

## PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Se desea cortar una alfombra rectangular para un pasillo teniendo en cuenta que sus bordes se rematarán con dos tipos de cintas: una, que cuesta 32€ por metro, se usará en los laterales, a lo largo del pasillo, y otra, con un precio de 50€ por metro, se empleará para los otros dos bordes.

- a) (1 punto) Determina la función que permite obtener el coste del remate que bordea la alfombra a partir de las dimensiones de ésta.
- b) (2 puntos) Calcula las dimensiones que debe tener una alfombra de 1 metro cuadrado de superficie para que el remate que la bordea resulte lo más económico posible. Justifica que la solución calculada es la más económica.
- c) (0,5 puntos) Halla el coste del remate para las dimensiones obtenidas en el apartado anterior.

$x = n^\circ$  de metros de largo                       $y = n^\circ$  de metros de ancho

$$a) C(x, y) = 2(32x + 50y) = 64x + 100y$$

$$b) S = xy = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow C(y) = \frac{64}{y} + 100y$$

$$C'(y) = -\frac{64}{y^2} + 100 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow -\frac{64}{y^2} + 100 = 0 \Leftrightarrow 100y^2 - 64 = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{5} \\ C'(y) = 0 \end{array} \right.$$

$$C''(y) = \frac{128}{y^3} \Rightarrow C''\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{128}{4/5} > 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$

Las dimensiones serán  $5/4$  m de largo por  $4/5$  m de ancho.

$$c) C\left(\frac{5}{4}, \frac{4}{5}\right) = 65 \cdot \frac{5}{4} + 100 \cdot \frac{4}{5} = 80 + 80 = 160\text{€}$$

De entre todos los números reales positivos  $x$ ,  $y$  que suman 15, encuentra aquellos para los que el producto  $x^2y$  es máximo. (2,25 puntos)

Función relacional:  $x + y = 15 \Rightarrow y = 15 - x$

Función a optimizar:  $P(x, y) = x^2y$  maximizar

$$P(x) = x^2(15 - x) = 15x^2 - x^3$$

Derivamos:  $P'(x) = 30x - 3x^2$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow x(30 - 3x) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 10$$

$$P''(x) = 30 - 6x$$

$$\rightarrow P''(0) = 30 > 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$

$$\rightarrow P''(10) = -30 < 0 \Rightarrow \text{máximo.}$$

Solución:  $x = 10$     $y = 5$

De todos los rectángulos de perímetro 16 cm., determina las dimensiones del rectángulo que tiene la diagonal menor. Calcula la longitud de dicha diagonal.

$x$ =longitud de la base en cm      $y$ =longitud de la altura en cm.

$$2x+2y=16 \Rightarrow y=8-x$$

$$D(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (8-x)^2} = \sqrt{2x^2 - 16x + 64} = 0$$

$$D'(x) = \frac{4x-16}{2\sqrt{2x^2 - 16x + 64}} = 0 \Rightarrow 4x-16=0 \Rightarrow x=4$$

$$D''(x) = \frac{4\sqrt{2x^2 - 16x + 64} - (4x-16) \frac{4x-16}{2\sqrt{2x^2 - 16x + 64}}}{2(\sqrt{2x^2 - 16x + 64})^2} = \frac{4(2x^2 - 16x + 64) - (4x-16)(2x-8)}{(\sqrt{2x^2 - 16x + 64})(2x^2 - 16x + 64)} =$$

$$= \frac{8x^2 - 64x + 256 - (8x^2 - 64x + 128)}{(\sqrt{2x^2 - 16x + 64})(2x^2 - 16x + 64)} = \frac{128}{(\sqrt{2x^2 - 16x + 64})(2x^2 - 16x + 64)}$$

$$D''(4) = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \Rightarrow \text{mínimo.}$$

$x=4$     $y=4$ . Es un cuadrado de lado 4 cm.

Halla tres números no negativos que sumen 14, tales que uno sea el doble del otro que y la suma de los tres sea mínima.(2 puntos)

Los números serán  $x$ ,  $2x$  e  $y$

$$x+2x+y=14 \Rightarrow y=14-3x \quad S=x^2 + 4x^2 + y^2 \text{ mínima.}$$

$$S = 5x^2 + (14-3x)^2 = 14x^2 - 84x + 206$$

$$S' = 28x - 84 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$S'' = 28 > 0 \Rightarrow \text{mínimo.}$$

Los números serán 3, 6 y 5

Se quiere vallar una finca rectangular que está junto a un camino. La valla del lado del camino cuesta 125 € el metro, y la de los otros tres lados cuesta 25 € el metro. Hallar el área del terreno de mayor superficie que podemos vallar con 3000 €. (2 puntos)

Sea  $x$  la longitud en metros de la valla del camino e  $y$  la longitud del lado perpendicular.

$$125x + 25(x + 2y) = 3000 \Rightarrow 150x + 50y = 3000 \Rightarrow y = 60 - 3x$$

$$A = xy = x(60 - 3x) = 60x - 3x^2$$

$$A' = 0 \Leftrightarrow 60 - 6x = 0 \Rightarrow x = 10$$

$$A'' = -6 < 0 \Rightarrow \text{máximo} \Rightarrow x = 10 \quad y = 30$$

Se quiere construir un depósito (sin techo) con forma de prisma recto de base cuadrada y lados rectángulos. El depósito debe albergar un volumen de  $2000 \text{ m}^3$ . Sabemos que el coste de materiales de la base es de  $50\text{€/m}^2$ , el coste de materiales de las cuatro paredes es de  $100\text{€/m}^2$ . Además el coste de construcción es un coste fijo de  $20\,000\text{€}$ .

- (0,5 puntos) Escriba la función  $c(l)$  de coste total en función del lado de la base  $l$ .
- (1,5 puntos) ¿para qué valor de  $l$  es el coste total mínimo? ¿cuánto es este coste?
- (0,5 puntos) ¿Qué ocurre con el coste cuando el lado  $l$  de la base del depósito tiende a infinito? ¿Y cuándo tiende a cero?
- (1 punto) Usando solo los datos obtenidos de los apartados anteriores, haga un esbozo de la curva  $c(l)$  en el dominio  $l \in (0, \infty)$

Sea  $l$ = lado de la base cuadrada y  $h$ =altura del depósito.

$$\text{Volumen} = l^2 \cdot h = 2000 \Rightarrow h = \frac{2000}{l^2}$$

$$a) \quad c(l) = 50l^2 + 100(4lh) + 20000 = 50l^2 + \frac{800000}{l} + 20000$$

$$b) \quad c'(l) = 100l - \frac{800000}{l^2} = 0 \Rightarrow 100l^3 = 800000 \Rightarrow l = \sqrt[3]{8000} = 20$$

$$c''(l) = 100 + \frac{1600000}{l^3} \Rightarrow c''(20) > 0 \text{ mínimo. Será mínimo coste para } l=20\text{m}$$

El coste mínimo es  $c(20)=80000\text{€}$ .

$$c) \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \left( 50l^2 + \frac{800000}{l} + 20000 \right) = +\infty \quad \lim_{l \rightarrow 0^+} \left( 50l^2 + \frac{800000}{l} + 20000 \right) = +\infty$$

Cuando el lado  $l$  va a infinito o a cero el coste se dispara a infinito.