Problema 1 Se pide:

1. Estudiar si los vectores $\overrightarrow{u_1} = (a, 2a, -1)$, $\overrightarrow{u_2} = (-a, 0, 1)$ y $\overrightarrow{u_3} = (-2, 4, a+1)$, son linealmente independientes, según los diferentes valores del parámetro a.
2. ¿Cuando $a = 0$ se podrá escribir $\overrightarrow{u_1}$ como combinación lineal de $\overrightarrow{u_2}$ y $\overrightarrow{u_3}$

Solución:

1. $$\begin{vmatrix} a & 2a & -1 \\ -a & 0 & 1 \\ -2 & 4 & a+1 \end{vmatrix} = 2a^3 + 2a^2 - 4a = 0 \Longrightarrow a = 0 \ a = -1 \text{ y } a = 2$$

   $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ y $\overrightarrow{u_3}$ son linealmente independientes si $a \neq 0$, $a \neq -1$ y $a \neq 2$.

2. Si $a = 0$: $\overrightarrow{u_1} = -\overrightarrow{u_2}$

Problema 2 Dos submarinos se desplazan por el fondo del mar, y sus trayectorias vienen dadas por las rectas:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

Un barco destructor estudia las posibilidades más ventajosas para su ataque, por lo que, el capitán de este barco hace sus análisis matemáticos:

1. Estudia si las trayectorias se cortan, se cruzan o son coincidentes.
2. Calcula la distancia mínima entre ambas trayectorias.
3. Calcula la trayectoria en la que se encuentra esa distancia mínima.

Solución:

$$r_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}} = (-1, 1, 1) \\ P_{r_1}(1, 1, 0) \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_2}} = (1, 1, 0) \\ P_{r_2}(1, 0, 1) \end{cases}$$

1. $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (0, -1, 1)$

   $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Se cruzan}$$

2.

$$|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}| = |(-1,1,2)| = \sqrt{6}$$

$$|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}]| = |3| = 3$$

$$d(r_1, r_2) = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}\, u$$

3. Como intersección de dos planos

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-1,1,2) \\ \overrightarrow{u_{r_1}} = (1,-1,2) \\ P(1,1,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ 1 & 1 & y-1 \\ -2 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x+y-2=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-1,1,2) \\ \overrightarrow{u_{r_2}} = (1,1,0) \\ P(1,0,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ -2 & 0 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x-y-z=0$$

$$t : \begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$$

Problema 3 Se pide:

1. Hallar la ecuación de un plano determinado por los puntos $A(1,-2,1)$, $B(2,0,1)$ y $C(0,1,0)$

2. Estudia la posición relativa de la recta $r : \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ con respecto al plano anterior, hallando el punto de intersección en el caso de que se corten.

Solución:

1.

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{CA} = (1,-3,1) \\ \overrightarrow{CB} = (2,-1,1) \\ P(0,1,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -3 & -1 & y-1 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x-y-5z+1=0$$

2. Sustituyendo en el plano $2(2+\lambda)-(\lambda)-5\lambda+1=0 \Longrightarrow \lambda = 5/9$. Si sutituimos en la recta tenemos un punto de corte en el punto $\left(\frac{23}{9}, \frac{5}{9}, \frac{10}{9}\right)$

Problema 4 Considera el punto $P(1,0,1)$ y la recta r de ecuación $\begin{cases} 2x+y+z+1=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$

1. Halla la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.
2. Determina las coordenadas del punto Q simétrico de P respecto de la recta r.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}2x+y+z+1=0\\ x-z-1=0\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=-3-3\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,-3,1)\\ P_r(1,-3,0)\end{array}\right.$$

1. $\overrightarrow{PP_r}=(0,-3,-1)$

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,-3,1)\\ \overrightarrow{PP_r}=(0,-3,-1)\\ P(1,0,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}1&0&x-1\\-3&-3&y\\1&-1&z-1\end{array}\right|=0 \Longrightarrow 6x+y-3z-3=0$$

2. Construimos un plano π_1 perpendicular a r que contenga a P:

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{u_{\pi_1}}=(1,-3,1)\\ P(1,0,1)\end{array}\right. \Longrightarrow x-3y+z+\lambda=0$$

Como este plano contiene a P: $1-0+1+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-2$ El plano es $\pi_1: x-3y+z-2=0$.

Cortamos el plano π_1 con la recta r: $(1+\lambda)-3(-3-3\lambda)+\lambda-2=0 \Longrightarrow \lambda=-8/11$

El punto de corte lo obtenemos sustituyendo en la recta $H(3/11,-9/11,-8/11)$. Este punto será el punto medio entre P y Q:

$$\frac{P+Q}{2}=H \Longrightarrow Q=2H-P=(-5/11,-18/11,-27/11)$$