Problema 1 Sabemos que las siguientes recta se cortan en un punto

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y+k}{3} = \frac{z-1}{-2} \quad s: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-k}{3}$$

Hallar el valor de k y la ecuación en forma general del plano que determinan.

Solución:

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,3,-2) \\ P_r(-1,-k,1) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1,2,3) \\ P_r(0,-3,k) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (0,-3,k) - (-1,-k,1) = (1, k-3, k-1)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & k-3 & k-1 \end{vmatrix} = 36 - 7k = 0 \Longrightarrow k = \frac{36}{7}$$

Si $k = \dfrac{36}{7}$ el rango de la matriz formada por los tres vectores es 2, lo que nos proporciona dos posibilidades, o se cortan o son paralelas. Para resolver este problema calculamos el rango de la matriz formada por $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$ y tenemos que Rango$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow$ las dos rectas se cortan.

Calculamos el plano π que determinan:

$$\pi: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,3,-2) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,2,3) \\ P_s\left(0,-3,\dfrac{36}{7}\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & 2 & y+3 \\ -2 & 3 & z-36/7 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi: 91x - 56y + 7z - 20z = 0$$

Problema 2 Encontrar la posición relativa de los siguientes planos para los diferentes valores de a.

$$\begin{array}{lrrrr} \pi_1: & ax- & y+ & az- & 1=0 \\ \pi_2: & x+ & y+ & az+ & 2=0 \\ \pi_3: & x+ & y- & z- & 1=0 \end{array}$$

Solución:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a & -1 & a & -1 \\ 1 & 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = a^2 + 2a + 1 = 0 \Longrightarrow a = -1$$

Si $a \neq -1 \Longrightarrow$ el sistema sería Compatible Determinado y por tanto los tres planos se cortarían en un punto.

Si $a = -1$ tendríamos que

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$Rango$(A) = 2 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible. Comparamos los planos dos a dos:

Comparamos π_1 y π_2: $\dfrac{-1}{1} = \dfrac{-1}{1} \neq \dfrac{-1}{-1} \Longrightarrow$ Se cortan.

Comparamos π_1 y π_3: $\dfrac{-1}{1} = \dfrac{-1}{1} \neq \dfrac{-1}{-1} \Longrightarrow$ Se cortan.

Comparamos π_2 y π_3: $\dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{1} \neq \dfrac{-1}{-1} \neq \dfrac{2}{-1} \Longrightarrow$ Son paralelas.

En conclusión: Los planos π_2 y π_3 son paralelos y el plano π_1 corta a los dos.

Problema 3 Dado el punto $P(1,1,0)$ y la recta $r : \left\{ \begin{array}{rrr} x- & y- & z = 2 \\ 2x- & y+ & z = 0 \end{array} \right.$. Se pide:

1. Calcular la distancia de P a r.
2. Calcular la ecuación general de un plano π que sea perpendicular a r y contenga al punto P.

Solución:

1.

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2,-3,1) \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-2,-3,1) \\ P_r(0,-1,-1) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{P_rP} = (1,1,0) - (0,-1,-1) = (1,2,1)$$

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_rP} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \right|}{|(-2,-3,1)|} = \frac{|(5,-3,1)|}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{35}{14}} = 1,58u$$

2.

$$\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r} = (-2, -3, 1) \\ P(1, 1, 0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : -2x - 3y + z + \lambda = 0$$

$$-2 - 3 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 5 \Longrightarrow 2x + 3y - z - 5 = 0$$