EXAMEN DE DERIVABILIDAD.

1. Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{senx}{x} & si\ \ x<0\\ x\cdot e^x+1 & si\ \ x\geq 0\end{cases}$ estudiar la derivabilidad y calcular f' cuando sea posible.

   a. Continuidad.

   $$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{senx}{x}\ \text{ es continua en } \mathbb{R}\text{-}\{0\} \\ y=xe^x+1\ \text{ es continua en } \mathbb{R}\end{array}\right\}\Rightarrow contiuas\ \ en\ \mathbb{R}\text{-}\{0\}$$

   Estudiamos la continuidad en x=0

   $$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{senx}{x}=\left(\frac{0}{0}ind\right)\underset{\substack{senx\approx x\\ \text{infinitésimo}}}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} xe^x+1=0\cdot 1+1=1$$

   $f(0)=1$ → La función es continua en x=0 y por tanto en todo $\mathbb{R}$

   b. Derivabilidad.

   $$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\operatorname{sen}x}{x^2} & si\ \ x<0\\ e^x+xe^x & si\ \ x>0\end{cases}$$

   $$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\cos x-senx}{x^2}=\left(\frac{0}{0}Ind\right)\underset{L'Hôpital}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{-xsenx}{2x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2senx}{2}=0$$

   $$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\left(e^x+xe^x\right)=1$$

   $\Rightarrow$ no es derivable en x=0

2. Calcular "a"y "b" para que la función $f(x)=\begin{cases}senx & si\ \ x\leq 0\\ -x^2+ax+b & si\ \ x>0\end{cases}$ sea derivable x=0.

   a. Continuidad en x=0

   $$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(-x^2+ax+b\right)=b\ \wedge\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=senx=0\ \wedge\ f(0)=0\ \Rightarrow \text{continua si } b=0$$

   b. Derivabilidad en x=0

   $$f'(x)=\begin{cases}\cos x & si\ \ x<0\\ -2x+a & si\ \ x>0\end{cases} \qquad \begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\cos x=1\\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}-2x+a=a\end{array}\ \Rightarrow a=1\Rightarrow derivable\ \ para\ a=1\ y\ b=0.$$

3. Calcular "a"y "b" para que la función $f(x)=\begin{cases}ax^2+b & si\ \ x\leq 1\\ \ln x & si\ \ x>1\end{cases}$ sea derivable en x=1.

   a. Continuidad en x=1

   $$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\ln x=0 \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x)=ax^2+b=a+b \quad f(1)=a+b \quad \Rightarrow \text{ a+b=0}$$

   b. Derivabilidad en x=1

   $$f'(x)=\begin{cases}2ax & si\ \ x<1\\ \dfrac{1}{x} & si\ \ x>1\end{cases} \qquad \begin{array}{l} f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}2ax=2a\\ f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x}=1\end{array}\ \Rightarrow 2a=1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

   $$\frac{1}{2}+b=0\Rightarrow b=-\frac{1}{2}\Rightarrow y=f(x)\ es\ derivable\ en\ x=1\ si\ a=1/2\ y\ b=-1/2$$