Análisis 2008

Ejercicio 1.- Sean f : R → R y g : R → R las funciones definidas por $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = c\,e^{-(x+1)}$. Se sabe que las gráficas de f y g se cortan en el punto (-1; 2) y tienen en ese punto la misma recta tangente.
(a) [2 puntos] Calcula los valores de a, b y c.
(b) [0'5 puntos] Halla la ecuación de dicha recta tangente.
Solución: a) $a = 0$; $b = 1$; $c = 2$. b) $y = -2x$

Ejercicio 2.- Sea g : (0;+∞) → R la función dada por g(x) = ln x (ln denota logaritmo neperiano).

(a) [0'75 puntos] Justifica que la recta de ecuación $y = \frac{1}{e}x$ es la recta tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa x = e.

Ejercicio3.- Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} ax^2+3x & si \quad x\le 2 \\ x^2-bx-4 & si \quad x>2 \end{cases}$

(a) [1'5 puntos] Halla a y b sabiendo que f es derivable en $\mathbb{R}$.
(b) (1 punto) Determina la recta tangente y la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa x = 3.
(c) **Solución:** a) $a = 2$; $b = -7$ b) Tangente $y = 13x - 13$; normal $y = -\frac{1}{13}x + \frac{341}{13}$

Ejercicio 4.- (2,5 puntos) De entre todas las rectas del plano que pasan por el punto (1,2), encuentra aquella que forma con las partes positivas d los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Halla el área de dicho triángulo.
Solución: $y = -2x + 4$. Área = 4 u^2

Ejercicio 5.- (2,5 puntos) Sea *f* la función definida, para x ≠ 0, por $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$. Determina las asíntotas de la gráfica de *f*.

Solución: Vertical $x = 0$ para $x \to 0^+$. Oblicua $y = x + 1$ para $x \to -\infty$ y $x \to +\infty$

Ejercicio 6.- (2,5 puntos) De entre los rectángulos de perímetro 8 cm, determina las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud.
Solución: Se trata de un cuadrado de lado 2 cm

Ejercicio 7.- (2,5 puntos) Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$, determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en su punto de inflexión.

Solución: $y = -\frac{1}{e}x + \frac{3}{e}$. Punto de inflexión $\left(1, -\frac{1}{e}\right)$

Ejercicio 8. Sea la función $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & si \quad 0\le x<2 \\ cx+1 & si \quad 2\le x\le 4 \end{cases}$

(a) (2 puntos) Determina a, b y c sabiendo que *f* es continua en el intervalo cerrado [0,4], derivable en el intervalo abierto (0,4) y que *f*(0) = *f*(4).
(b) (0,5 puntos) ¿En qué punto del intervalo se anula la derivada de la función?

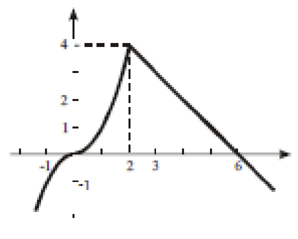
Solución: a) $a = -3$; $b = 5$; $c = 1$ b) $x = \frac{3}{2}$

Ejercicio 9.- Sea la función $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$.
(a) **(1,25 puntos)** Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.
(b) **(1,25 puntos)** Calcula los puntos de inflexión de *f*.
(c) **Solución:** a) Creciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. Decreciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ b) $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\right)$ y $\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\right)$

Ejercicio 10.- Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} x|x| & si \quad x\le 2 \\ 6-x\ si & x>2 \end{cases}$$

(a) **(0,75 puntos)** Esboza la gráfica de *f*.
(b) **(1 punto)** Estudia la derivabilidad de *f*.

Solución:
a)


b) Continua en todo $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}$ - {2}

Ejercicio 11.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (3x - 2x^2)e^x$.

(a) **(1,5 puntos)** Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.

(b) **(1 punto)** Calcula los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución: a) Creciente en $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ y decreciente en $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ b) Mínimo en $\left(-\frac{3}{2}, -9e^{-\frac{3}{2}}\right)$ y máximo en $(1, e)$

Ejercicio 12.- (2,5 puntos) Dada la función *f* definida para x ≠ 0, por $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ determina las asíntotas de su gráfica.

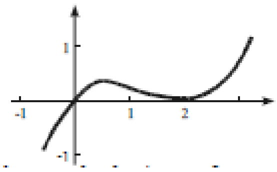
Solución: Vertical x = 0 por la derecha y por la izquierda. Horizontal $y = -1$ para $x \to -\infty$ e $y = 1$ para $x \to +\infty$

Ejercicio 13.- Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$.

(a) **(0,5 puntos)** Esboza la gráfica de g.

(b) **(0,75 puntos)** Determina la ecuación de la recta tangente de g en el punto de abscisa x = 2.

Solución:

a) 

b) $y = 0$ c) $\frac{1}{3}$ u^2

Análisis 2009

Ejercicio1 (2,5 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calcula los valores de *a, b, c* y *d*. sabiendo que *f* verifica:

- El punto (0, 1) es un punto de inflexión de la gráfica de *f*.
- *F* tiene un mínimo local en el punto de abscisa *x* = 1.
- La recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x* = 2 tiene pendiente 1.

Solución: $a = \frac{1}{9}$; $b = 0$; $c = -\frac{1}{3}$; $d = 1$

Ejercicio2 (2,5 puntos) Se divide un segmento de longitud *L* = 20 cm en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con el otro un rectángulo en el que la base es el doble de la altura. Calcula la longitud de cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.

Solución: Cuadrado $\frac{160}{17}$ cm ; rectángulo $\frac{180}{17}$ cm

Ejercicio 3 La recta tangente a la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = mx^2 + nx - 3$, en el punto (1, -6), es paralela a la recta de ecuación $y = -x$.

(1,25 puntos Determina las constantes *m* y *n*. Halla la ecuación de dicha tangente.

Solución: a) $m = 2$; $n = -5$.Ecuación de la tangente $y = -x - 5$

Ejercicio 4 (2,5 puntos) Se considera la función $f : [1, +\infty] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$$

Determina la asíntota de la gráfica de *f*.

