Problema 1 Dadas las rectas

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{-1}, \quad s : \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + z - 1 = 0 \\ x + y + z + 3 = 0 \end{array} \right.$$

Se pide determinar una recta t que corte a ambas y pase por el punto $P(1, -1, 2)$.

Solución:

t se obtiene como la intersección de dos planos π_1 y π_2.

$$\overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{rrr} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = (-2, -1, 3) \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-2, -1, 3) \\ P_s(0, -2, -1) \end{array} \right.$$

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1, 0, -1) \\ P_r(1, 1, 0) \end{array} \right.$$

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 0, -1) \\ \overrightarrow{P_rP} = (0, 2, -2) \\ P_r(1, 1, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \left| \begin{array}{rrc} 1 & 0 & x-1 \\ 0 & 2 & y-1 \\ -1 & -2 & z \end{array} \right| = 0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-2, -1, 3) \\ \overrightarrow{P_sP} = (1, 1, 3) \\ P_s(0, -2, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \left| \begin{array}{rrc} -2 & 1 & x \\ -1 & 1 & y+2 \\ 3 & 3 & z+1 \end{array} \right| = 0$$

$$t : \left\{ \begin{array}{rrrl} x+ & y+ & z & -2 = 0 \\ 6x- & 9y+ & z & +17 = 0 \end{array} \right.$$

Problema 2 Dado el punto $P(1, -1, 2)$ y la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{array} \right.$, se pide calcular el punto simétrico de P respecto de r y la distancia de P a r.

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 1) \\ P_r(1, 0, 2) \end{array} \right. \Longrightarrow -x + y + z + \lambda = 0 \Longrightarrow -1 - 1 + 2 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$$

$$\pi : x - y - z = 0$$

La recta r y el plano π se cortan en un punto P'

$$1 - \lambda - \lambda - (2 + \lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$$

www.yoquieroaprobar.es

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3} \\ \\ y = -\dfrac{1}{3} \\ \\ z = 2 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{3} \end{array}\right. \Longrightarrow P'\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

El punto simétrico que buscamos P'' tiene que cumplir

$$\frac{P'' + P}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

La distancia del punto P a la recta r la podemos calcular de dos maneras

- $$d(P, r) = d(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = \left|\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)\right| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

- $$\overrightarrow{P_rP} = (0, -1, 0), \quad |\overrightarrow{P_rP} \times \overrightarrow{u_r}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}| = |(-1, 0, -1)| = \sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{u_r}| = \sqrt{3} \Longrightarrow d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{P_rP} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

www.yoquieroaprobar.es