Problema 1

Dadas las rectas:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}, \quad s: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$$

1. Hallar la ecuación de la recta t que corta a las dos y es perpendicular a ambas.

2. Calcular la mínima distancia entre r y s

(Madrid: Selectividad Junio 2005)

Solución:

1. Los datos de las rectas son:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,3,4) \\ P_r(1,1,1) \end{array} \right. \qquad s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,-1,2) \\ P_s(-1,2,0) \end{array} \right.$$

Primero compruebo que estas rectas se cruzan, y para ello utilizo el vector auxiliar $\overrightarrow{P_rP_s} = (-2,1,-1)$:

$$\left| \begin{array}{rrr} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right| = -15 \neq 0 \Longrightarrow \text{ Se cruzan}$$

La recta t se encuentra como intersección de dos planos:

$$\pi_1: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (10,0,-5)) \\ \overrightarrow{u_r} = (2,3,4) \\ P_r(1,1,1) \end{array} \right. \qquad s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (10,0,-5) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,-1,2) \\ P_s(-1,2,0) \end{array} \right.$$

Donde $\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$:

$$\overrightarrow{u_t} = \left| \begin{array}{lrr} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right| = (10,0,-5)$$

$$\pi_1: \left| \begin{array}{rrr} 10 & 2 & x-1 \\ 0 & 3 & y-1 \\ -5 & 4 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi_1: 3x - 10y + 6z + 1 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} 10 & 1 & x+1 \\ 0 & -1 & y-2 \\ -5 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_2 : x + 5y + 2z - 9 = 0$$

$$t : \begin{cases} 3x- & 10y + 6z + 1 = 0 \\ x+ & 5y + 2z - 9 = 0 \end{cases}$$

2.

$$\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}\right]\right| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -15$$

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{|-15|}{\sqrt{10^2 + 5^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (-1, 2, 0) - (1, 1, 1) = (-2, 1, -1)$$

Problema 2 Dado el punto $P(1, 3, -1)$, se pide:

1. Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x, y, z)$ cuya distancia a P sea igual a 3.
2. Calcular los puntos de la recta:

$$\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$$

cuya distancia a P es igual a 3.

Solución:

1. Se trata de la ecuación de una esfera

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9 \Longrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 2z + 2 = 0$$

2. Sustituimos un punto genérico de la recta en la esfera y obtenemos

$$(3\lambda)^2 + (1+\lambda)^2 + (1-4\lambda)^2 - 2(3\lambda) - 6(1+\lambda) + 2(1-4\lambda) + 2 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 26\lambda(\lambda - 1) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1, \ \ \lambda = 0$$

Sustituyendo en la recta estos valores tendremos los puntos buscados:

Para $\lambda = 0 \Longrightarrow (0, 1, 1)$ y para $\lambda = 1 \Longrightarrow (3, 2, -3)$.

(Madrid: Selectividad Junio 2005)