Solución: Asíntota oblicua: $y = 2x - \frac{1}{2}$

Ejercicio 5 (2,5 puntos De entre todos los rectángulos cuya área mide 16 cm^2, determina las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud.

Solución: 4 x 4 cm

Ejercicio 6 (2,5 puntos) Calcula el siguiente limite (ln denota logaritmo neperiano),

$$\lim_{x \to 1}\left(\frac{1}{ln(x)} - \frac{2}{x^2 - 1}\right)$$

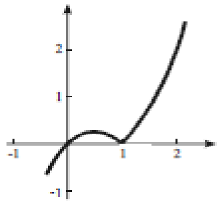
Solución: 1

Ejercicio 7 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x|x - 1|$.

(a) (0,5 puntos) Esboza la gráfica de *f*.

(b) 0,75 puntos) Comprueba que la recta de ecuación $y = x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisas $x = 0$.

Solución: a)



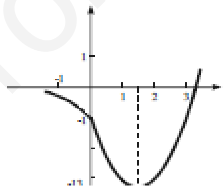
b) En efecto

Ejercicio 8 Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & si \quad x<0\\ x^2-3x-1 & si \quad x\geq 0\end{cases}$$

(a) (0,75 puntos) Estudia su continuidad y derivabilidad
(b) (1,25 puntos) Determina sus asíntotas y sus extremos relativos.
(c) (0,5 puntos) Esboza la gráfica de *f*.

Solución: a) Continua en todo $\mathbb{R}$, derivable en $\mathbb{R}$ - {0} b) Verticales no tiene al ser continua en todo $\mathbb{R}$; horizontal y = 0 para $x \rightarrow -\infty$; mínimo relativo en el punto $\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{13}{4}\right)$ c)



Ejercicio 9 Considera la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$
(0,5 puntos) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisas $x = -1$
Solución: $y = 2$

Ejercicio 10 Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2|x-3|$
.(a) (1 punto) Estudia la continuidad y derivabilidad de *f*.
(b) (1,5 puntos) Estudia el crecimiento y decrecimiento de *f* . Calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución: a) Continua en todo $\mathbb{R}$, derivable en $\mathbb{R}$ - {3} b) Creciente en (0. 2) ∪ (3, +∞); decreciente en (- ∞, 0) ∪ (2, 3). Mínimo relativo en (0, 0) y (3, 0), máximo relativo en (2, 4).

Ejercicio 11 Sea f :[0, +∞] → $\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=1+ln(x)$, siendo *ln* la función logaritmo neperiano.
(1 punto) Comprueba que la recta de ecuación $y=1+\dfrac{1}{e}x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = e$

Solución: en efecto

Ejercicio 12 Sea f: (0, +∞) → $\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2} & si \quad x\neq 1\\ a & si \quad x=1\end{cases}$

(a) (1,25 puntos) Sabiendo que f es continua, calcula a (ln denota el logaritmo neperiano)
(b) (1,25 puntos) Estudia la existencia de asíntota horizontal para la gráfica de esta función. En caso de que exista, determina su ecuación.

Solución: a) a = 1b) Asintota horizontal y = 0 para $x \rightarrow +\infty$

Ejercicio 13 (2,5 puntos) Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida como

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+b+1 & si \quad x\leq 1\\ ax^2-5x+2a & si \quad x>1\end{cases}$$

Es derivable. Determina los valores de a y b.
Solución: a = 2 ; b = 1

Ejercicio 14 (2,5 puntos) Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\ \mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

Tiene extremos relativos en (0, 0) y en (2, 2). Calcula **a, b, c** y **d**.

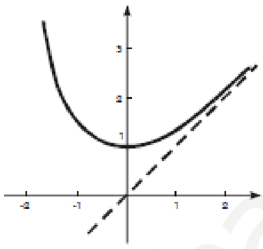
Solución: $a=-\dfrac{1}{2}\ ;\ b=\dfrac{3}{2}\ ;\ c=0\ ;\ d=0$

Ejercicio 15 Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\ \mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x+e^{-x}$

(a) (0,75 puntos) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*, así como los extremos relativos o locales de *f*.
(b) (0,5 puntos) Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de *f*.
(c) (0,75 puntos) Determina las asíntotas de la gráfica de *f*.
(d) (0,5 puntos) Esboza la gráfica de *f*.

Solución: a) Decreciente en (- ∞, 0) y creciente en (0, + ∞) b) Convexa en (-- ∞, + ∞) c) No tiene verticales ni horizontales.

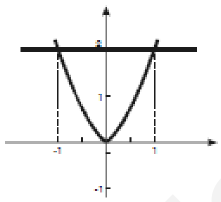
Oblicuas $y = x$ para $x \rightarrow +\infty$ d)



Ejercicio 16 Sean $f:\mathbb{R}\rightarrow\ \mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\rightarrow\ \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x)=x^2+|x|,\qquad g(x)=2$$

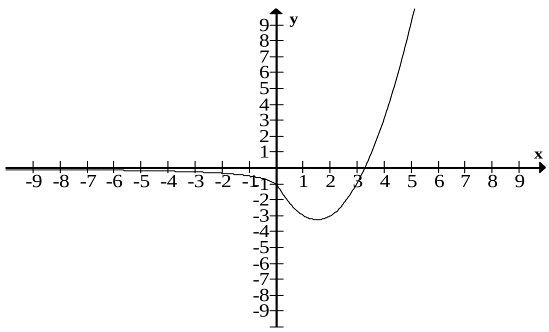
(1 punto) Determina los puntos de corte de las gráficas de *f* y *g* . Esboza dichas gráficas.
Solución: (-1, 2) y (1, 2)



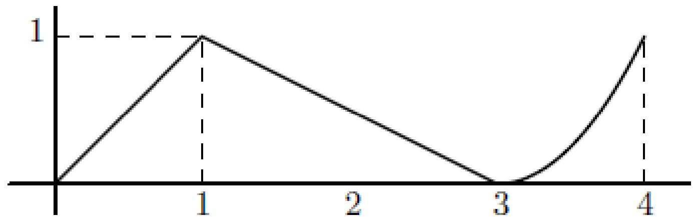
Ejercicio 17 (2,5 puntos) De todos los triángulos cuya base y altura suman 20 cm ¿qué base tiene el de área máxima
Solución: 10 cm.
Ejercicio 18 Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\ \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & si\quad x<0\\ x^2-3x-1 & si\quad x\geq 0\end{cases}$$

(a) (0,75 puntos) Estudia su continuidad y derivabilidad
(b) (1,25 puntos) Determina sus asíntotas y sus extremos relativos.
(c) (0,5 puntos) Esboza la gráfica de *f*.
Solución: a) Es continua en todo R. b) Horizontal y = 1 cuando x → -∞, Mínimo relativo -13/4 en x= 3/2
c)



.**Ejercicio 19 (2004)** De una función *f* : [0; 4] → R se sabe que *f*(1) = 3 y que la gráfica de su función derivada es la que aparece en el dibujo.



