

1º.- Una matriz A es tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

a) ¿Cuál es la matriz A ?

b) Calcular la matriz fila $X_{1 \times 3}$ que cumpla $XA^2 = BA^3$, siendo $B_{1 \times 3} = (1 \ 2 \ 3)$

Solución:

a)

De la identidad $A \cdot A^2 = A^3$ obtenemos $A = A^3 \cdot A^{-2} = A^3 \cdot (A^2)^{-1}$

$$\text{Como } (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Sea $X_{1 \times 3} = (a \ b \ c)$, entonces

$$X = B \cdot A^3 \cdot A^{-2} = B \cdot A = (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (2 \ 3 \ -2)$$

2º.- Calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{f_1 \rightarrow f_1 \\ f_2 - f_1 \rightarrow f_2 \\ f_3 \rightarrow f_3 \\ f_4 - f_1 \rightarrow f_4}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

3°.- Dado el sistema:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2)x - y + z &= 0 \\ 3x + (\lambda + 6)y - 3z &= 0 \\ 5x + 5y + (\lambda - 2)z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

- a) Calcular para qué valor de λ el sistema tiene solamente la solución $(x, y, z) = (0, 0, 0)$
- b) Obtener las soluciones para todos los valores de λ que hacen el sistema indeterminado.

Solución:

a) El sistema toma la forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda + 2 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda + 6 & -3 \\ 5 & 5 & \lambda - 2 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_B$$

y es compatible y determinado cuando $\text{Ran}(A) = 3$, es decir si:

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda + 6 & -3 \\ 5 & 5 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda + 3)^2 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda \neq 0 \\ \text{ó} \\ \lambda \neq -3 \end{cases}$$

b) El sistema es indeterminado si $\begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{ó} \\ \lambda = -3 \end{cases}$

Si $\lambda = 0$ el sistema toma la forma:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 5 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en el que } \text{Ran}(A) = 2, \text{ por lo que es equivalente a:}$$

$$\left. \begin{aligned} 2x - y &= -z \\ 3x + 6y &= 3z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-z}{5} \\ y = \frac{3z}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5}t \\ y = \frac{3}{5}t \\ z = t \end{cases}$$

Si $\lambda = -3$ el sistema toma la forma:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en el que } \text{Rna}(A) = 1, \text{ por lo que es equivalente a:}$$

$$x + y = z \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

4º.-a) Dado $\vec{a} = 2i + j - 2k$, encontrar "x" para que el vector $\vec{b} = xi + 2j + k$ sea ortogonal al vector \vec{a}

b) Encontrar el vector proyección de \vec{a} sobre el vector $\vec{a} + \vec{b}$

c) Encontrar un tercer vector \vec{c} que con \vec{a} y \vec{b} formen un base ortogonal en V^3

d) Cuánto mide el volumen del prisma que tiene por aristas los vectores \vec{a}, \vec{b} y \vec{c}

Solución:

a) \vec{a} y \vec{b} son ortogonales si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, luego

$$(2 \ 1 \ -2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2x + 2 - 2 = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

b) $\vec{a} + \vec{b} = (2, 3, -1)$, luego el módulo del vector proyección de \vec{a} sobre el vector

$$\vec{a} + \vec{b} \text{ es } \left| \overrightarrow{P_{\vec{a} \text{ sobre } (\vec{a} + \vec{b})}} \right| = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})}{\left| (\vec{a} + \vec{b}) \right|} = \frac{(2, 1, -2) \cdot (2, 3, -1)}{\sqrt{14}} = \frac{9}{\sqrt{14}} \text{ unidades}$$

y el vector unitario en la dirección del vector $(\vec{a} + \vec{b})$ es $\left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}} \right)$

luego el vector buscado es:

$$\overrightarrow{P_{\vec{a} \text{ sobre } (\vec{a} + \vec{b})}} = \frac{9}{\sqrt{14}} \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}} \right) = \left(\frac{9}{7}, \frac{27}{14}, \frac{-9}{14} \right)$$

c) Es fácil ver que los vectores \vec{a} y \vec{b} son linealmente independientes, y además son ortogonales. Para encontrar una base ortogonal en V^3 bastará encontrar un vector que sea perpendicular a ambos, es decir:

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5i - 2j + 4k = (5, -2, 4)$$

también podríamos haber empleado el vector $-\vec{c}$

d) El volumen del paralelepípedo que tiene por arista a los tres vectores es:

$$V = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 45 \text{ unidades de volumen}$$

Dicho volumen coincide con el producto de los módulos de los tres vectores ¿Por qué?