x \\ x + y \quad\quad - 1 = 0 & \rightarrow \quad y = 1 - x \end{cases}\right\} \quad r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$



Un punto genérico de r es $R(\lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$.

$\overrightarrow{AR}$ ha de ser perpendicular a r, es decir: $\overrightarrow{AR} \cdot \vec{d}_r = 0$

$(\lambda, -1 - \lambda, -1 + \lambda) \cdot (1, -1, 1) = 0$

$\lambda + 1 + \lambda - 1 + \lambda = 0 \;\rightarrow\; 3\lambda = 0 \;\rightarrow\; \lambda = 0$

$R(0, 1, 1)$

La recta s pasa por $A(0, 2, 2)$ y por $R(0, 1, 1)$.

$$\overrightarrow{RA}(0, 1, 1) \;\rightarrow\; s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

El punto de intersección de r y s es $P(0, 1, 1)$.

b) Ecuación del plano π que contiene a r y a s:

$\vec{n} = (1, -1, 1) \times (0, 1, 1) = (-2, -1, 1)$; $P(0, 1, 1) \in \pi$

$-2(x - 0) - 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0$

$\pi: -2x - y + z = 0$

Ecuación de la recta t perpendicular a π por el punto P:

$$t: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

c) Si $Q \in t \;\rightarrow\; dist(Q, r) = dist(Q, s) = dist(Q, \pi) = dist(Q, P)$

Las tres distancias coinciden con la distancia de Q al punto P, luego las tres son iguales entre sí.

20.- Halla el plano de la familia: $mx + y + z - (m + 1) = 0$ que está situado a distancia 1 del origen.

Hallamos la distancia del origen, (0, 0, 0), al plano y la igualamos a 1:

$$dist = \frac{|m \cdot 0 + 0 + 0 - (m + 1)|}{\sqrt{m^2 + 1 + 1}} = \frac{|m + 1|}{\sqrt{m^2 + 2}} = 1$$

$$|m + 1| = \sqrt{m^2 + 2} \;\rightarrow\; (m + 1)^2 = m^2 + 2 \;\rightarrow\; m^2 + 1 + 2m = m^2 + 2$$

$$2m = 1 \;\rightarrow\; m = \frac{1}{2}$$

El plano es: $\frac{1}{2}x + y + z - \frac{3}{2} = 0$; es decir: $x + 2y + 2z - 3 = 0$