……….………………………………………………………………………………

1º.- Encontrar un número de tres cifras sabiendo que sus unidades valen la suma de sus decenas más centenas; que el doble de las centenas más dos es igual al doble de sus unidades menos 2 y que la suma de sus cifras es 6 veces la de sus decenas.

Solución:

$$\text{Sean } \begin{cases} x = \text{"cifra de las unidades"} \\ y = \text{"cifra de las decenas"} \\ z = \text{"cifra de las centenas"} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + z \\ 2z + 2 = 2x - 2 \\ x + y + z = 6y \end{cases} \text{ que resolviendo} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$$

Luego el número buscado es el 426

2º.- a) Para qué valores de "a" no tiene inversa la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) Para $a = 2$, calcula la matriz inversa de A

Solución:

a)

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + a$ que se anula para $\begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$; para dichos valores de "a" la matriz A no tiene inversa.

b) Para $a = 2$ la matriz tiene la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -2$$

$$\left[Adj(A)\right]^T = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \text{ de donde } A^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

……….……………………………………………………………………………………

3º.-Encontrar la matriz X que cumple

$$X\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}-X$$

Solución:

$$X\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}-X\Rightarrow X\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}+X=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X\left[\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow X\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

Luego:

$$X=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{-1}{5}\\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

4º.-Analizar y resolver, por el método de Cramer, el sistema:

$$\begin{cases}x+y-2z=5\\ 2x-y+z=-1\\ -x+2y-z=4\end{cases}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}=-6\ \ \textbf{;}\ \ \text{luego}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 1\\ 4 & 2 & -1\end{vmatrix}}{-6}=\frac{-6}{-6}=1\ ;\ y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 5 & -2\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 4 & -1\end{vmatrix}}{-6}=\frac{-12}{-6}=2\ ;\ z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 5\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 4\end{vmatrix}}{-6}=\frac{6}{-6}=-1$$

………..……………………………………………………………………………

5º.- Analizar , según el parámetro " h ", el siguiente sistema y resolverlo en sus distintos casos.

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+hz=0 \\ x+4y-4z=0 \end{cases}$$

Solución:

Por tratarse de un sistema homogéneo, es siempre compatible.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & h \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = -3x+3$$ **;** que se anula para $x=1$; luego

Si $x \neq 1$ el sistema es determinado y su solución es:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Si $x=1$ el sistema toma la forma:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ x+4y-4z=0 \end{array}\right\}$$ y como el rango de la matriz de coeficientes es 2, el sistema es equivalente a $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=z \\ 2x-y=-z \end{cases}$ que podemos resolver por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} z & 1 \\ -z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-3} = 0 \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 2 & -z \end{vmatrix}}{-3} = z$$