(a) [0'5 puntos] Halla la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa x = 1.
(b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. ¿En qué punto alcanza la función *f* su máximo absoluto?
(c) [1 punto] Estudia la concavidad y la convexidad de *f*.
Solución: a) y = x + 2. b) En (0,4) la función es creciente. El máximo absoluto lo alcanza en x = 4

Análisis 2010

Ejercicio 1. [2’5 puntos] Entre todos los triángulos rectángulos de 5 metros de hipotenusa, determina los catetos del de área máxima.

Solución: Los catetos miden $\sqrt{\frac{25}{2}}$ metros

Ejercicio 2. Sea $f:(0,+\infty)\rightarrow R$ la función definida por $f(x) = \ln(x^2 + 3x)$, donde ln denota el logaritmo neperiano.
(a) [1’5 puntos] Determina, si existen, los puntos de la gráfica de *f* en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta de ecuación $x - 2y + 1 = 0$.
(b) [1 punto] Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 3$.
Solución: a) (3, ln(18)) b) $y = -2x + 6 + \ln(18)$

Ejercicio 3. (Junio) Sea *f* la función definida como $f(x)=\frac{ax^2+b}{a-x}$ par $x \neq a$.

(a) [1’5 puntos] Calcula *a* y *b* para que la gráfica de *f* pase por el punto (2, 3) y tenga una asíntota oblicua con pendiente −4.
(b) [1 punto] Para el caso $a = 2$, $b = 3$, obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 1$.
Solución: a) $a = 4$; $b = -10$ b) $y = 9x - 4$
Ejercicio 4. (Junio) [2’5 puntos] Calcula

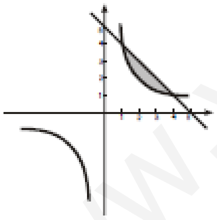
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{senx}}{x^2}$$

Solución: 0

Ejercicio 5. (Junio) Considera la función f dada por $f(x) = 5-x$ y la función *g* definida como $g(x)=\frac{4}{x}$ para $x \neq 0$.

(a) [1 punto] Esboza el recinto limitado por las gráficas de *f* y *g* indicando sus puntos de corte.

Solución: a)



Ejercicio 6. [2’5puntos] Sea $f: R \rightarrow R$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} e^x\left(x^2+ax\right) & si \quad x\leq 0 \\ \dfrac{bx^2+c}{x+1} & si \quad x>0 \end{cases}$$

Calcula las constantes *a*, *b* y *c* sabiendo que *f* es derivable y que la recta tangente a la grafica de *f* en el punto de abscisa $x = 1$ tiene pendiente 3.

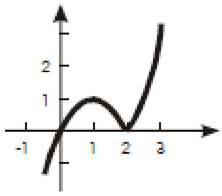
Solución: $a = 0$, $b = 4$ y $c = 0$.

Ejercicio7. [2’5 puntos] Sea $f: R \rightarrow R$ la función definida como $f(x)=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$. Halla las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = -5$ y en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución: En $x = -5$: tangente $\Rightarrow$ $y = \frac{7}{3}x + \frac{11}{3}$; normal $\Rightarrow$ $y = -\frac{3}{7}x - \frac{71}{7}$. En $x = 2$: tangente $\Rightarrow$ $y = 3$; normal $\Rightarrow$ $x = 2$

Ejercicio 8. Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x|2 - x|$.
(a) [1 punto] Esboza su gráfica.

Solución: a)

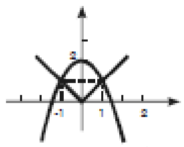


Ejercicio 9. [2’5 puntos] La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 90 cm. Si se hace girar alrededor de uno de sus catetos, el triángulo engendra un cono. ¿Qué medidas han de tener los catetos del triángulo para que el volumen del cono engendrado sea máximo? (Recuerda que el volumen del cono es: $V = \frac{1}{3}\pi . r^2 . h$).

Solución: $30\sqrt{6}$ cm y $30\sqrt{3}$ cm

Ejercicio 10. Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = |x|$.
(a) [1 punto] Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados.

Solución: a)



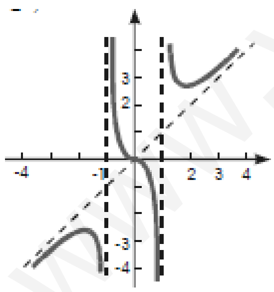
Ejercicio11 Sea f la función definida como $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ para $x \neq \pm 1$.
(a) [1 punto] Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.
(b) [0’75 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
(c) [0’75 puntos] Esboza la gráfica de f.

Solución: a) Vertical: $x = -1$ y $x = 1$. Posición: $\begin{cases} x \to -1^- \Rightarrow f(x) \to -\infty \\ x \to -1^+ \Rightarrow f(x) \to +\infty \end{cases}$; $\begin{cases} x \to 1^- \Rightarrow f(x) \to -\infty \\ x \to 1^+ \Rightarrow f(x) \to +\infty \end{cases}$

Oblicua: $y = x$, para $x \to -\infty$ y $x \to +\infty$. Posición $\begin{cases} x \to -\infty \Rightarrow \text{gráfica de } f \text{ por debajo de la asintota} \\ x \to +\infty \Rightarrow \text{gráfica de } f \text{ por encima de la asintota} \end{cases}$

b) $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right) \Rightarrow f$ estrictamente creciente ; $x \in \left(-\sqrt{3}, -1\right) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup \left(1, \sqrt{3}\right) \Rightarrow f$ estrictamente decreciente

c)



Ejercicio 12. Dada la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln x$, donde ln es la función logaritmo neperiano, se pide:
(a) [0’75 puntos] Comprueba que la recta de ecuación $y = -ex + 1 + e^2$ es la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = e$.

