

- ① Escribe la ecuación de una recta que pase por $P(1, -2, 0)$ y su dirección sea $\vec{d}(-3, 1, -1)$.

Solución:

Ec. paramétricas: $r: \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + t \\ z = -t \end{cases}$; Ec. en forma continua: $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$

- ② Calcula la ecuación de un plano que pase por $P(-1, 0, 3)$ y sea perpendicular a la recta $r: \frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$

Solución:

$\Pi: ax+by+cz+d=0$; $\vec{n}(a, b, c)$: vector $\perp$ a Π

Como $r \perp \Pi \Rightarrow \vec{d}_r = \vec{v}_\Pi \Rightarrow \vec{v}_\Pi = (-3, 1, -1) \rightarrow \Pi: -3x+y-z+d=0$

Como $P(-1, 0, 3) \in \Pi$: $-3 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 + d = 0 \Rightarrow d = 0$

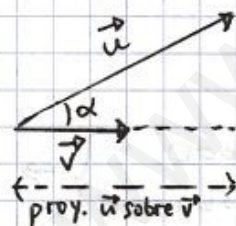
Por tanto $\Pi: 3x - y + z = 0$

- ③ Calcula la proyección de $\vec{u}(7, 3, 1)$ sobre $\vec{v}(1, -2, 3)$.

Solución:

proy. $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ = $\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{7-6+3}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{4}{\sqrt{14}}$

Dem.: proy. $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ se calcula así:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\text{proy. } \vec{u} \text{ sobre } \vec{v}}{|\vec{u}|} \Rightarrow \text{proy. } \vec{u} \text{ sobre } \vec{v} = \cos \alpha \cdot |\vec{u}| \\ \text{Como } \vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \\ \rightarrow \text{proy. } \vec{u} \text{ sobre } \vec{v} &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \cdot |\vec{u}| = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$


- ④ Escribe todos los vectores perpendiculares a $\vec{u}(1, -2, 0)$.

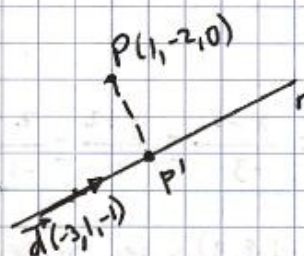
Solución: Hay infinitas soluciones. Cualquier vector $\vec{v}(a, b, c) \perp$ a $\vec{u}$ debe cumplir $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (1, -2, 0) \cdot (a, b, c) = 0 \Rightarrow a - 2b = 0 \Rightarrow a = 2b$

Por tanto, todos los vectores de la forma $\vec{v}(2b, b, c)$ son $\perp$ a $\vec{u}$.

⑤ Halla la distancia de $P(1, -2, 0)$ a $r: \frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$

Solución:

Forma 1: Calculando P' (punto de enfrente), que es la intersección de r con el plano Π (perpendicular a r y que pasa por P).



1.º Calculamos $\Pi: ax+by+cz+d=0$

Como $\Pi \perp r \Rightarrow \vec{v}_\Pi = \vec{d}_r \Rightarrow \vec{v}_\Pi = (a, b, c) = (-3, 1, -1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Pi: -3x + y - z + d = 0$

Como $P \in \Pi: (-3) \cdot 1 + (1) \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 + d = 0 \Rightarrow d = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Pi: -3x + y - z + 5 = 0 \rightarrow \Pi: 3x - y + z - 5 = 0$

2.º Calculamos $P' = r \cap \Pi \rightarrow$ Buscamos el valor de λ para el cual $(x, y, z) \in r \cap \Pi$:

Como $r: (x=1-3\lambda; y=-2+\lambda; z=-\lambda)$, sustituyendo en la ecuación de Π :

$$3 \cdot (1-3\lambda) - (-2+\lambda) + (-\lambda) - 5 = 0 \Rightarrow 3 - 9\lambda + 2 - \lambda - 5 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow P' = (1, -2, 0) \rightarrow P' = P$. Esto indica que el punto $P \in r$.

Por tanto $d(P, r) = d(P, P') = 0$.

⑥ Halla todos los vectores $\vec{w}$ perpendiculares simultáneamente a $\vec{u}(2, 1, 0)$ y $\vec{v}(-1, 3, 1)$.

