Problema 1 Se pide:

a) Calcular el punto simétrico al $P(-1,3,2)$ respecto de la recta $r: \dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$, y calcular la distancia entre este punto y r.

b) Dado el mismo punto anterior, calcular su simétrico respecto al plano $\pi: x+y-2z+1=0$, y calcular la distancia desde este punto al plano.

Solución:

a) Calculamos un plano perpendicular a la recta $\pi: y-z+\lambda=0$, que contiene al punto $P(-1,3,2)$, por lo que tenemos $3-2+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-1$. Luego el plano es $\pi: y-z-1=0$. La recta r y el plano π se cortan en un punto Q que será el punto medio entre P y su simétrico P' respecto a la recta r. Calculamos Q:

$$\lambda+2+\lambda-1=0 \Longrightarrow \lambda=-\frac{1}{2} \Longrightarrow Q\left(-1,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{P+P'}{2}=Q \Longrightarrow P'=2Q-P=(-1,-4,-5)$$

Para calcular la distancia de P a r necesitamos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_rP}=(0,3,4)$

$$|\overrightarrow{P_rP}\times\overrightarrow{u_r}|=|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}|=|(-7,0,0)|=7\ u^2; \quad |\overrightarrow{u_r}|=\sqrt{2}$$

$$d=\frac{7}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}\,u$$

b) Calculamos una recta perpendicular al plano y que contenga al punto P

$$t:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=2-2\lambda \end{cases}$$

calculamos el punto de corte de esta recta con el plano π, y este punto Q será el punto medio entre P y su sumétrico P' respecto al plano

$$(-1+\lambda)+(3+\lambda)-4+4\lambda+1=0 \Longrightarrow \lambda=\frac{1}{6} \Longrightarrow Q\left(-\frac{5}{6},\frac{19}{6},\frac{10}{6}\right)$$

$$\frac{P+P'}{2}=Q\Longrightarrow P'=2Q-P=\left(-\frac{2}{3},\frac{10}{3},\frac{4}{3}\right)$$

La distancia

$$d(P;\pi)=\frac{|-1+3-4+1|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}\ u$$

Problema 2 Sean los planos:

$$\begin{array}{ll}\pi_1: & \lambda x-(\lambda-1)y+z=2\\ \pi_2: & 2x-y+z=\lambda\\ \pi_2: & \lambda x-y+z=\lambda+1\end{array}$$

Estudiar la posición relativa que ocupan en el espacio para los diferentes valores de λ.

Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & -(\lambda-1) & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1 & \lambda\\ \lambda & -1 & 1 & \lambda+1\end{array}\right)\quad |A|=\lambda^2-4\lambda+4=0\Longrightarrow\lambda=2$$

Si $\lambda\neq 2\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$Rango$(A)=$Rango$(\overline{A})=3=$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y en este caso se trata de un sistema compatible determinado y los tres planos se cortan en un punto.

Si $\lambda=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1 & 3\end{array}\right)$$

Las tres primeras filas son iguales nos dicen que Rango$(A)=1$ y el menor $\left|\begin{array}{cc}1 & 2\\ 1 & 3\end{array}\right|=1\neq 0$ nos dice que Rango$(\overline{A})=2$. Luego Rango$(A)\neq$Rango$(\overline{A})$ y el sistema es imcompatible. Comparando los planos dos a dos tenemos que π_1 y π_2 son coincidentes, mientras que el plano π_3 es paralelo a ellos.

Problema 3 Se pide:

a) Encontrar los puntos de la recta $r:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{1}$, que están a una distancia $\sqrt{6}$ del punto $P(3,1,1)$.

b) Encontrar el lugar geométrico de los puntos que distan $\sqrt{10}$ del punto $H(-1,2,1)$

c) Encontrar un plano tangente a la figura del anterior apartado en el punto $Q(2,3,1)$.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Para calcularlos nos apoyamos en una esfera de centro $P(3, 1, 1)$ y radio $\sqrt{6}$: $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6$. Esta esfera corta a la recta en los siguientes puntos

$$(-1-\lambda)^2 + (2\lambda - 1)^2 + \lambda^2 = 6 \Longrightarrow \lambda = 1, \quad \lambda = -\frac{2}{3}$$

Los puntos buscados son

$$P_1(1, 2, 2); \quad P_2\left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

b) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2 = 10 \Longrightarrow x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z-4 = 0$ se trata de una esfera de centro $H(-1, 2, 1)$ y radio $r = \sqrt{10}$

c) Cogemos el vector $\overrightarrow{HQ} = (2, 3, 1) - (-1, 2, 1) = (3, 1, 0)$ El plano tangente $\pi : 3x + y + \lambda = 0 \Longrightarrow 6 + 3 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -9$. El plano buscado es $\pi : 3x + y - 9 = 0$