Solución: a) Recta normal $y = -ex + 1 + e^2$

Ejercicio 13. (Septiembre) [2’5 puntos] Una hoja de papel tiene que contener 18 cm2 de texto. Los márgenes superior e inferior han de tener 2 cm cada uno y los laterales 1 cm. Calcula las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

Solución: 5 cm × 10 cm.

Ejercicio14. (Septiembre) Considera la función $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & si \;\; 0\le x\le 2 \\ cx & si \;\; 2<x\le 4 \end{cases}$$

(a) [1’75 puntos] Sabiendo que *f* es derivable en todo el dominio y que verifica *f*(0) = *f*(4), determina los valores de *a*, *b* y *c*.
(b) [0’75 puntos] Para $a = -3$, $b = 4$ y $c = 1$ halla los extremos absolutos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución: a) a = -3; b = 4; c = 1 b) Mínimo absoluto 7/ 4, para x = 3/ 2. Máximo absoluto 4 para x = 0 y x = 4

Ejercicio15. (Septiembre) Considera la función f : R → R dada por $f(x) = x^2 + 4$.
(a) [0’75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 1$.
Solución: a) $y = 2x + 3$
Ejercicio 1**6.** [2’5 puntos] Dada la función f : R → R definida como $f(x) = a$ sen$(x) + bx^2 + cx + d$, determina los valores de las constantes a, b, c y d sabiendo que la gráfica de *f* tiene tangente horizontal en el punto (0, 4) y que la segunda derivada de *f* es $f''(x) = 3$ sen$(x) - 10$.

Solución: a = -3, b = -5, c = 3 y d = 4.

Ejercicio 16. [2’5 puntos] Considera la función f : R → R definida por

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & si \;\; x\le 0 \\ 1-x^2 & si \;\; 0<x<1 \\ \dfrac{2}{x+1} & si \;\; 1\le x \end{cases}$$

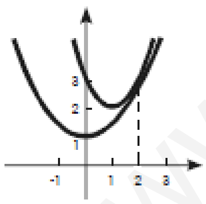
Estudia su continuidad y derivabilidad. Determina la función derivada de *f*.

Solución: La función es continua en $\mathbb{R}$ - {1}. La función es derivable en $\mathbb{R}$ - {-1, 0}. $f'(x)=\begin{cases} -e^{-x} & \text{si} \;\; x<0 \\ -2x & \text{si} \;\; 0<x<1 \\ \dfrac{-2}{x+1} & \text{si} \;\; x>1 \end{cases}$

Ejercicio 17. Sean f, g : R → R las funciones definidas por $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 1$

(a) [1 punto] Esboza las gráficas de *f* y *g*, y halla su punto de corte.
Solución:

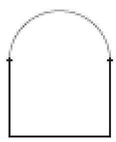
a)



Punto de corte (2, 3)

Análisis 2011

Ejercicio 1. [2'5 puntos] Una ventana normanda consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo. De entre todas las ventanas normandas de perímetro 10 m, halla las dimensiones del marco de la de área máxima.



Solución: Los lados del rectángulo miden $\frac{20}{4+\pi}m.$ la base y $\frac{10}{4+\pi}m.$ la altura
Ejercicio 2. Sea f: $\left[\frac{1}{e},4\right]$ → R la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} x-\ln(x)+a & si \;\; \dfrac{1}{e}\le x\le 2 \\ bx+1-\ln(x) & si \; 2<x\le 4 \end{cases}$$

donde ln denota la función logaritmo neperiano.

(a) [1'25 puntos] Calcula los valores de a y b para que f sea derivable en el intervalo $\left(\frac{1}{e}, 4\right)$.

(b) [1'25 puntos] Para $a = 0$ y $b = \frac{1}{2}$ halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución: a) a = 1 b = 1 b) Mínimo (1,1) máximo (4,3-ln4)

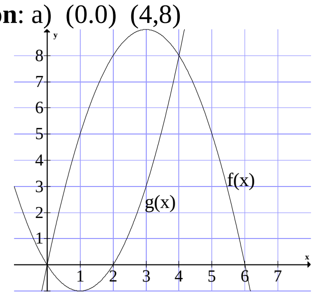
Ejercicio 3. [2'5 puntos] Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y de área máxima.

Solución: Base 2 unidades, altura $\sqrt{8}$ unidades.

Ejercicio 4. Considera las funciones $f; g$: R → R definidas por $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x$

(a) [0'75 puntos] Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.

Solución: a) (0.0) (4,8)



Ejercicio 5. Sea f la función definida por $f(x) = \frac{3x^4+1}{x^3}$ $para\ x \neq 0$

(a) [1'25 puntos] Estudia las asíntotas de la gráfica de la función.

(b) [1'25 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

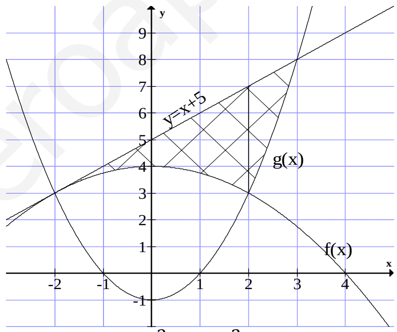
Solución: a) Asíntota vertical: x = 0. Asíntota oblicua: y = 3x. b) f(x) es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, decreciente en $(-1{,}0) \cup (0.1)$, máximo relativo (-1,4), mínimo relativo (1,4)

Ejercicio 6. Sean $f; g$: R → R las funciones definidas por $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ y $g(x) = x^2 - 1$

(a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$.

(b) [1'75 puntos] Esboza el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y la recta $y = x+5$.

