1) Considera el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 7 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano perpendicular a π y que contenga a la recta r.
b) ¿Hay algún plano paralelo a π que contenga a la recta r? En caso afirmativo determina su ecuación. (2 puntos)

2) Sea la recta r de ecuación $\begin{cases} x = a + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$ y la recta s de ecuación $\dfrac{x-1}{2} = y + 2 = \dfrac{z}{3}$

a) Calcula el valor de a sabiendo que las rectas r y s se cortan.
b) Halla el punto de corte. (2 puntos)

3) Considera los puntos $A(1,0,-2)$ y $B(-2,3,1)$

a) Determina los puntos del segmento AB que lo dividen en tres partes iguales.
b) Calcula el área del triángulo ABC, donde C es un punto de la recta $-x = y - 1 = z$ ¿depende el resultado de la elección concreta del punto C? (2 puntos)

4) Dados los vectores $\vec{v}\,(1\,,-1\,,3)$ y $\vec{w}\,(-2\,,6\,,a)$

a) Halla el valor del parámetro *a* para que sean perpendiculares.
b) Halla el valor del parámetro *a* para que sean paralelos.
c) Halla el área del triángulo determinado por los dos vectores para $a = 0$.(1,5 p)

5) Considera el punto $P(3,2,0)$ y la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.
b) Determina las coordenadas del punto Q, simétrico del P respecto de la recta r. (2,5 puntos)

SOLUCIONES

1) $\pi \equiv 2x + y - z + 7 = 0$

a) Plano perpendicular a π y que contenga a r

Si contiene a r$\rightarrow P(1,1,1)$ $\vec{d}(1,1,3)$, su vector de dirección, lo es también del plano buscado y el punto pertenece al mismo

Si es perpendicular a π, su vector normal $\vec{n}(2,1,-1)$, es vector director del plano buscado, entonces:

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 1 & 1 & y-1 \\ 3 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi' \equiv 4x - 7y + z + 2 = 0$$

b) Para ver si es posible, vemos primero la posición de π y r, ya que para que exista ese plano, r y π tendrían que ser paralelos:

$2(1+\lambda) + (1+\lambda) - (1+3\lambda) + 7 = 0 \Rightarrow 0\lambda = -9 \Rightarrow$ paralelos

luego, el plano pedido, tiene el mismo vector normal que $\pi \rightarrow 2x + y - z + d = 0$, para hallar d, sabemos que el plano pasa por $P(1,1,1) \rightarrow 2 + 1 - 1 + d = 0 \Rightarrow d = -2$

Plano: $2x + y - z - 2 = 0$

2) a) r y s se cortan, posición relativa: $\left.\begin{aligned} a + t &= 1 + 2\lambda \\ 1 - 2t &= -2 + \lambda \\ 4 - t &= 3\lambda \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} t - 2\lambda &= 1 - a \\ 2t + \lambda &= 3 \\ t + 3\lambda &= 4 \end{aligned}\right\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1-a \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{vemos que } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$$

y tiene que ser también $r(A') = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1-a \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -5a + 10 = 0 \Rightarrow a = 2$

b) Para $a = 2 \rightarrow \left.\begin{aligned} t - 2\lambda &= -1 \\ 2t + \lambda &= 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} -2t + 4\lambda &= 2 \\ 2t + \lambda &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 5\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = 1$

Punto de corte , para $\lambda = 1 \rightarrow P(3,-1,3)$

3) $A(1,0,-2)$ **y** $B(-2,3,1)$

a) $\overrightarrow{AB} = (-2,3,1) - (1,0,-2) = (-3,3,3) \rightarrow$

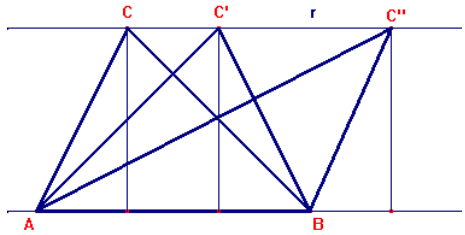
$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (-1,1,1) = (c_1, c_2, c_3) - (1,0,-2) \Rightarrow C = (-1,1,1) + (1,0,-2) = (0,1,-1)$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (-2,2,2) = (d_1, d_2, d_3) - (1,0,-2) \Rightarrow D = (-2,2,2) + (1,0,-2) = (-1,2,0)$$

