Problema 1 Dadas las retas:

$$r:\left\{\begin{array}{c} x=1-\lambda\\ y=\lambda\\ z=-1\end{array}\right. \qquad s:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$$

Se pide:

1. Estudiar la posición que ocupan.
2. Calcular la distancia mínima que las separa, si procede.
3. Encontrar una recta que las corte y sea perpendicular a ambas.
4. Si $O(0,0,0)$ encontrar una recta que pasando por O corte a las dos rectas.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-1,1,0)\\ P_r(1,0,-1)\end{array}\right. \qquad s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(2,1,1)\\ P_s(-1,1,0)\end{array}\right. \qquad \overrightarrow{P_rP_s}=(-2,1,1)$$

1. $$\left|\begin{array}{rrr} -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{array}\right|=-4\neq 0\Longrightarrow \text{se cruzan}$$

2. $$|[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{P_rP_s}]|=4;\quad |\overrightarrow{u_t}|=|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=|\left|\begin{array}{rrr} i & j & k\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{array}\right||=|(1,1,-3)|=\sqrt{11}$$

$$d=\frac{4}{\sqrt{11}}=\frac{4\sqrt{11}}{11}\ u$$

3. $\overrightarrow{u_t}=(1,1,-3)$

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}\\ \overrightarrow{u_r}\\ P_r\end{array}\right. \Longrightarrow \pi_1:\left|\begin{array}{rrc} 1 & -1 & x-1\\ 1 & 1 & y\\ -3 & 0 & z+1\end{array}\right|=0\Longrightarrow 3x+3y+2z-1=0$$

$$\pi_2:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}\\ \overrightarrow{u_s}\\ P_s\end{array}\right. \Longrightarrow \pi_2:\left|\begin{array}{rrc} 1 & 2 & x+1\\ 1 & 1 & y-1\\ -3 & 1 & z\end{array}\right|=0\Longrightarrow 4x-7y-z+11=0$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} 3x + 3y + 2z - 1 = 0 \\ 4x - 7y - z + 11 = 0 \end{array} \right.$$

4. Tenemos $O(0,0,0)$, $\overrightarrow{OP_r} = (1, 0, -1)$ y $\overrightarrow{OP_s} = (-1, 1, 0)$

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OP_r} \\ \overrightarrow{u_r} \\ O \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \left| \begin{array}{rrr} -1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & -1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x + y + z = 0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OP_s} \\ \overrightarrow{u_s} \\ O \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_2 : \left| \begin{array}{lrr} 2 & -1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x + y - 3z = 0$$

$$h : \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{array} \right.$$

Problema 2 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -m & 2 \\ 2 & 2 & m \\ 3 & m & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.

2. Calcular A^{-1} para $m = 0$.

Solución:

1.

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & -m & 2 \\ 2 & 2 & m \\ 3 & m & 3 \end{array} \right| = -4m^2 + 10m - 6 = 0 \Longrightarrow m = 1, \ \ m = \frac{3}{2}$$

Si $m = 1$ o $m = \dfrac{3}{2} \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

Si $m \neq 1$ y $m \neq \frac{3}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ existe A^{-1}.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2/3 \\ 1 & 1/2 & -2/3 \\ 1 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Discute, en función de los valores de a, y resuelve, en los casos en los que sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{r} x - y - az = 1 \\ -3x + 2y + 4z = a \\ -x + ay + z = 0 \end{array} \right.$$

(La Rioja (junio 2007))

Solución

1.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -a & 1\\ -3 & 2 & 4 & a\\ -1 & a & 1 & 0 \end{array}\right), \quad |A|=3a^2-6a+3=0\Longrightarrow a=1$$

Si $a\neq 1\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Los tres planos se cortan en un punto.

Resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & -a\\ a & -2 & 4\\ 0 & a & 1 \end{array}\right|}{3(a-1)^2}=\frac{-a^3-3a+2}{3(a-1)^2},\ y=\frac{\left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & -a\\ -3 & a & 4\\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right|}{3(a-1)^2}=\frac{-a^2+a-1}{3(a-1)^2}$$

$$z=\frac{\left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 1\\ -3 & 2 & a\\ -1 & a & 0 \end{array}\right|}{3(a-1)^2}=\frac{-a^2-2a+2}{3(a-1)^2}$$

Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 1\\ -3 & 2 & 4 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)\ |A|=0 \text{ y } \left|\begin{array}{rr} 1 & -1\\ -3 & 2 \end{array}\right|=-1\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

$$\left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 1\\ -3 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right|=-1\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$

Luego Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A})$ $\Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene solución). En este caso son dos planos paralelos (π_1 y π_3 mientras que π_2 corta a ambos).