Solución: a) y = x+5 b)



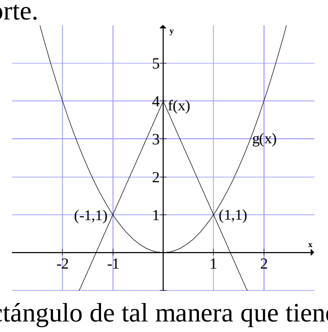
Ejercicio 7. [2'5 puntos] Dada la función f : R → R definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, determina a, b y c sabiendo que su gráfica tiene un punto de inflexión en (1,0), y que la recta tangente en ese punto tiene por ecuación $y = -3x + 3$.

Solución: a = 3, b = -9, c = 6

Ejercicio 8. Sean f : R → R y g : R → R las funciones definidas por:

$$f(x) = 4 - 3|x| \text{ y } \qquad g(x) = x^2$$

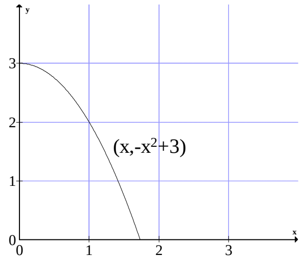
(a) [1 punto] Esboza las gráficas de f y g. Determina sus puntos de corte.



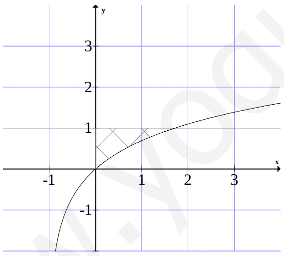
Solución: a)

Ejercicio 9. [2'5 puntos] En el primer cuadrante representamos un rectángulo de tal manera que tiene un vértice en el origen de coordenadas y el vértice opuesto en la parábola $y = -x^2 + 3$. Determina las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.

Solución: x = 1u. y= 2 u



Ejercicio 10. [2'5 puntos] Queremos hacer junto a la carretera un cercado rectangular para unos caballos en una zona llana. Cada metro del lado del cercado que está junto a la carretera nos cuesta 100 euros, mientras que para el resto del cercado nos cuesta 10 euros el metro. ¿Cuáles son las dimensiones del prado de área máxima que podemos cercar con 3000 euros?
Solución: El lado que está junto a la carretera mide 150/11 metros y el otro 150 metros.
Ejercicio 11. [2'5 puntos] En una empresa los ingresos (en euros) dependen de la edad. Si la edad, x, es de 18 a 50 años, los ingresos vienen dados por la fórmula $-x^2 + 70x$, mientras que para edades iguales o superiores a 50 años los ingresos están determinados por la expresión, $\frac{400x}{x-30}$
Calcula cuál es el máximo de los ingresos y a qué edad se alcanza.
Solución: El máximo ingreso es 1225 € y se alcanza a los 35 años
Ejercicio 12. Dada la función f : R → R definida por $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$
(a) [0'5 puntos] Prueba que las rectas $y = -x + 1$ e $y = 3x-1$ son tangentes a su gráfica.
Solución: a) y = -x+ 1 es tangente en el punto (1,0). Y = 3x- 1 es tangente en el punto (0,1).
Ejercicio 13. [2'5 puntos] Un alambre de 100 m de longitud se divide en dos trozos. Con uno de los trozos se construye un cuadrado y con el otro un rectángulo cuya base es doble que su altura. Calcula las longitudes de cada uno de los trozos con la condición de que la suma de las áreas de estas dos figuras sea mínima.
Solución: El trozo para construir el cuadrado mide 800/17 m. El trozo para construir el rectángulo mide 900/17 m.
Ejercicio 14. Sea f : R → R la función definida por $f(x) = 4 - x^2$
(a) [1 punto] Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.
(b) [1'5 puntos] Determina el punto de la gráfica en el que la recta tangente es perpendicular a la recta $x + 2y - 2 = 0$.
Solución: a) $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$ b) (-1,3)
Ejercicio 15. [2'5 puntos] Se desea construir un depósito cilíndrico cerrado de área total igual a 54 m^2.
Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que éste tenga volumen máximo.
Solución: $r = \frac{3\sqrt{\pi}}{\pi}$ m. Altura = $\frac{6\sqrt{\pi}}{\pi}$ m.
Ejercicio16. Sea f : (-1;+∞) → R la función definida por $f(x) = \ln(x + 1)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano.
(a) [0'75 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, el eje OY y la recta $y = 1$. Calcula los puntos de corte de las gráficas.
Solución: a)



Ejercicio 17. [2'5 puntos] Sea f : [1;+∞) → R la función definida por $f(x) = \sqrt{x-1}$. Determina el punto P de la gráfica de f que se encuentra a menor distancia del punto $A(2; 0)$. ¿Cuál es esa distancia?
Solución: $P\left(\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ Distancia = $\sqrt{\frac{3}{4}}$

Ejercicio 18. (Junio 2012) Sea la función $f: R \rightarrow R$ definida por $f(x) = e^x(x-2)$
a) [1 punto] Calcula las asíntotas de f.
b) [1 punto] Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan) y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
c) [0,5 puntos] Determina, si existen, los puntos de inflexión de f.
Solución: a) Asíntota horizontal y = 0 cuando $x \rightarrow -\infty$ b) $(1, -e)$ mínimo. Es creciente en (1, +∞) y decreciente en (-∞, 1).
c) (0, -2) es el punto de inflexión.

Ejercicio 19. (Junio 2012) Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \frac{a \cdot sen(x) - xe^x}{x^2}$ es finito, calcula el valor de a y el de dicho límite.
Solución: a = 1 y $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x) - xe^x}{x^2}$ = -1

Ejercicio 20. (Septiembre 2012) Sea la función continua $f: R \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + k & si\ \ x \leq 0 \\ \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2} & si\ x > 0 \end{cases}$$

a) [1,75 puntos] Calcula el valor de k.
b) [0,75 puntos] Halla la ecuación ce la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa x = 1.
Solución: a) k = 1. b) $y = 2x + e - 3$

Ejercicio 21. (Septiembre 2012) Sea la función f definida por $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}\ para\ x \neq 1$
a) [0,75 puntos] Estudia las asíntotas de la gráfica de f.
b) [1,25 puntos] Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan) y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
Solución: a) Asíntota vertical x = 1; asíntota horizontal y = 0 (cuando x → +∞) b) (0, 1) es el mínimo relativo. La función f es decreciente en (-∞, 0) y creciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

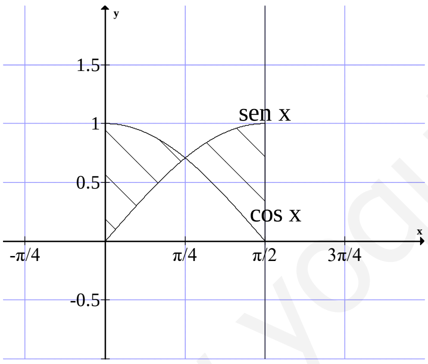
Ejercicio 22. (Septiembre 2012) Sea la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = \frac{9-x^2}{4}$
a) [0,75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1.