Solución: Sea $\vec{w}(a, b, c)$.

$$\left. \begin{aligned} \vec{w} \perp \vec{u} &\Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (a, b, c) \cdot (2, 1, 0) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \\ \vec{w} \perp \vec{v} &\Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (a, b, c) \cdot (-1, 3, 1) = 0 \Rightarrow -a + 3b + c = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{w} = (a, -2a, -7a) \rightarrow \underline{\vec{w} = a \cdot (1, -2, -7)}$$

⑦ Comprueba que las rectas $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$ y $s: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$ determinan un plano.

Solución: Dos rectas determinan un plano si no son paralelas.

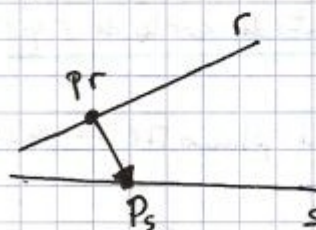
Como $\vec{d}_r = (2, 1, -1)$ y $\vec{d}_s = (3, -1, 2)$ no son paralelos, determinan un plano.

- 8) Comprueba que $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ y $s: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}$ se cruzan (no tienen ningún punto en común sin ser paralelas).

Solución:

$\vec{d}_r: (2, -1, 3)$ Como $\vec{d}_r \nparallel \vec{d}_s$ (r y s no son paralelas) $\Rightarrow$ se cortan en un punto o se cruzan.
 $\vec{d}_s: (1, 3, 2)$

Para ver si se cortan o se cruzan vemos si el vector $\overrightarrow{P_r P_s}$ es coplanario con r y s .



$$\overrightarrow{P_r P_s} = (-1, 2, -3) - (1, -1, 0) = (-2, 3, -3)$$

$\vec{d}_r, \vec{d}_s$ y $\overrightarrow{P_r P_s}$ son coplanarios (están en el mismo plano) si son linealmente dependientes.

$\vec{d}_r, \vec{d}_s$ y $\overrightarrow{P_r P_s}$ están en distinto plano si son l.i. independientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \{\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{P_r P_s}\} \text{ son l.i.} \rightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

- 9) Calcule el valor de a para que r y s se corten, y halla el punto de corte para el valor de a calculado.

$$r: x = y = z = a \quad ; \quad s: \frac{2x-1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{0}$$

Solución:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = a + \lambda \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{3\lambda}{2} \\ y = -3 - 2\lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

Nota: Es necesario expresar s de esta forma para poder calcular $\vec{P}_s$ y $\vec{d}_s$. Lo que se ha hecho es:

$$\frac{2x-1}{3} = \frac{x-1/2}{3/2} \quad (\text{dividir num. y denom. entre 2})$$

$$\vec{d}_r = (1, 1, 1) \quad ; \quad \vec{d}_s = \left(\frac{3}{2}, -2, 0\right) \rightarrow \vec{d}_s = (3, -4, 0)$$

$$\overrightarrow{P_r P_s} = \left(\frac{1}{2}, -3, 2\right) - (0, 0, a) = \left(\frac{1}{2}, -3, 2-a\right)$$

$$\vec{d}_r, \vec{d}_s \text{ y } \overrightarrow{P_r P_s} \text{ son coplancarios} \Leftrightarrow r \text{ y } s \text{ se cortan si: } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ \frac{1}{2} & -3 & 2-a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{a=3}$$

Por tanto r y s se cortan para $\underline{a=3}$.

Calculo del punto de corte de r y s :

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

valor de λ calculado

$$s: \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{3\mu}{2} \\ y = -3 - 2\mu \\ z = 2 \end{cases}$$

Nota: Interesera escribir los parámetros con distinta letra para r y s (λ, μ).

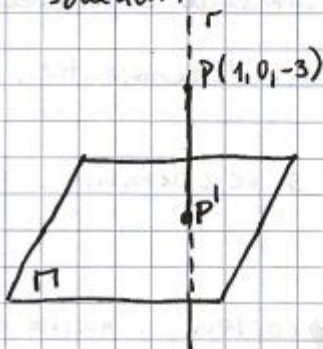
$$P = r \cap s: \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} + \frac{3\mu}{2} \\ \lambda = -3 - 2\mu \\ 3 + \lambda = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas} \\ \text{con solución } \lambda = -1; \mu = -1 \end{array}$$

P se calcula sustituyendo $\lambda = -1$ en r o bien $\mu = -1$ en s .

