

Integrales racionales

Son integrales del tipo $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$, donde $q(x)$ es un polinomio que solo *tiene raíces reales*.

Caso I) Si grado de $p(x) <$ grado $q(x)$, y $q(x)$ tiene **sólo raíces simples**, se descompone la fracción $\frac{p(x)}{q(x)}$ en suma de fracciones simples del tipo $\frac{A_i}{(x-x_1)}$ es decir, (por ejemplo si $q(x)$ tiene tres raíces

reales simples), $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)} + \frac{C}{(x-x_3)} \Rightarrow$

$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \frac{A}{(x-x_1)} dx + \int \frac{B}{(x-x_2)} dx + \int \frac{C}{(x-x_3)} dx$ de tal forma que estas integrales son ya

inmediatas e iguales a

$$A \ln|x-x_1| + B \ln|x-x_2| + C \ln|x-x_3| + \text{Constante}$$

Caso II) Si grado de $p(x) <$ grado $q(x)$, y $q(x)$ tiene raíces simples y/o múltiples, se descompone la fracción $\frac{p(x)}{q(x)}$ en suma de fracciones del tipo $\frac{A_i}{(x-x_1)}$ y $\frac{A_i}{(x-x_1)^n}$ es decir, (por ejemplo si $q(x)$

tiene una raíz simple y una doble)

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)} + \frac{C}{(x-x_2)^2} \Rightarrow$$

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \frac{A}{(x-x_1)} dx + \int \frac{B}{(x-x_2)} dx + \int \frac{C}{(x-x_2)^2} dx = A \ln|x-x_1| + B \ln|x-x_2| + \frac{C(x-x_2)^{-1}}{-1}$$

ya que $\int \frac{C}{(x-x_2)^2} dx = (\text{cambio } t = x-x_2) = \int \frac{C}{t^2} dt = \int C t^{-2} dt = C \frac{t^{-1}}{-1} = \frac{C}{(1-n)} \cdot \frac{1}{(x-x_2)^{n-1}}$

Caso III) grado de $p(x) >$ grado $q(x) \Rightarrow$ dividimos $p(x)$ entre $q(x)$ y aplicamos que:

dividendo = divisor por cociente + resto entonces para este caso

$$p(x) = c(x) \cdot q(x) + \text{resto} \quad (\text{el resto de grado inferior al divisor}) \quad \text{o sea} \quad \frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r}{q(x)} \quad \text{entonces}$$

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int (c(x) + \frac{r}{q(x)}) dx = \int c(x) dx + \int \frac{A}{(x-x_1)} dx + \int \frac{B}{(x-x_2)} dx + \int \frac{C}{(x-x_3)} dx \quad \text{y ya es el caso anterior}$$

. (si $q(x)$ tiene tres raíces reales simples)

Ejemplo:

Caso I) $\int \frac{2x+1}{(x^2-3x+2)} dx$, raíces del denominador $x=1$ y $x=2$

$\frac{2x+1}{(x^2-3x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{x-2}$ para buscar A y B, reducimos a común denominador el segundo miembro de la igualdad y llegamos a

i) $A(x-2) + B(x-1) = 2x+1$; para $x=2$ $B=5$ y para $x=1$ $-A=3$ o sea $A=-3$

ii) o también de la igualdad de polinomios : $\begin{cases} A+B=2 \\ -2A-B=1 \end{cases}$

$$\int \frac{2x+1}{(x^2-3x+2)} dx = \int \frac{-3}{(x-1)} dx + \int \frac{5}{(x-2)} dx = -3 \ln|x-1| + 5 \ln|x-2| + cte$$

caso II) $\int \frac{2x^3-5x+2}{x^2-4} dx$ como el grado del numerador es $>$ mayor que el grado del denominador,

dividimos $2x^3-5x+2 = 2x(x^2-4) + 3x+2$

$$\frac{2x^3-5x+2}{x^2-4} = 2x + \frac{3x+2}{x^2-4} \quad \text{y según (**)} \quad \frac{3x+2}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} ; 3x+2 = A(x+2) + B(x-2) ; \text{para } x=-2 \quad 4 = -4B \quad \text{y para } x=2 \quad 8 = 4A$$

$$\int \frac{2x^3-5x+2}{x^2-4} dx = \int (2x + \frac{3x+2}{x^2-4}) dx = x^2 + 2 \ln|x-2| + 1 \ln|x+2| + cte$$