Solución: a) $y = \frac{-1}{2}x + \frac{5}{2}$

Análisis 2012

Ejercicio 1. Sea la función *f* : (0;+∞) → R definida por *f*(*x*) = $\frac{1}{x} + lnx$ donde ln denota la función logaritmo neperiano.
(a) [1'75 puntos] Halla los extremos absolutos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) en el intervalo $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.
(b) [0'75 puntos] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x* = *e*.
Solución: a) Mínimo en (1,1), máximo en $\left(\frac{1}{e}, e - 1\right)$

Ejercicio 2. Sean *f; g* : R → R las funciones definidas por *f*(*x*) = sen(*x*) y *g*(*x*) = cos(*x*) respectivamente.
(a) [0'75 puntos] Realiza un esbozo de las gráficas de *f* y *g* en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

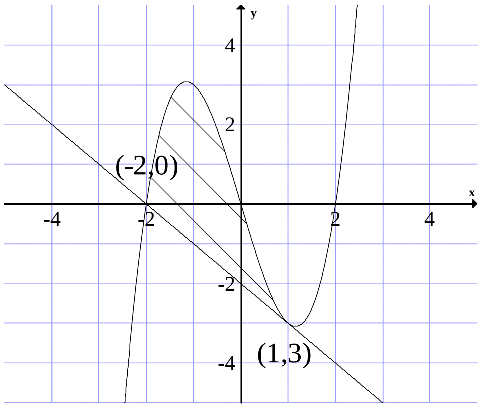
Solución: a) 

Ejercicio 3. Sea *f* la función definida por $f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$ para *x*≠ −1 y *x*≠ 2.
(a) [1 punto] Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de *f*.
(b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
(c) [0'5 puntos] Calcula, si existe, algún punto de la gráfica de *f* donde ésta corta a la asíntota horizontal.
Solución: a) Verticales: x = -1 $\begin{cases} \lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{cases}$ x = 2 $\begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{cases}$
Horizontales: y = 2$\begin{cases} x \to +\infty\ la función\ está\ por\ encima\ de\ la\ asíntota \\ x \to -\infty\ la\ función\ está\ por\ debajo\ de\ la\ asíntota \end{cases}$
b) La función es decreciente en: $(-\infty, -4) \cup (0,2) \cup (2, +\infty)$. La función es creciente en: $(-4, -1) \cup (-1,0)$c) La gráfica de f no corta a la asíntota horizontal.

Ejercicio 4. Sea la función *f* : [1*;* *e*] → R definida por *f*(*x*) = x^2 -8 ln(x) donde ln denota la función logaritmo neperiano.
(a) [0'75 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
(b) [1 punto] Calcula los extremos absolutos y relativos de la función *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
(c) [0'75 puntos] Estudia los intervalos de concavidad y de convexidad.
Solución: a) La función es creciente en el intervalo (2, e) y decreciente en el intervalo (1, 2).
b) El mínimo está en el punto $(2,4 - 8ln2\ )$ y el máximo en (1, 1), c) La función es convexa en todo su dominio.

Ejercicio 5. Sea f : R → R la función definida por $f(x) = x^3 - 4x$
(a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.
(b) [0'75 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = -x - 2$, determinando los puntos de corte de ambas gráficas.

Solución: a) $y = - x – 2$ b)



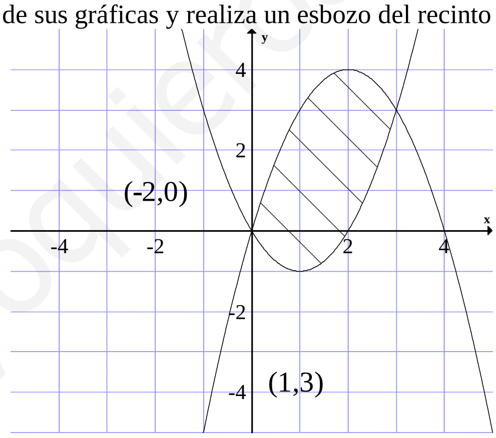
Ejercicio 6. Sea la función f : R → R definida por $f(x) = e^x(x^2 - x + 1)$
(a) [0'75 puntos] Calcula $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
(b) [1'25 puntos] Halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan), determinando si son máximos o mínimos.
(c) [0'5 puntos] Determina las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de f.

Solución: a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ b) máximo relativo en (-1, 3/e) mínimo relativo en (0, 1). c) $x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ y $x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$

Ejercicio 7. Sean $f; g$: R ! R las funciones definidas por $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = -x^2 + 4x$ respectivamente.

(a) [0'75 puntos] Halla los puntos de corte de sus gráficas y realiza un esbozo del recinto que limitan.

Solución: a) Puntos de corte (0, 0) y (3, 3)



Ejercicio 8. Sea la función continua f : R → R definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + k & si\ x \leq 0 \\ \frac{e^{x^2}-1}{x^2} & si\ x > 0 \end{cases}$$

(a) [1'25 puntos] Calcula el valor de k.
(b) [1'25 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 1$.
Solución: a) k = 1 b) y = 2x + e - 3
Ejercicio 9. Sea la función f definida por $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ para $x \neq 1$.