Sustituyendo $\lambda = -1$ en r : $P = (-1, -1, 2)$: punto de corte de r y s

(10) Calcule la distancia del punto $P(1, 0, -3)$ al plano $\Pi: x - y + 2z + 3 = 0$.

Solución:



FORMA 1: Calculando P' (punto de enfrente), que es la intersección de Π con la recta r (perpendicular a Π y que pasa por P).

Calculo de r : Como $r \perp \Pi \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{d}_r \Rightarrow \vec{d}_r = (1, -1, 2)$. Como $P(1, 0, -3) \in r$:

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases}$$

Calculo de $P' = r \cap \Pi$: hallamos λ tal que $P \in r \cap \Pi$:

$$1 \cdot (1 + \lambda) + (-1) \cdot (-\lambda) + 2 \cdot (-3 + 2\lambda) + 3 = 0 \Rightarrow 1 + \lambda + \lambda - 6 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow 6\lambda - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{3} \rightarrow P' = \left(1 + \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -3 + \frac{2}{3}\right) \rightarrow P' \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{7}{3}\right)$$

$$\underline{d(P, \Pi) = d(P, P')} = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(-\frac{7}{3} + 3\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \underline{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

FORMA 2: Aplicando la fórmula $d(P, \Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + d|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

siendo $P(x_0, y_0, z_0)$ y $\Pi: Ax + By + Cz + d = 0$.

$$\text{En el ejemplo: } d(P, \Pi) = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \underline{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

- 11) Calcula los puntos de $r: \frac{x}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-4}$ cuya distancia al punto $P(1, 3, -1)$ sea igual a 3.

Solución: Cualquier punto $P_r \in r$ es de la forma $(3\lambda, 1+\lambda, 1-4\lambda)$.

Hay que hallar los valores de λ para los cuales $|\overrightarrow{P_r P}| = 3$.

$$\overrightarrow{P_r P} = (1, 3, -1) - (3\lambda, 1+\lambda, 1-4\lambda) = (1-3\lambda, 2-\lambda, -2+4\lambda)$$

$$d(P_r, P) = |\overrightarrow{P_r P}|. \text{ Como debe ser } |\overrightarrow{P_r P}| = 3 \Rightarrow |\overrightarrow{P_r P}|^2 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-3\lambda)^2 + (2-\lambda)^2 + (-2+4\lambda)^2 = 9 \Rightarrow 1 + 9\lambda^2 - 6\lambda + 4 + \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 16\lambda^2 - 16\lambda - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 26\lambda^2 - 26\lambda = 0 \Rightarrow 26\lambda(\lambda - 1) = 0 \begin{cases} \lambda = 0 \rightarrow P_1(0, 1, 1) \\ \lambda = 1 \rightarrow P_2(3, 2, -3) \end{cases}$$

Por tanto los puntos $P_1(0, 1, 1)$ y $P_2(3, 2, -3)$ son los dos puntos de r que distan 3 unidades de $P(1, 3, -1)$.

- 12) Los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(1, 3, 3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Calcula:

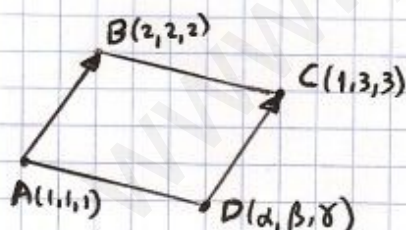
- Coordenadas del cuarto vértice, D , y área del paralelogramo.
- Clasificar el paralelogramo por sus lados y sus ángulos.

Solución:

Nota: A, B, C son consecutivos $\rightarrow$ el paralelogramo viene dado por $ABCD$: se nombra con sus vértices en sentido de las agujas del reloj. No situar el punto C alineado con D !

Sea $D(\alpha, \beta, \gamma)$ el punto buscado.

