1º.-Sabiendo que $A+B=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y que $A-B=\begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que cumple $BX = A$

Solución:

Primero debemos calcular A y B

$\begin{cases} A+B=C \\ A-B=D \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{2}(C+D)$; $B=\frac{1}{2}(C-D)$ donde C en la matriz suma y D la matriz diferencias, luego:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y } B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por otra parte si $BX = A \Rightarrow X = B^{-1}A$, luego:

$$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -7 & 13 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 9 & 14 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 2 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

2º.-Discutir el siguiente sistema en función de parámetro λ

$$\begin{cases} 2x+\lambda y+z=7 \\ x+5y-2z=\lambda-1 \\ x-2y`+\lambda z=5 \end{cases}$$

Solución:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & \lambda \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ \lambda-1 \\ 5 \end{pmatrix}}_{B}$$

Estudio del rango de A:

$$Ran(A) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = 8\lambda-\lambda^2-15 \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } \lambda=3 \text{ ò si } \lambda=5 \; Ran(A)=2 \\ \text{En otro caso } Ran(A)=3 \end{cases}$$

Luego :

Si $\lambda \neq 3$ ó $\lambda \neq 5$ El sistema es compatible y determinado

…………………………………………………………………………………………………

Si $\lambda=3$ entonces el sistema toma la forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}_{B}$$

donde $Ran\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}=2$, por lo que el sistema es compatible e indeterminado

Si $\lambda=5$ el sistema toma la forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{B}$$

donde $Ran\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 5 \end{pmatrix}=3$, por lo que el sistema es incompatible

3º.-Dados los planos $\pi:\ 5x-y-z=0$, $\sigma:\ x-y-z=0$ y el punto $P(9,4,-1)$, determinar:

a) La ecuación del plano que pasas por P y es perpendicular a los planos π y σ

b) El punto simétrico de P respecto a la recta r , intersección de los planos π y σ

Solución:

a)

El plano perpendicular plano π tiene que contener el vector $[5,-1,-1]$, y el plano perpendicular al plano σ debe contener el vector $[1,-1,-1]$; luego el plano buscado es:

$$\omega:\begin{cases} x=9+5\lambda+\mu \\ y=4-\lambda-\mu \\ z=-1-\lambda-\mu \end{cases} \Leftrightarrow y-z-5=0$$

……………………………………………………………………………………………

b)

La recta buscada contiene el vector director $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = [0,4,-4]$ y pasa por el punto $(0,0,0)$; luego se trata de la recta: $r:\begin{cases} x=0 \\ y=\eta \\ z=-\eta \end{cases}$

El plano perpendicular a *r* que pasa por p es:

$$y-z+D=0 \Rightarrow 4-(-1)+D=0 \Rightarrow D=-5$$

$$y-z-5=0$$

y corta con la recta en el punto $\begin{cases} x=0 \\ y=\eta \\ z=-\eta \\ y-z-5=0 \end{cases} \Rightarrow \eta=\frac{5}{2} \Rightarrow$ Punto de corte: $\left(0,\frac{5}{2}.-\frac{5}{2}\right)$

Dicho punto es el punto medio del segmento que une P con su simétrico respecto a la recta *r,* luego el punto buscado será:

$$\begin{cases} 0=\dfrac{9+x_0}{2} \\ \dfrac{5}{2}=\dfrac{4+y_0}{2} \\ -\dfrac{5}{2}=\dfrac{-1+z_0}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=-9 \\ y_0=1 \\ z_0=-4 \end{cases}$$

4º.-Un paralepípedo rectangular (u ortoedro) tiene tres de sus aristas sobre las rectas $l:\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, $m=\begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$ y $n:\begin{cases} 2x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$ y uno de sus vértices es $(12,21,-11)$. Se pide:

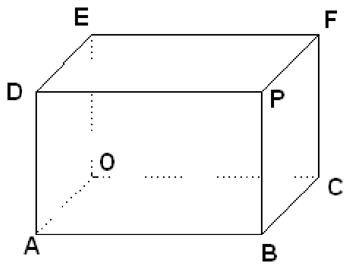
a) Hallar los vértices restante
b) Calcular su volumen

Solución:

a)

Las tres rectas delimitan el vértice común $(0,0,0)$

Dado que el punto $(12,21,-11)$ no está en las rectas , *l.m,n* ni en los planos *lm, ln, mn,* ese punto es el opuesto por la diagonal al $(0,0,0)$



Luego $O(0,0,0)$ y $P(12,21,-11)$

Por otra parte la cara OABC está es el plano $z=0$

por lo que $\overline{OA}=n$, $\overline{OC}=m$ y $\overline{OE}=l$

El vértice C es el corte de una recta paralela a *n* que pasa por B(12,21,0) y la recta *m*, es decir, la recta:

$2x+y=k \Rightarrow 24+21=45 \Rightarrow 2x+y=45$

$$C \Rightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ 2x+y=45 \end{cases} \Rightarrow C(18,9) \text{ es decir: } C(18,9,0)$$

El vértice A es el corte de la recta *n* con una recta paralela *m* que pasa por B:

$x-2y=k \Rightarrow 12-42=-30 \Rightarrow x-2y=-30$

$$A \Rightarrow \begin{cases} x-2y=-3 \\ 2x+y=0 \end{cases} \Rightarrow A\left(-6,12\right) \text{ es decir } A(-6,12,0)$$

Los otros tres vértices están en el plano $z=-11$, luego son:

D$(-6,12,-11)$, E$(0,0,-11)$ y F$(18,8,-11)$

b)

El volumen de ortoedro será:

$V=\overline{OA}\cdot\overline{OC}\cdot\overline{OE}=\sqrt{(-6)^2+12^2+0^2}\cdot\sqrt{18^2+9^2}\cdot\sqrt{(-11)^2}$ = 2970 u. de v.