Problema 1 *(7 puntos)*. Dados la recta $r : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-1}{-1}$ y el plano $\pi : x - y + 2z - 2 = 0$ se pide:

1. Una recta recta perpendicular a π que pase por el origen de coordenadas.
2. Ángulo que forman r y π.
3. Ángulo que forma π con $\pi' : 2x - y + 3z - 1 = 0$
4. Distancia del punto $P(3, -1, 5)$ a la recta r.
5. Los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas y el volumen del tetraedro que forma con estos puntos y el origen de coordenadas.
6. La altura sobre la base formada con los tres puntos de corte calculados en el apartado anterior.
7. Encontrar un plano paralelo a π que esté a una distancia de 5 unidades de él.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, -2, -1) \\ P_r(1, 0, 1) \end{cases} \qquad \overrightarrow{u_\pi} = (1, -1, 2)$$

1.
$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, -1, 2) \\ P_r = O(0, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

2.
$$\sin\alpha = \frac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi}}{|\overrightarrow{u_r}| \cdot |\overrightarrow{u_\pi}|} = \frac{1}{6} \Longrightarrow \alpha = 9^{\text{o}}35'38''$$

3. $\overrightarrow{u_\pi} = (1, -1, 2)$ y $\overrightarrow{u_{\pi'}} = (2, -1, 3)$
$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u_\pi} \cdot \overrightarrow{u_{\pi'}}}{|\overrightarrow{u_\pi}| \cdot |\overrightarrow{u_{\pi'}}|} = \frac{9}{\sqrt{84}} \Longrightarrow \alpha = 10^{\text{o}}53'22''$$

4. $\overrightarrow{P_rP} = (2, -1, 4)$
$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{P_rP} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \sqrt{21}\ u$$

$$|\overrightarrow{P_rP}\times\overrightarrow{u_r}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}| = |3(3,2,-1)| = 3\sqrt{14}$$

5. Con OX hacemos $y=0$ y $z=0 \Longrightarrow A(2,0,0) \Longrightarrow \overrightarrow{OA}=(2,0,0)$

   Con OY hacemos $x=0$ y $z=0 \Longrightarrow B(0,2,0) \Longrightarrow \overrightarrow{OB}=(0,2,0)$

   Con OZ hacemos $x=0$ y $y=0 \Longrightarrow C(0,0,-1) \Longrightarrow \overrightarrow{OC}=(0,0,-1)$

$$V=\frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}| = \frac{2}{3}\ u$$

6. Un punto de π puede ser $P(2,0,0)$ y un plano paralelo a π puede ser $\pi' : x+y-2z+\lambda=0$

$$d(P,\pi')=\frac{|2+\lambda|}{\sqrt{6}}=5 \Longrightarrow |2+\lambda|=5\sqrt{6}$$

$$x+y-2z=-2+5\sqrt{6} \Longrightarrow x+y-2z-2-5\sqrt{6}=0$$
$$x+y-2z=-2-5\sqrt{6} \Longrightarrow x+y-2z+2+5\sqrt{6}=0$$

Problema 2 *(3 puntos)*. Sean las rectas:

$$r: \frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2} \ \text{ y } \ s: \begin{cases} x-y+z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

Se pide:

1. Decidir que posición tienen en el espacio.
2. Ángulo que forman.
3. Calcular la ecuación de la recta en forma continua de una recta perpendicular a ambas y que pase por el punto $P(2,3,4)$.

Solución:

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(-1,1,2) \\ P_r(0,1,-1) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} \overrightarrow{u_s}=(0,1,1) \\ P_s(3/2,0,1/2) \end{cases}$$

1. $\overrightarrow{P_rP_s}=(5/2,-1,-3/2)=\frac{1}{2}(5,-5,-3)$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right] = \begin{vmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

2.

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}|\cdot|\overrightarrow{u_s}|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \alpha = 30^{o\prime}$$

3.

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s} = (-1,1,-1) \\ P_t(2,3,4) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2-\lambda \\ y = 3+\lambda \\ x = 4-\lambda \end{array} \right.$$

$$t : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{-1}$$

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right| = (-1,1,-1)$$