Como A, B, C y D forman un paralelogramo (lados paralelos 2 a 2) $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$:



$$\overrightarrow{AB} = (2, 2, 2) - (1, 1, 1) = (1, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{DC} = (1, 3, 3) - (\alpha, \beta, \gamma) = (1-\alpha, 3-\beta, 3-\gamma)$$

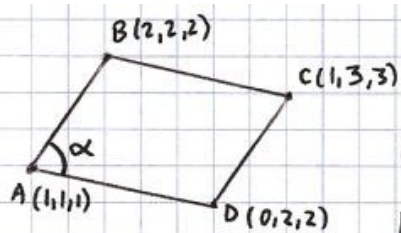
$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow 1 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0; \\ 1 = 3 - \beta \Rightarrow \beta = 2; 1 = 3 - \gamma \Rightarrow \gamma = 2 \end{array} \right\}$$

Por tanto $D(0, 2, 2)$ es el 4º vértice buscado.

Área del paralelogramo = $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$; siendo $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{AD} = (0, 2, 2) - (1, 1, 1) = (-1, 1, 1) \end{cases}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -2, 2); |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} u^2; \text{ ÁREA} = \sqrt{8} u^2$$

b)

Lados: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Longitud de } \overline{AB} = \text{Longitud de } \overline{CD} = \sqrt{3} \text{ u} \\ \text{Longitud de } \overline{BC} = \text{Longitud de } \overline{AD} = \sqrt{3} \text{ u} \end{array} \right\} \rightarrow$$

$\rightarrow$ Todos los lados miden lo mismo $\Rightarrow$ Puede ser un cuadrado o un rombo. Para determinarlo, calculamos α (ángulo formado por 2 lados consecutivos). Si $\alpha = 90^\circ \Rightarrow$ es un cuadrado y si $\alpha \neq 90^\circ \Rightarrow$ es un rombo.

Nota: No es necesario hallar α , basta con ver si $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = (1, 1, 1) \cdot (-1, 1, 1) = -1 + 1 + 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \text{ y } \overrightarrow{AD} \text{ no son perpendiculares.}$$

Por tanto el paralelogramo es un rombo.

* Si se pidiese calcular α , se haría por el producto escalar:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\cos \alpha = 1/3 \Rightarrow \alpha = \arccos(1/3) = 70,5^\circ.$$

13

Halla el volumen del paralelepípedo formado por los vectores

$$\vec{u}(-1, 2, 0), \vec{v}(1, 3, -1), \vec{w}(-3, 5, 2).$$

Solución:

El volumen de un paralelepípedo viene dado por el producto mixto de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ que lo determinan. $V = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

Por tanto:

[Si el resultado es un nº negativo, se cambia el signo]

$$V = (-1, 2, 0) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = (-1, 2, 0) \cdot (11, 1, 14) = -11 + 2 = -9 \rightarrow 9.$$

$$\rightarrow \text{VOLUMEN} = 9 \text{ u}^3$$

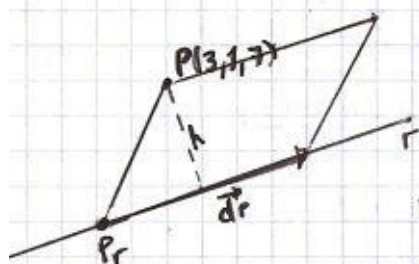
* Se puede hallar también V así: $V = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -9 - 0 = 9$

- (14) Calcular la distancia del punto $P(3,1,7)$ a la recta $r: \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}$

Solución: La distancia de un punto a una recta se puede hallar de dos formas. La forma 1 aparece en el ejercicio

(3), que consiste en calcular el punto de enfrente, P' .