(a) [1'25 puntos] Estudia las asíntotas de la gráfica de la función f.
(b) [1'25 puntos] Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Solución: a) Vertical: x = 1 $\begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty \end{cases}$ Horizontal: y = 0 cuando x→+∞ y la gráfica de la función está por debajo de la asíntota. b) Mínimo relativo (0, 1). La función es decreciente en el intervalo (-∞, 0) y es creciente en $(0,1) \cup (1,+\infty)$

Ejercicio 10. Sea *f* : R → R la función definida por *f*(*x*) =$\frac{9-x^2}{4}$

(a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x* = 1.

Solución: a) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

Ejercicio 11. Sea la función *f* : R → R definida por *f*(*x*) = $e^x(x-2)$

(a) [1 punto] Calcula las asíntotas de *f*.

(b) [1 punto] Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.

(c) [0'5 puntos] Determina, si existen, los puntos de inflexión de la gráfica de *f*.

Solución: a) Horizontal: y = 0 cuando x→-∞ b) Mínimo en (1, -e). Decreciente en el intervalo (-∞, 1), creciente en el intervalo (1, +∞) c) (0, -2)

Ejercicio12. [2'5 puntos] Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \frac{a\cdot sen(x) - xe^x}{x^2}$ es finito, calcula el valor de *a* y el de dicho límite.

Solución: a = 1 $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x) - xe^x}{x^2} = -1$

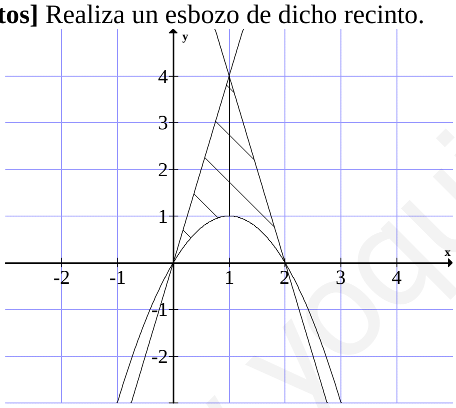
Ejercicio 13. [2'5 puntos] Un alambre de longitud 2 metros se divide en dos trozos. Con el primero se forma un rectángulo cuya base es el doble de su altura y con el segundo trozo se forma un cuadrado.

Calcula las longitudes de dichos trozos para que la suma de las áreas del rectángulo y el cuadrado resultantes sea mínima.18

Solución: El trozo con el que se forma el rectángulo mide $\frac{18}{17} metros$. El trozo con el que se forma el cuadrado mide $\frac{16}{17}\ metros$

Ejercicio 14. Se considera el recinto del plano situado en el primer cuadrante limitado por las rectas $y = 4x$, $y = 8 - 4x$ y la curva $y = 2x - x^2$.

(a) [0'5 puntos] Realiza un esbozo de dicho recinto.

Solución: a) 

Ejercicio15. Sea la función *f* : R → R definida por *f*(*x*) = ln(x^2 + 3*x* + 3) - *x* donde ln denota la función logaritmo neperiano.

(a) [1'5 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) [1 punto] Determina la ecuación de la recta normal a la grafica de *f* en el punto de abscisa *x* = -2.

Solución: a) f es creciente en (-1, 0) y decreciente en $(-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$. Máximo relativo en (0, ln 3), mínimo relativo en (-1, 1) b) $y = \frac{1}{2}x + 1$

Ejercicio16. [2'5 puntos] Se considera la función derivable *f* : R → R definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{a}{x-2} & si\ x < 1 \\ a + \frac{b}{\sqrt{x}} & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

Calcula los valores de *a* y *b*.

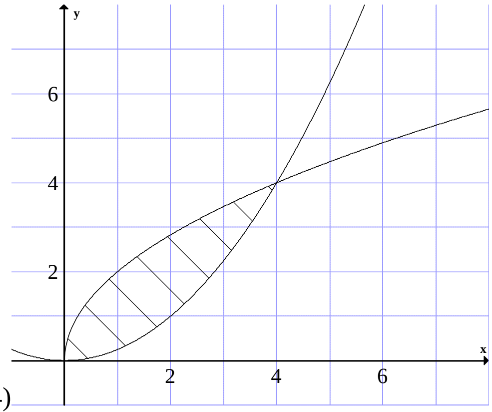
Solución: $a = \frac{1}{4}$ $b = \frac{1}{2}$

Ejercicio 17. [2'5 puntos] De entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 10 unidades, determina las dimensiones del de área máxima.

Solución: Los catetos miden cada uno $5\sqrt{2}\ unidades$.

Ejercicio 18. Sean las funciones $f : R \to R$ y $g : [0;+1) \to R$ definidas por $f(x) = \frac{x^2}{4}$ y $g(x) = 2\sqrt{x}$ respectivamente.
(a) [0'75 puntos] Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g. Realiza un esbozo del recinto que limitan.

Solución: a) (0, 0) y (4, 4)



Análisis 2013

Ejercicio 1. [2’5 puntos] Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo isósceles de 6 metros de base (el lado desigual) y 4 metros de alto.

Solución: base = 3 metros, altura = 2 metros

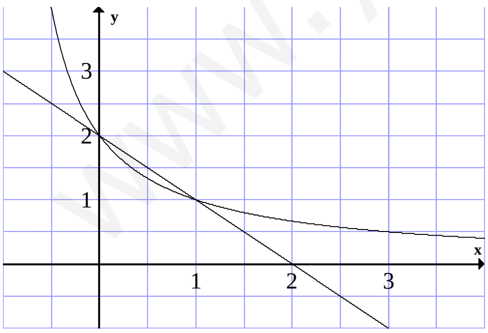
Ejercicio 2. Sean f y g las funciones definidas por $f(x) = 2 - x$ y $g(x) = \frac{2}{x+1}$ para $x \neq -1$.

a) [0’5 puntos] Calcula los puntos de corte entre las gráficas de f y g.

b) [0’5 puntos] Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes.

Solución; a) (0 , 2) y (1 , 1)

b)



Ejercicio 3. Sea f la función definida por $f(x) = xe^{1/x}$ para $x \geq -1$, $x \neq 0$.

a) [1 punto] Calcula los límites laterales de f en x = 0.

b) [1’5 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

Solución: a) Por la izquierda 0. Por la derecha +∞. b) Vertical x = 0. Oblicua y = x + 1 cuando x→ +∞

Ejercicio 4. [2'5 puntos] Un alambre de 10 metros de longitud se divide en dos trozos. Con uno de ellos se forma un triángulo equilátero y con el otro un cuadrado. Halla la longitud de dichos trozos para que la suma de las áreas sea mínima.

