<u>Examen de Geometría 2º Bachillerato</u>

Problema 1: Sea P(1,0,-1), y P_1 el punto simétrico de P respecto al plano π_1:x-2y=0 y P_2 el punto simétrico de P respecto el plano π_2:x+2y+z=1. Hallar la ecuación del plano que pasa por P_1, P_2 y P_3.

<u>Solución:</u>

Simétrico de P respecto a π_1 → $\vec{n}_1 = (1,-2,0)$

1) Recta perpendicular a π_1 por P r_1:(x,y,z)=(1+λ,-2λ,-1)
2) Punto corte de π_1 y r_1 → 1+λ-2(-2λ)=0 → λ=-1/5 → M_1(4/5,2/5,-1)
3) Simétrico $P_1(2M_x-P_x, 2M_y-P_y, 2M_z-P_z)$=(3/5,4/5,-1)

Simétrico de P respecto a π_2 → $\vec{n}_1 = (1,2,1)$

1) Recta perpendicular a π_2 por P r_2:(x,y,z)=(1+λ,2λ,-1+λ)
2) Punto corte de π_2 y r_2→1+λ+2(2λ)+(-1+λ)=1→λ=1/6 → M_2(7/6,1/3,-5/6)
3) Simétrico $P_2(2M_x-P_x, 2M_y-P_y, 2M_z-P_z)$=(4/3,2/3,-2/3)

El plano que pasa por los tres puntos es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -2/5 & 4/5 & 0 \\ -1/3 & -2/3 & -1/3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x+y-4z-6=0$$

Problema 2: Calcula la distancia de la recta $r: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z$ y el plano π: x-y=0.

<u>Solución:</u>

Veamos la recta como intersección de planos r: $\begin{cases} x-y=1 \\ y-2z=1 \end{cases}$. Posición relativa entre recta y plano:

$$rang\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad rang\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$ Paralelas.

El plano π tiene punto Q(0,0,0) y $\vec{n}_\pi$ = (1,-1,0); La recta r punto P(2,1,0) y $\vec{v}_r$=(2,2,1). $\overrightarrow{PQ}$=(-2,-1,0)

$$d(r,\pi)=d(P,\pi)= proy_{\vec{n}_\pi}\overrightarrow{PQ} = \frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}_\pi|}{|\vec{n}_\pi|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Problema 3: Estudia la posición relativa entre el plano π:x+λy+λz=1 y la recta r: $\begin{cases} 2\lambda x + y - 2z = 3 \\ 3x + 2y - z = 3 + \lambda \end{cases}$. Para λ=0 ¿Qué posición relativa tienen el plano y la recta? En caso de que se corten calcula el punto de corte.

<u>**Solución:**</u>

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 2\lambda & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 2\lambda & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 3+\lambda \end{pmatrix}$$

Rango de M:
$|M|=6\lambda^2-9\lambda+3$; $|M|=0 \rightarrow \lambda=1,1/2$
- Si $\lambda \in R-\{1,1/2\}$ rang(M)=3
- Si λ=1 → rang(M)=2
- Si λ=1/2 → rang(M)=2

Rango de M´ :
- Si $\lambda \in R-\{1,1/2\}$ rang(M´)=3
- Si λ=1 rang(M')=2
- Si λ=1/2 rang(M´)=3

Conclusión:
1. $\lambda \in R-\{1,1/2\}$ rang(M)=rang(M´)=3 → se cortan en un punto
2. λ=1 rang(M`)=rang(M)=2 → recta contenida en el plano
3. λ=1/2 rang(M`)=3 , rang(M)=2 → Son paralelas

Si λ=0 se cortan en el punto : $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{3}{3} = 1,\ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{-3}{3} = -1 \ \ z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{-6}{3} = -2$$

Problema 4: El vértice A es el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo pertenece a la recta $r:\begin{cases} x = 3 \\ y + z = -1 \end{cases}$ y la hipotenusa tiene por extremos los puntos B(2,1,-1) y C(0,-1,3). Calcular el vértice A, el área del triángulo y los ángulos agudos del mismo.

<u>Solución:</u>

Las ecuaciones paramétricas de r son r: $\begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$, luego A(3,λ,-1-λ) y por tanto $\overrightarrow{AB} = (-1, 1-\lambda, \lambda)$ y $\overrightarrow{AC} = (-3, -1-\lambda, 4+\lambda)$

Al ser triángulo rectángulo $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0$ → λ=-1.

Por tanto A(3,-1,0)

área$= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{3}\ u^2$

Ángulos → $\hat{B} = ar\cos\left(\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}\right) = ar\cos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^{o} \rightarrow \hat{C} = 90 - 60 = 30^{o}$