La forma 2 es la siguiente: Sea $h = \text{distancia}(P, r)$



Trazamos el vector $\overrightarrow{PrP}$, siendo $Pr(1,2,0)$ y se construye el paralelogramo de la figura.

$$\text{Sabemos que } \text{Área}(\text{paralelogramo}) = |\overrightarrow{PrP} \times \overrightarrow{dr}| \quad \Rightarrow$$

$$\text{y que } \text{Área}(\text{paralelogramo}) = |\overrightarrow{dr}| \cdot h$$

$$\Rightarrow h = \frac{|\overrightarrow{PrP} \times \overrightarrow{dr}|}{|\overrightarrow{dr}|}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PrP} &= (3,1,7) - (1,2,0) = (2,-1,7) \\ \overrightarrow{dr} &= (-1,1,-1) \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} \overrightarrow{PrP} \times \overrightarrow{dr} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 7 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= (-6, -5, 1) \end{aligned} \right.$$

$$|\overrightarrow{PrP} \times \overrightarrow{dr}| = \sqrt{36+25+1} = \sqrt{62} \quad ; \quad |\overrightarrow{dr}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

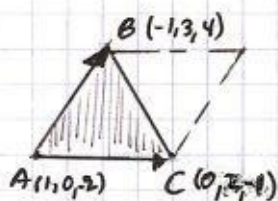
$$\text{Por tanto: } \boxed{h = \frac{\sqrt{62}}{\sqrt{3}} \text{ u}}$$

En general, la distancia de un punto P a una recta r de la que conozcamos Pr y $\overrightarrow{dr}$ viene dada por:

$$\boxed{d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{PrP} \times \overrightarrow{dr}|}{|\overrightarrow{dr}|}}$$

- (15) Halla el área del triángulo de vértices $A(1,0,-2)$, $B(-1,3,4)$ y $C(0,2,-1)$.

Solución:



$$\text{Área } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 3, 6) \quad ; \quad \overrightarrow{AC} = (-1, 2, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-9, -4, -1)$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{81+16+1} = \sqrt{98} = \sqrt{2 \cdot 49} = 7\sqrt{2}$$

$$\boxed{\text{Área } \triangle ABC = \frac{7\sqrt{2}}{2} \text{ u}^2}$$

16) Los puntos $P(0,1,0)$ y $Q(-1,1,1)$ son 2 vértices de un triángulo.

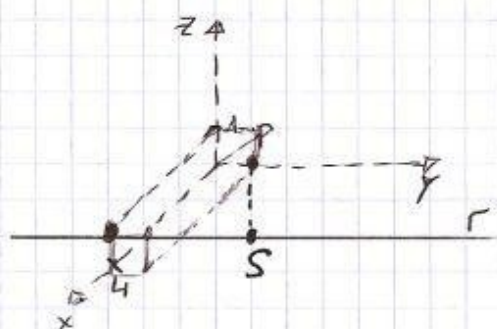
El tercer vértice, S , pertenece a la recta $r: \begin{cases} x=4 \\ z=1 \end{cases}$.

La recta que contiene a P y a S es $\perp$ a la recta r .

a) Determina las coordenadas del vértice S .

b) Calcula el área del triángulo PQS .

Solución:



$$S \in r \Rightarrow S(4, \lambda, 1); \vec{d}_r(0,1,0)$$

$$\text{Como } \vec{PS} \perp \vec{d}_r \Rightarrow \boxed{S(4,1,1)}$$

$$\text{Otra forma: } \vec{d}_r(0,1,0)$$

$$\vec{PS} = (4, \lambda, 1) - (0, 1, 0) \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{PS} = (4, \lambda-1, 0).$$

$$\text{Como } \vec{PS} \perp \vec{d}_r \Rightarrow \vec{PS} \cdot \vec{d}_r = 0 \Rightarrow (4, \lambda-1, 0) \cdot (0, 1, 0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow S = (4, 1, 1).$$

b) ÁREA TRIÁNGULO:

$$\left. \begin{array}{l} P(0,1,0) \\ Q(-1,1,1) \\ S(4,1,1) \end{array} \right\} \text{ÁREA} = \frac{1}{2} |\vec{PQ} \times \vec{PS}|$$

$$\vec{PQ} = (-1, 0, 1); \vec{PS} = (4, 0, 1)$$

$$\vec{PQ} \times \vec{PS} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0, 5, 0); |\vec{PQ} \times \vec{PS}| = 5$$

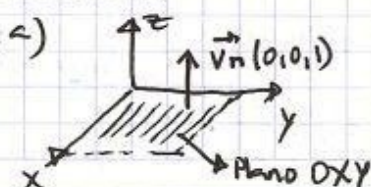
$$\text{Por tanto: } \boxed{\text{ÁREA } \widehat{PQS} = \frac{5}{2} \text{ u}^2.}$$

17) Dado un plano genérico $\Pi: ax+by+cz+d=0$, indica qué condición deben cumplir a, b, c y d para que:

a) Π sea paralelo al plano OXY ; b) Π sea $\perp$ al plano OXY .

c) Π sea paralelo al eje Z ; d) Π no sea paralelo a ninguno de los ejes.