Solución: Trozo del triángulo: $\frac{90}{9+4\sqrt{3}}$ metros. Trozo del cuadrado: $\frac{40\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}$ metros.

Ejercicio 5. Sea f : (0,+∞) → R la función definida por $f(x) = \frac{2lnx}{x^2}$ (donde ln denota el logaritmo neperiano).

a) [1'75 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) [0'75 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

Solución: a) Creciente en $\left(0, \sqrt{e}\right)$ Decreciente en $\left(\sqrt{e}\,, +\infty\right)$ Máximo en $\left(\sqrt{e}, \frac{1}{e}\right)$

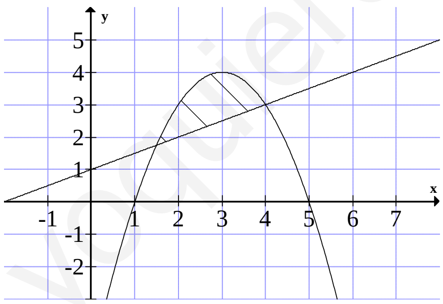
b) vertical x = 0, horizontal y = 0 cuando x → +∞

Ejercicio 6. Sea g : R → R la función definida por g(x) = −x^2 + 6x − 5.

a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de g en el punto de abscisa x = 4.

b) [1'75 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de g y la recta x−2y+2 = 0.

Solución: a) $y = \frac{1}{2}x + 1$ b)



Ejercicio 7. Sea f la función definida por $f(x) = \frac{x}{lnx}$ para x > 0, x ≠ 1 (donde ln denota el logaritmo neperiano).

a) [1'25 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

b) [1'25 puntos] Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = e.

Solución: a) Vertical x = 1 b) recta tangente y = e, recta normal x = e

Ejercicio 8. Sea f la función definida por $f(x) = \frac{k}{(x-a)(2x-1)}$ para x ≠ a y $x \neq \frac{1}{2}$.

a) [1 punto] Halla a y k sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (0, 2) y que la recta x = 2 es una asíntota de dicha gráfica.

b) [1'5 puntos] Para k = 4 y a = 2, halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Solución: a) a = 2 k = 4   b) Máximo relativo en $\left(\frac{5}{4}, -\frac{32}{9}\right)$ la función es decreciente en $\left(\frac{5}{4}, 2\right) \cup (2. +\infty)$ y creciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$

Ejercicio 9. [2’5 puntos] Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de $\sqrt{5}$ cm. de radio, de forma que uno de sus lados está contenido en el diámetro del semicírculo y el lado opuesto tiene sus vértices sobre la semicircunferencia. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que es el de mayor perímetro posible.

Solución: lado contenido en el diámetro 4 cm, el otro lado mide 1 cm.

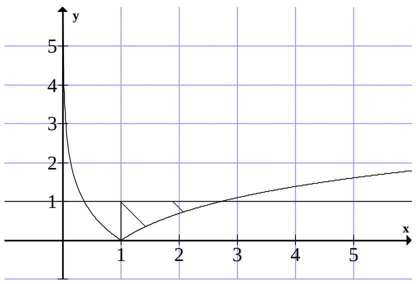
Ejercicio 10. [2’5 puntos] Considera la función f : R → R dada por $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$. Determina a, b y c sabiendo que la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0 es y + x = −3 y que el punto de inflexión tiene abscisa x = 1.

Solución: a = -3 b = -1 c = -3

Ejercicio 11. Sea g : (0,+∞) → R la función definida por g(x) = | ln(x)| (donde ln denota el logaritmo neperiano).

a) [1’25 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de g y la recta y = 1. Calcula los puntos de corte entre ellas.

Solución: a) Puntos de corte $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ y $(e, 1)$



Ejercicio 12. Sea g la función definida por $g(x) = \frac{mx^3}{(x-n)^2}\ \ para\ x \neq n$

a) [1’75 puntos] Halla m y n sabiendo que la recta y = 2x − 4 es una asíntota de la gráfica de g.

b) [0’75 puntos] Determina si la gráfica de g es simétrica respecto al origen.

Solución: a) m = 2 n = -1 b) No porque g(-x) = -g(x)

Ejercicio 13. [2’5 puntos] Sea f : R → R la función definida por $f(x) = x^3 +ax^2 +bx+c$. Se sabe que un punto de inflexión de la gráfica de f tiene abscisa x = 1 y que f tiene un mínimo relativo en x = 2 de valor -9. Calcula a, b y c.

Solución: a = -3 b = 0 c = -5

Ejercicio 14. [2’5 puntos] Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \frac{x\,cos\,(x)+b\,sen\,(x)}{x^3}$ es finito, calcula b y el valor del límite.

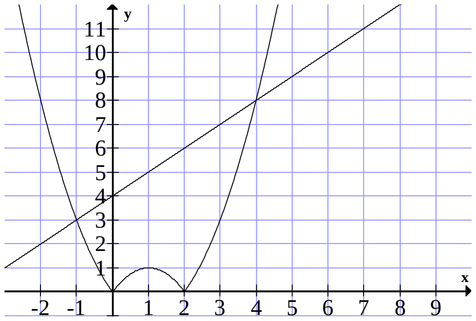
Solución: b = -1 El límite es $-\frac{1}{3}$

Ejercicio 15. Sean f : R → R y g : R → R las funciones definidas mediante

$$f(x) = |x(x-2)| \text{ y } g(x) = x + 4.$$

a) [1’25 puntos] Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes. Calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

Solución: a)



(-1 3)   (4, 8)

Ejercicio 16. Sea f : (−∞, 1) → R la función definida por $f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & si\ \ x \leq 0, \\ a\sqrt{b-x} & si\ \ 0 < x < 1. \end{cases}$

a) [1’5 puntos] Determina a y b sabiendo que f es derivable en todo su dominio.

b) [1 punto] Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0.

Solución: a) a = 2   b = 1   b) Recta tangente: y = -x +2.   Recta normal: y = x + 2