…………………………………………………………………………………………

1º.-Calcular razonadamente el área de la superficie S limitada por la curva $y=\frac{1}{(3-x)(3+x)}$, el eje OX y la rectas $x=-2$ y $x=2$ [PAU C. Valenciana]

Solución:

$$\frac{1}{(3-x)(3+x)}=\frac{\frac{1}{6}}{x+3}-\frac{\frac{1}{6}}{x-3}$$

, por otra parte como la curva no corta al eje OX en el intervalo $[-2,2]$, podemos integrar directamente:

$$\int_{-2}^{2}\frac{1}{(3-x)(3+x)}dx=\int_{-2}^{2}\frac{\frac{1}{6}}{x+3}dx-\int_{-2}^{2}\frac{\frac{1}{6}}{x-3}dx=\frac{1}{6}ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|\Bigg|_{-2}^{2}=$$

$$=\frac{1}{6}(ln5-ln1+ln5)=\frac{ln5}{3}\cong 0{,}54 \text{ uni. de área}$$

2º.- Calcula $\int x^2\cos x\,dx$

Solución:

Integrando por partes:

$$\begin{cases} u=x^2 \xrightarrow{\text{diferenciando}} du=2xdx \\ dv=\cos xdx \xrightarrow{\text{int egrando}} v=senx \end{cases}$$

$$\int x^2\cos x\,dx=x^2senx-2\int x\,senx\,dx$$

, y volviendo a integrar por partes:

$$\begin{cases} u=x \xrightarrow{\text{diferenciando}} du=dx \\ dv=senxdx \xrightarrow{\text{int egrando}} v=-\cos x \end{cases}$$

$$\int x^2\cos x\,dx=x^2senx-2\int x\,senx\,dx=x^2senx-2\left[-x\cos x+\int sexdx\right]=$$

$$=x^2sen\,x+2x\cos x-2sen\,x+k$$

3º.-Considera la función $f(x)=\dfrac{x(a-x)}{a^3}$, siendo “a” un parámetro positivo. Comprueba razonadamente que el área del recinto limitado por la gráfica de la función y el eje de abscisas no depende del valor del parámetro “a” [PAU Cataluña]

Solución:

La gráfica de la función corta al eje de abscisas en $x(a-x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=a \end{cases}$, luego:

$$\int_0^a \frac{x(a-x)}{a^3}dx=\frac{1}{a^3}\int_0^a \left(xa-x^2\right)dx=\frac{1}{a^3}\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\frac{1}{a^3}\left(\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{1}{6}$$ uni. de área

que no depende de $''a''$

4º.-Calcula la integral definida $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{x}+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

Solución:

Haciendo el cambio $x=t^2 \Leftrightarrow dx=2tdt$, tenemos:

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx+\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int_1^4 dx+\int_1^4 \frac{e^t dt}{t}2tdt=x\Big|_1^4+2e^t\Big|_{x=1,t=\sqrt{x}}^{x=4,t=\sqrt{x}}=$$

$$=2e^2-2e+3\cong 12.34$$

5º.- Calcula el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=x^3-4x$ y $g(x)=3x-6$ [PAU Andalucía]

Solución:

Las gráficas se cortan en los puntos: $x^3-4x=3x-6 \Rightarrow x^3-7x+6=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=1 \\ x=2 \end{cases}$;

dado que en el intervalo $[-3,1]$, $f(x)>g(x)$ y en $[1,2]$, $g(x)>f(x)$, tenemos:

$$S=\int_{-3}^1 \left[\left(x^3-4x\right)-(3x-6)\right]dx+\int_1^2 \left[(3x-6)-\left(x^3-4x\right)\right]dx=32+\frac{3}{4}=\frac{131}{4}$$ uni. de área