b) $\overrightarrow{AB} = (-3,3,3)$ y el vector de dirección de la recta: $\vec{d}(-1,1,1)$ luego la recta dada es paralela al segmento AB, por lo que el área no depende del punto (la altura del triángulo y la base serían siempre las mismas, hallamos el área por el producto vectorial, cogiendo como punto C$\rightarrow (0,1,0)$

$$A=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|(-3,3,3)x(-1,1,2)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}3&3\\1&2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}3&-3\\2&-1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-3&3\\-1&1\end{vmatrix}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{18}\text{ u.a.}$$



4) a)Para que sean perpendiculares el producto escalar debe ser 0.

$$(1,-1,3)\cdot(-2,6,a)=-2-6+3a=0\rightarrow -8+3a=0\rightarrow a=\frac{8}{3}$$

b) Para que sean paralelos los vectores deben ser proporcionales:

$$(1,-1,3)=t(-2,6,a)\rightarrow\begin{cases}1=-2t\\-1=6t\\3=ta\end{cases}\rightarrow\begin{cases}b=-\dfrac{1}{2}\\b=-\dfrac{1}{6}\end{cases}\quad\rightarrow \text{IMPOSIBLE}$$

c) Hacemos el p. vectorial: $\vec{v}x\vec{w}=\left(\begin{vmatrix}-1&3\\6&0\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}1&3\\-2&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&-1\\-2&6\end{vmatrix}\right)=(-18,-6,4)$

$$\rightarrow\left|\vec{v}x\vec{w}\right|=\sqrt{(-18)^2+(-6)^2+4^2}=\sqrt{376}\;\Rightarrow A_t=\frac{\sqrt{376}}{2}u^2=\sqrt{94}\,u^2$$

5) $P(3,2,0)\quad r\equiv\begin{cases}x+y-z-3=0\\x+2z+1=0\end{cases}$ ponemos r en paramétricas:

$$z=\lambda\rightarrow x=-1-2\lambda\rightarrow y=3+\lambda+1+2\lambda=4+3\lambda\rightarrow r\equiv\begin{cases}x=-1-2\lambda\\y=4+3\lambda\\z=\lambda\end{cases}\quad A(-1,4,0)$$

a) Punto $P(3,2,0)$, $\vec{d}(-2,3,1)$, $\vec{e}=\overrightarrow{AP}=(4,-2,0)$

$$\pi\equiv\begin{vmatrix}-2&4&x-3\\3&-2&y-2\\1&0&z\end{vmatrix}=0\rightarrow 4z+4y-8+2x-6-12z=0\Rightarrow x+2y-4z-7=0$$

b) Hallamos primero la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a **r:**

$\vec{n}=\vec{d}=(-2,3,1)\rightarrow\pi'\equiv -2x+3y+z+k=0$, pero sabemos que pasa por P, es decir que $-2\cdot3+3\cdot2+0+k=0\Rightarrow k=0\Rightarrow -2x+3y+z=0$

Hallamos la intersección de la recta dada con este plano (punto M) y este M es el punto medio del segmento PQ: $-2(-1-2\lambda)+3(4+3\lambda)+\lambda=0\Rightarrow 14\lambda+14=0\rightarrow\lambda=-1$

Luego $M(-1-2(-1),4+3(-1),-1)=(1,1,-1)=\left(\frac{x+3}{2},\frac{y+2}{2},\frac{z+0}{2}\right)$

$\rightarrow Q(x,y,z)\rightarrow x=-1;y=0;z=-2\Rightarrow$ el simétrico es $Q(-1,0,-2)$