Problema 1 *(8 puntos).* Dados la recta $r : \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{1}$ y el plano $\pi : x + y + z - 2 = 0$ se pide:

1. Un plano perpendicular a π que contenga a r
2. Una recta recta perpendicular a π que pase por el origen de coordenadas.
3. Ángulo que forman r y π.
4. Ángulo que forma π con $\pi' : 2x - y + 3z - 1 = 0$
5. Distancia del punto $P(3, -1, 5)$ a la recta r.
6. Los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas y el volumen del tetraedro que forma con estos puntos y el origen de coordenadas.
7. La altura sobre la base formada con los tres puntos de corte calculados en el apartado anterior.
8. Encontrar un plano paralelo a π que esté a una distancia de 5 unidades de él.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 2, 1) \\ P_r(-1, 0, 1) \end{cases} \qquad \overrightarrow{u_\pi} = (1, 1, 1)$$

1.

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{u_r} = (-1, 2, 1) \\ P_r(-1, 0, 1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & -1 & x+1 \\ 1 & 2 & y \\ 1 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x + 2y - 3z + 4 = 0$$

2.

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = (1, 1, 1) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$$

3. $\overrightarrow{u_\pi} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{u_r} = (-1, 2, 1)$

$$\sin\alpha = \frac{2}{3\sqrt{2}} \Longrightarrow \alpha = 28^{\text{o}}7'32''$$

4. $\overrightarrow{u_\pi} = (1,1,1)$ y $\overrightarrow{u_{\pi'}} = (2,-1,3)$

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{3}\sqrt{14}} \Longrightarrow \alpha = 51^{\circ}53'13''$$

5. $\overrightarrow{P_rP} = (4,-1,4)$

$$d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{P_rP}\times\overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \sqrt{\frac{97}{3}}\ u$$

$$|\overrightarrow{P_rP}\times\overrightarrow{u_r}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}| = |(-9,-8,7)| = \sqrt{194}$$

6. Con OX hacemos $y=0$ y $z=0 \Longrightarrow A(2,0,0) \Longrightarrow \overrightarrow{OA} = (2,0,0)$

   Con OY hacemos $x=0$ y $z=0 \Longrightarrow B(0,2,0) \Longrightarrow \overrightarrow{OB} = (0,2,0)$

   Con OZ hacemos $x=0$ y $y=0 \Longrightarrow C(0,0,2) \Longrightarrow \overrightarrow{OC} = (0,0,2)$

$$V = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}| = \frac{4}{3}\ u$$

7.
$$d(O,\pi) = \frac{|-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ u$$

8.
$$d(P,\pi) = \frac{|x+y+z-2|}{\sqrt{3}} = 5$$

$$x+y+z-2 = 5\sqrt{3} \Longrightarrow x+y+z-2-5\sqrt{3} = 0$$
$$x+y+z-2 = -5\sqrt{3} \Longrightarrow x+y+z-2+5\sqrt{3} = 0$$

Problema 2 *(2 puntos).* Se pide:

1. ¿Son coplanarios los puntos $A(3,-1,5)$, $B(2,2,5)$, $C(3,1,-2)$ y $D(5,1,3)$?
2. Calcular λ para que los vectores $\overrightarrow{u} = (\lambda-1,\lambda,3)$, $\overrightarrow{v} = (\lambda-1,-1,2)$ y $\overrightarrow{w} = (-1,2\lambda,-1)$ sean linealmente dependientes.

Solución:

1. $\overrightarrow{AB} = (-1, 3, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 2, -7)$ y $\overrightarrow{AD} = (2, 2, -2)$:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -7 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -52 \neq 0$$

Los puntos no son coplanarios

2.
$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & \lambda & 0 \\ \lambda - 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2\lambda & -1 \end{vmatrix} = 3\lambda - 4\lambda - 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2, \;\; \lambda = -\frac{2}{3}$$

Si $\lambda = 2$ o $\lambda = -2/3$ los vectores son linealmente dependientes.

Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -2/3$ los vectores son linealmente independientes.