Solución:



$$\Pi \text{ paralelo al plano } OXY \Rightarrow \vec{v}_n = (0, 0, 1)$$

d puede tomar cualquier valor.

$$\boxed{\Pi: z+d=0 \quad \forall d \in \mathbb{R} \quad (a=b=0; c=1)}$$

b) $\pi \perp$ al plano OXY

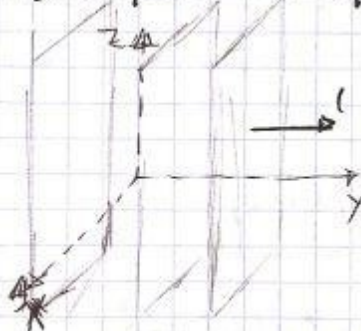
$\vec{v} = (0, 0, 1)$ es el vector $\perp$ al plano OXY.

$$\pi \perp \text{ al plano OXY} \Rightarrow (a, b, c) \perp (0, 0, 1) \Rightarrow (a, b, c) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow c = 0$ (no hay restricciones para a , b y d).

Por tanto: $ax + by + d = 0$ son todos los planos $\perp$ al plano OXY.

c) π paralelo al eje z



$$(a, b, c) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Rightarrow c = 0$$

Misma solución que en el apartado b)

d) π no paralelo a ninguno de los ejes

Eje X: $\vec{i} = (1, 0, 0)$: vector director del eje X

Eje Y: $\vec{j} = (0, 1, 0)$: " " " eje Y

Eje Z: $\vec{k} = (0, 0, 1)$: " " " eje Z

$$\left. \begin{array}{l} \pi \nparallel \text{ eje X} \Rightarrow (a, b, c) \text{ no debe ser perpendicular a } (1, 0, 0) \\ \pi \nparallel \text{ eje Y} \Rightarrow (a, b, c) \nparallel (0, 1, 0) \\ \pi \nparallel \text{ eje Z} \Rightarrow (a, b, c) \nparallel (0, 0, 1) \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow (a, b, c) \cdot (1, 0, 0) \neq 0 \Rightarrow a \neq 0 ; (a, b, c) \cdot (0, 1, 0) \neq 0 \Rightarrow b \neq 0 ;$$

$$(a, b, c) \cdot (0, 0, 1) \neq 0 \Rightarrow c \neq 0 \rightarrow \text{Deben ser } a \neq 0, b \neq 0 \text{ y } c \neq 0$$

(no hay restricciones para d).

$$\text{Por tanto: } \boxed{\pi: ax + by + cz + d = 0} \text{ con } a \neq 0, b \neq 0 \text{ y } c \neq 0$$

es un plano (hay infinitos) no paralelo a ningún eje.

(18) Demuestra que la ecuación de un plano que corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(\alpha, 0, 0)$, $B(0, \beta, 0)$ y $C(0, 0, \gamma)$ se puede escribir así: $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1$.

Solución: Sea $\pi: ax + by + cz = d$

$$A \in \pi \Rightarrow a\alpha = d ; B \in \pi \Rightarrow b\beta = d ; C \in \pi \Rightarrow c\gamma = d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{d}{\alpha} ; b = \frac{d}{\beta} ; c = \frac{d}{\gamma} \Rightarrow \pi: \frac{dx}{\alpha} + \frac{dy}{\beta} + \frac{dz}{\gamma} = d \Rightarrow \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1 \text{ c.q.d.}$$

- 19) Calcula el volumen de un tetraedro del que se conocen sus cuatro vértices: $A(2, 1, 4)$, $B(1, 0, 2)$, $C(4, 3, 2)$ y $D(1, 5, 6)$.

Solución:

El volumen de un tetraedro es $\frac{1}{6}$ del volumen del paralelepípedo. $V_{\text{TETRAEDRO}} = \frac{1}{6} V_{\text{PARALELEPÍPEDO}} = \frac{1}{6} |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$.

