1º.-Resuelve

a) $\int x^2 \ln x \, dx$

Solución:

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + k = \frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + k$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} u = \ln x \rightarrow du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = x^2 dx \rightarrow v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$$

b) $\int x\sqrt{x-1} \, dx$

Solución:

Haciendo el cambio $x-1=t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$

$$\int x\sqrt{x-1}\, dx = \int (t^2+1)t\cdot 2tdt = \int (2t^4+2t^2)dt = \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + k = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + k$$

c) $\int \frac{x+3}{x^2+2x+5}dx$

Solución:

El denominador no tiene raíce reales, luego:

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2+4}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx + \int \frac{2dx}{x^2+2x+5} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| + \int \frac{2dx}{x^2+2x+1+4} = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| +$$

$$= \int \frac{2dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| + \int \frac{\frac{1}{2}dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| + ar\tan\left(\frac{x+1}{2}\right) + k$$

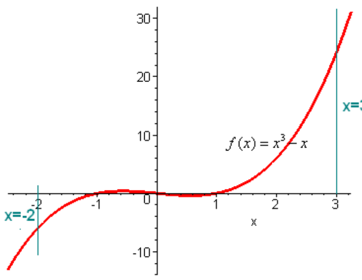
………………………………………………………………………………………………

2º.-Calcula el área limitada por el eje de abscisas , las rectas $x=-2$, $x=3$ y la gráfica de la función $f(x)=x^3-x$

Solución:

La gráfica de la función corta al eje de abscisas en los puntos $x^3-x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{cases}$,

luego la recta $x=-2$ está a la izquierda del primer punto de corte y la recta $x=3$ está a la derecha del último punto de corte; por ello:



$$A=-\int_{-2}^{-1}\left(x^3-x\right)dx+\int_{-1}^{0}\left(x^3-x\right)dx-\int_{0}^{1}\left(x^3-x\right)dx+\int_{1}^{3}\left(x^3-x\right)dx=$$

$$=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+16=\frac{75}{4}\ \text{u. de a.}=18.75\ \text{u. de a.}$$

3º.- Calcula el área comprendida entre las gráficas de las funciones: $y^2=6x$ e $6y=x^2$

Solución:

Las gráficas de ambas funciones se cortan en

$$\begin{cases} y^2=6x \\ 6y=x^2 \end{cases} \Rightarrow y^2=\frac{x^4}{36}=6x \Rightarrow x^4-216x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=6 \end{cases}$$

Luego:

$$A=\int_0^6\left(\sqrt{6x}-\frac{x^2}{6}\right)dx=\frac{2\sqrt{6}}{3}\sqrt{x^2}-\frac{x^3}{18}\Bigg|_0^6=12\ \text{u. de a.}$$