CONTROL INTEGRALES INDEFINIDAS

1) $\int (x^2+7x-5).\cos x \, dx$

2) $\int x \, tg^2 x \, dx$

3) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$

4) $\int \frac{dx}{2sen^2 x + 3\cos^2 x}$

5) $\int \frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{e^{4x}} dx$

6) $\int \frac{2x^2 + x - 1}{3x(x+2)(x-2)} dx$

7) Sea $f:(-1,1) \to \Re$ la función definida por $f(x) = Ln\left(1-x^2\right)$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0,1)

SOLUCIONES

1) $\int (x^2+7x-5).\cos x\,dx =$(llamamos $\left.\begin{matrix} u=x^2+7x-5 \\ dv=\cos x\,dx\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix} du=(2x+7)dx \\ v=\operatorname{sen} x\end{matrix}\right\}$) =

$= (x^2+7x-5)\operatorname{sen}x - \int (2x+7)\operatorname{sen}x\,dx =$ (haciendo $\left.\begin{matrix} u=2x+7 \\ dv=\operatorname{sen}x\,dx\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix} du=2dx \\ v=-\cos x\end{matrix}\right\}$)

$= (x^2+7x-5)\operatorname{sen}x + (2x+7)\cos x - 2\int \cos x\,dx =$

$= (x^2+7x-7)\operatorname{sen}x + (2x+7)\cos x + C$

2) $\int x\,tg^2x\,dx =$($\left.\begin{matrix} u=x \\ dv=tg^2x\,dx\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix} du=dx \\ v=tgx-x(*)\end{matrix}\right\}$) =

$(*) v = \int \frac{\operatorname{sen}^2x}{\cos^2x}dx = \int \frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}dx = \int \frac{1}{\cos^2x}dx - \int 1\,dx = tgx - x$

$= x\,tgx - x^2 - \int (tgx-x)dx = x\,tg\,x - \frac{x^2}{2} - \ln(\cos x) + C$

3) $\int \frac{\ln^2x}{x^2}dx =$($\left.\begin{matrix} u=\ln^2x \\ dv=\frac{1}{x^2}dx\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix} du=\frac{2\ln x}{x}dx \\ v=-\frac{1}{x}\end{matrix}\right\}$)$= -\frac{1}{x}\ln^2x + 2\int \frac{\ln x}{x^2}dx =$ (y ahora,

$\left.\begin{matrix} u=\ln x \\ dv=\frac{1}{x^2}dx\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix} du=\frac{dx}{x} \\ v=-\frac{1}{x}\end{matrix}\right\}$)$= -\frac{1}{x}\ln^2x + 2\left[-\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2}\right] = -\frac{1}{x}(\ln^2x + 2\ln x + 2) + C$

4) $\int \frac{dx}{2\operatorname{sen}^2x + 3\cos^2x}$ =(Dividimos numerador y denominador entre $3\cos^2x$)=

$= \int \frac{\frac{1}{3\cos^2x}dx}{\frac{2\operatorname{sen}^2x}{3\cos^2x}+1} = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{\cos^2x}dx}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}tgx\right)^2+1}$ =($\left\{\begin{matrix} t=\sqrt{\frac{2}{3}}tgx \\ dt=\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{\cos^2x}\end{matrix}\right.$)$= \frac{1}{\sqrt{6}}\,arctg\left(\sqrt{\frac{2}{3}}tg\,x\right) + C$

5) $\int \frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{e^{4x}}dx = \int e^{-3x}dx + \int e^{-2x}dx + \int e^{-x}dx =$

$= -\frac{1}{3}e^{-3x} - \frac{1}{2}e^{-2x} - e^{-x} + C$

6) $\int \frac{2x^2+x-1}{3x(x+2)(x-2)}dx = \int \frac{1/4}{3x}dx + \int \frac{5/24}{x+2}dx + \int \frac{9/24}{x-2}dx =$

$\frac{1}{12}\ln|x| + \frac{5}{24}\ln|x+2| + \frac{9}{24}\ln|x-2| + C$

7) Empezamos calculando $\int Ln(1-x^2)dx$ que se hace por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = Ln(1-x^2) \\ dv = dx \end{array}\right\} \begin{array}{l} du = \frac{-2x}{1-x^2}dx \\ v = x \end{array} \Rightarrow \int Ln(1-x^2)dx = xLn(1-x^2) - \int \frac{-2x^2}{1-x^2}dx =$$

$= xLn(1-x^2) + 2\int \frac{x^2}{1-x^2}dx$ para hacer esta integral, dividimos:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & -x^2+1 \\ \hline -x^2+1 & -1 \\ \hline +1 & \end{array} \qquad \Rightarrow \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{-1(1-x^2)+1}{1-x^2} = -1 + \frac{1}{1-x^2}$$

Con lo que tenemos $\int \frac{x^2}{1-x^2}dx = \int -1dx + \int \frac{1}{1-x^2}dx = -x + \int \frac{A}{1-x}dx + \int \frac{B}{1+x}dx$

$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \Rightarrow 1 = A(1+x) + B(1-x)$, sustituimos para $x=1$ y $x=-1$ y tenemos que $A = \frac{1}{2}$ y $B = \frac{1}{2}$, de donde, nuestra integral, nos quedará:

$\int Ln(1-x^2)dx = xLn(1-x^2) + 2\left[-x + \frac{1}{2}Ln|1-x| + \frac{1}{2}Ln|1+x|\right] + C$, es decir:

$\int Ln(1-x^2)dx = xLn(1-x^2) - 2x + Ln\left|1-x^2\right| + C$ y , como la gráfica de la primitiva pedida pasa por (0,1), tendremos que: $0 - 0 + Ln1 + C = 1 \Rightarrow C = 1$ por lo que la primitiva pedida es $xLn(1-x^2) - 2x + Ln\left|1-x^2\right| + 1$