! Es necesario tomar uno cualquiera de los 4 puntos como origen de los 3 vectores que aparecen en la fórmula del volumen ($\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$)

→ (se elige el vértice con coordenadas más cómodas de operar)
Si tomamos B como origen, los 3 vectores que determinan el tetraedro son: $\vec{BA}$, $\vec{BC}$ y $\vec{BD}$

$$\text{Así, Volumen (tetraedro)} = \frac{1}{6} \underbrace{|[\vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BD}]|}_{\text{producto mixto}}$$

$$[\vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BD}] \text{ se puede hallar en: } \vec{BA} \cdot (\vec{BC} \times \vec{BD}).$$

Cálculo de los 3 vectores:

$$\vec{BA} = (2, 1, 4) - (1, 0, 2) = (1, 1, 2) \quad \vec{BC} \times \vec{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = (12, -12, 15)$$

$$\vec{BC} = (4, 3, 2) - (1, 0, 2) = (3, 3, 0)$$

$$\vec{BD} = (1, 5, 6) - (1, 0, 2) = (0, 5, 4) \quad \vec{BA} \cdot (\vec{BC} \times \vec{BD}) = (1, 1, 2) \cdot (12, -12, 15) = 12 - 12 + 15 = 15$$

$$\text{Por tanto, } \underline{V_{\text{TETRAEDRO}} = \frac{15}{6} u^3 = \frac{5}{2} u^3}$$

- 20) Halla el ángulo que forman los vectores $\vec{u}(1, 2, 0)$ y $\vec{v}(2, 1, -1)$.

$$\text{Solución: } \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{2+2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{30}} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{4}{\sqrt{30}} \Rightarrow \underline{\alpha \approx 43^\circ}$$

21) Calcula la distancia del plano $\Pi: 4x - 10y + 2z = -1$ al plano

$$\sigma: \begin{cases} x = 2\lambda + 3\mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$$

Solución: Lo 1º es ver si los planos Π y σ son o no son paralelos. Si son paralelos: $d(\Pi, \sigma) \neq 0$; si no son paralelos: $d(\Pi, \sigma) = 0$.

$\Pi: 4x - 10y + 2z = -1 \rightarrow \vec{v}_{\Pi} (4, -10, 2) \rightarrow (2, -5, 1)$ es un vector $\perp$ a Π .

Para calcular $\vec{v}_{\sigma}$ (vector $\perp$ a σ) hay que calcular $(2, 1, 1) \times (3, 1, -1)$:

$$\vec{v}_{\sigma} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2, -5, 1) \rightarrow \text{vector } \perp \text{ a } \sigma.$$

Por tanto Π y σ son paralelos $\Rightarrow d(\Pi, \sigma) \neq 0$

* Nota: Recuerda que del plano σ , al venir dado por sus ecuaciones paramétricas, sabemos:

- Un punto por el que pasa: $P_{\sigma}(0, 0, 0)$
- Las direcciones de las dos rectas que determinan la dirección del plano: $\vec{d}_1 (2, 1, 1)$ [coeficientes del parámetro λ] y $\vec{d}_2 (3, 1, -1)$ [coeficientes del parámetro μ].

• Como $\Pi \parallel \sigma \Rightarrow d(\Pi, \sigma)$ es la distancia de cualquier punto de Π al plano σ (o viceversa: distancia de cualquier punto de σ a Π). Por simplicidad escogemos $P_{\sigma}(0, 0, 0)$ y hallamos $d(P_{\sigma}, \Pi)$ según la fórmula de la distancia de un punto a un plano:

$$d(P_{\sigma}, \Pi) = \frac{|4 \cdot 0 - 10 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{4^2 + 10^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{120}} = \frac{1}{2\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{60} \text{ u}$$

* ¡No confundirse con el signo de "d". Aunque Π viene dado por $4x - 10y + 2z = -1$; en la fórmula $d(P, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ se sobreentiende que $\Pi: ax + by + cz + d = 0$.

- Ejemplo: Si $P(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 3)$ y $\Pi: 2x - y + z - 2 = 0$: $d(P, \Pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 + 3 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$