Problema 1 *(2 puntos).* Dados los puntos $A(0,0,1)$, $B(1,0,-1)$, $C(0,1,-2)$ y $D(1,2,0)$, se pide:

1. (0,5 puntos). Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios.
2. (1 punto). Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.
3. (0,5 puntos). Hallar la distancia del punto D al plano π.

Solución:

1. Construimos los vectores:
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(1,0,-2) \\ \overrightarrow{AC}=(0,1,-3) \\ \overrightarrow{AD}=(1,2,-1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \Longrightarrow$$
Los cuatro puntos no son coplanarios.

2. $$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB}=(1,0,-2) \\ \overrightarrow{AC}=(0,1,-3) \\ A(0,0,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ -2 & -3 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$
$$\pi : 2x+3y+z-1=0$$

3. $$d(D,\pi)=\frac{|2+6-1|}{\sqrt{14}}=\frac{7}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

Madrid (Junio 2008)

Problema 2 *(2 puntos).* Dados el plano $\pi : 3x+2y-z+10=0$ y el punto $P(1,2,3)$, se pide:

1. (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P.
2. (0,5 puntos) Hallar el punto Q intersección de π con r.
3. (0,5 puntos) Hallar el punto R intersección de π con el eje OY.
4. (0,5 puntos). Hallar el área del triángulo PQR

Solución:

1.
$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(3,2,-1)\\ P_r(1,2,3)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1+3\lambda\\ y=2+2\lambda\\ z=3-\lambda\end{array}\right.$$

2.
$$3(1+3\lambda)+2(2+2\lambda)-(3-\lambda)+10=0\Longrightarrow \lambda=-1$$
Luego el punto buscado es el $Q(-2,0,4)$ (Sustituyendo el valor de λ en la recta r.

3. Cuando el plano π corta al eje OY tendremos que $x=0$ y $z=0$, luego $2y+10=0\Longrightarrow y=-5$. El punto buscado es $R(0,-5,0)$.

4. Construyo los vectores $\overrightarrow{RQ}=(-2,5,4)$ y $\overrightarrow{RP}=(1,7,3)$
$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{RQ}\times\overrightarrow{RP}|=|\left|\begin{array}{ccc} i & j & k\\ -2 & 5 & 4\\ 1 & 7 & 3\end{array}\right||=\frac{1}{2}|(-13,10,-19)|=\frac{3\sqrt{70}}{2}$$

Madrid (Junio 2008)

Problema 3 *(2 puntos)*. Se pide:

1. (1 punto). Calcular la distancia entre la recta $r_1:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ y la recta r_2 determinada por el punto $P_2(1,-1,3)$ y el vector director $\overrightarrow{v}=(1,0,3)$

2. (1 punto). Calcule el punto del plano $2x+y-z=1$ más cercano al punto $(1,2,-3)$.

Solución:

1.
$$r_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_{r_1}}=(1,1,1)\\ P_{r_1}(-1,0,3)\end{array}\right. \quad r_2:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_{r_2}}=(1,0,3)\\ P_{r_2}(1,-1,3)\end{array}\right. \quad \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}=(2,-1,0)$$
$$|\overrightarrow{u_{r_1}}\times\overrightarrow{u_{r_2}}|=|\left|\begin{array}{ccc} i & j & k\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{array}\right||=|(3,-2,-1)|=\sqrt{14}$$
$$[\overrightarrow{u_{r_1}},\overrightarrow{u_{r_2}},\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}]=|\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{array}\right|=8$$
$$d(r,s)=\frac{|[\overrightarrow{u_{r_1}},\overrightarrow{u_{r_2}},\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}]|}{|\overrightarrow{u_{r_1}}\times\overrightarrow{u_{r_2}}|}=\frac{8}{\sqrt{14}}=\frac{4\sqrt{14}}{7}\ u$$

2.

3. Seguimos el siguiente procedimiento:

   - Calculamos una recta t perpendicular a π que pase por P:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (2, 1, -1) \\ P_t(1, 2, -3) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ y = -3 - \lambda \end{array} \right.$$

   - Calculamos el punto P' de corte de t con π:

$$2(1+2\lambda)+(2+\lambda)-(-3-\lambda)-1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow P'(-1, 1, -2)$$

Murcia (Junio 2008)

Problema 4 *(3 puntos).* Se considera la recta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{-5} = \dfrac{z+3}{4}$ y el plano $\pi : 2x + 4y + 4z = 5$

1. (1,5 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π.
2. (1,5 puntos) Calcular la ecuación de un plano π_1, que es perpendicular a π y contiene a r.

Solución:

1.

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = -5 - 5\lambda \\ z = -3 + 4\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow 2(1+2\lambda)+4(-5-5\lambda)+4(-3+4\lambda) = 5 \Longrightarrow 0 = 35$$

Como este resultado es absurdo la recta y el plano no se cortan nunca, es decir, son paralelos.

2.

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (2, 4, 4) \\ \overrightarrow{u_r} = (2, -5, 4) \\ P_r(1, -5, -3) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} 2 & 2 & x-1 \\ 4 & -5 & y+5 \\ 4 & 4 & z+3 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi_2 : 2x - z - 5 = 0$$

Zaragoza (Junio 2008)

Problema 5 *(3 puntos).* Se pide:

1. (1 punto). Calcular la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano $\pi : x + y + z = 3$. Obtener el punto de corte de la recta con el plano π.

2. (2 puntos). Hallar el punto (o los) de la recta $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$ cuya distancia al punto $P(1, 0, 2)$ sea $\sqrt{5}$.

Solución:

1. (1 punto). Seguimos el siguiente procedimiento:

   - Calculamos una recta t perpendicular a π que pase por O:

   $$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (1, 1, 1) \\ P_t(0, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

   - Calculamos el punto P' de corte de t con π:

   $$\lambda + \lambda + \lambda - 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow P'(1, 1, 1)$$

2. (2 puntos). Construimos una esfera de centro $P(1, 0, 2)$ y radio $\sqrt{5}$:

   $(x-1)^2+y^2+(z-2)^2 = 5 \Longrightarrow (\lambda-1)^2+(3-\lambda)^2+(-1+2\lambda)^2 = 5 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow$

   El punto buscado es $(1, 2, 3)$. La esfera que construimos y la recta sólo tienen un punto de corte y, por tanto, tangentes.

Zaragoza (Junio 2008)