Problema 1 *(4 puntos).* Dada la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 1 = 0$, se pide:

1. Comprobar que se trata de una esfera, calculando su centro y su radio.
2. En contrar el corte de esta esfera con un plano horizontal de ecuación $z = 1$.
3. Encontrar la ecuación de un plano tangente a la esfera en el punto $P(3, 2, 2)$.

Solución:

1.

$$m = -2a = -4 \Longrightarrow a = 2; \quad n = -2b = -2 \Longrightarrow b = 1; p = -2c = 0 \Longrightarrow c = 0$$

$$q = a^2 + b^2 + c^2 - r^2 \Longrightarrow 1 = 4 + 1 - r^2 \Longrightarrow r = 2$$

Se trata de una esfera de centro $C(2, 1, 0)$ y radio $r = 2$.

2. Cuando $z = 1 \Longrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y + 2 = 0$:

$$m = -2a = -4 \Longrightarrow a = 2; \quad n = -2b = -2 \Longrightarrow b = 1$$

$$p = a^2 + b^2 - r^2 \Longrightarrow 2 = 4 + 1 - r^2 \Longrightarrow r = \sqrt{3}$$

Se trata de una circunferencia de centro $C(2, 1, 1)$ y radio $r = \sqrt{3}$.

3. $\overrightarrow{CP} \perp \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = (1, 1, 2)$ y contiene el punto $P(3, 2, 2)$:

$$\pi : x + y + 2z + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -9 \Longrightarrow \pi : x + y + 2z - 9 = 0$$

Problema 2 *(2 puntos).* Encontrar los puntos de la recta

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

que se eencuentran a una distancia 5 del punto $P(1, 1, 1)$

Solución:

Construimos una esfera de centro P y radio $r = 5$:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$$

Calculamos los puntos de corte de esta circunferencia y la recta

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,1,1)\\ P_r(1,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1+2\lambda\\ y=\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

$$(1+2\lambda-1)^2+(\lambda-1)^2+(\lambda-1)^2=25\Longrightarrow 6\lambda^2-4\lambda-23=0\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda_1=2,32\Longrightarrow P_1(5,64;2,32;2,32)\\ \lambda_2=-1,65\Longrightarrow P_2(-2,3;-1,65;-1,65)\end{array}\right.$$

Problema 3 *(4 puntos).* Se consideran las rectas

$$r:\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}\quad s:\left\{\begin{array}{l}2x-y-4=0\\ y-2z+2=0\end{array}\right.$$

se pide:

1. Estudiar su posición relativa.
2. Calcular la distancia que las separa.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,2,1)\\ P_r(-2,1,0)\end{array}\right. \quad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(1,2,1)\\ P_s(2,0,1)\end{array}\right. \quad \overrightarrow{P_rP_s}=(4,-1,1)$$

1.

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc}4&-1&1\\1&2&1\\1&2&1\end{array}\right|=0$$

$$\text{Rango}(A)=2 \text{ y Rango}\left(\begin{array}{c}\overrightarrow{u_r}\\ \overrightarrow{u_r}\end{array}\right)=1\longrightarrow r \text{ y } s \text{ son paralelas.}$$

2.

$$d(r,s)=d(P_s,r)=\frac{|\overrightarrow{P_rP_s}\times\overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}=\frac{3\sqrt{11}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{66}}{2}\ u$$

$$|\overrightarrow{P_rP_s}\times\overrightarrow{u_r}|=|\left|\begin{array}{ccc}i&j&k\\4&-1&1\\1&2&1\end{array}\right||=|(-3,-3,9)|=3\sqrt{11}$$