Problema 1 *(6 puntos).* Sean las rectas

$$r: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1} \quad s:\left\{\begin{array}{l} x=1-\lambda\\ y=2\\ z=1+\lambda\end{array}\right.$$

se pide:

1. Estudiar la posición de ambas rectas.
2. Distancia que las separa.
3. Encontrar una recta perpendicular a ambas y que las corta.
4. Encontrar una recta que pasa por el punto $P(1,1,0)$ y corta a ambas rectas.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(2,1,-1)\\ P_r(1,0,1)\end{array}\right. \qquad s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(-1,0,1)\\ P_s(1,2,1)\end{array}\right.$$

1. Construimos el vector $\overrightarrow{P_rP_s}=(0,2,0)$:

$$\left|\begin{array}{rrr} 0 & 2 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{array}\right| = -2\neq 0 \Longrightarrow \text{se cruzan}$$

2.

$$d(r,s)=\frac{|[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\ u$$

$$\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\left|\begin{array}{rrr} i & j & k\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{array}\right|=(1,-1,1)$$

3.

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=(1,-1,1)\\ \overrightarrow{u_r}=(3,1,-1)\\ P_r(1,0,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi_1:\left|\begin{array}{rrr} 1 & 3 & x-1\\ -1 & 1 & y\\ 1 & -1 & z-1\end{array}\right|=0\Longrightarrow y+z-1=0$$

$$\pi_2:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=(1,-1,1)\\ \overrightarrow{u_s}=(-1,0,1)\\ P_s(1,2,1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi_2:\left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & x-1\\ -1 & 0 & y-2\\ 1 & 1 & z-1\end{array}\right|=0\Longrightarrow x+2y+z-6=0$$

$$t:\left\{\begin{array}{r} y+z-1=0\\ x+2y+z-6=0\end{array}\right.$$

4.

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{PP_r} = (0,-1,1) \\ \overrightarrow{u_r} = (2,1,-1) \\ P_r(1,1,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 0 & 2 & x-1 \\ -1 & 1 & y-1 \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow y+z-1=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{PP_s} = (0,1,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1,0,1) \\ P_s(1,1,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} 0 & -1 & x-1 \\ 1 & 0 & y-1 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x-y+z=0$$

$$t : \begin{cases} y+z-1=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

Problema 2 *(4 puntos).* Se pide:

1. Dado el punto $P(1,1,1)$, encontrar su punto simétrico respecto al plano $\pi : x-2y-z-1=0$
2. Calcular el punto simétrico del origen de coordenadas respecto de la recta
$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{1}$$

Solución:

1. Seguimos el siguiente procedimiento:
   - Calculamos una recta t perpendicular a π que pase por P:
   $$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (1,-2,-1) \\ P_t(1,1,1) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-2\lambda \\ y = 1-\lambda \end{cases}$$
   - Calculamos el punto P' de corte de t con π:
   $$(1+\lambda) - 2(1-2\lambda) - (1-\lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{2} \Longrightarrow P'\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$
   - El punto P' es el punto medio entre P'' (el simétrico que buscamos) y P:
   $$\frac{P+P''}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P = 2\,(3,0,1) - (1,1,1) = (2,-1,0)$$
2. Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos un plano π perpendicular a r que pase por $O(0,0,0)$:

$$\pi : x + z + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \pi : x + z = 0$$

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,0,1) \\ P_r(1,0,-1) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto P' de corte de r con π:

$$(1+\lambda) + (-1+\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow (1,0,-1)$$

- El punto P' es el punto medio entre P'' (el simétrico que buscamos) y P:

$$\frac{P + P''}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P = 2\,(2,0,-2) - (0,0,0) = (2,0,-2)$$