**Problema 1** (5 puntos). Dadas las rectas

$$r: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}, \quad s: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$$

se pide:

1. (1 punto). Estudiar su posición relativa.
2. (1 punto). Calcular la distancia que las separa.
3. (1,5 puntos). Encontrar una recta perpendicular a ellas y que las corte.
4. (1,5 puntos). Encontrar una recta que pasa por el origen de coordenadas y corta a ambas rectas.

Solución:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1, 2, 3) \\ P_r(1, 0, 1) \end{array} \right. \qquad s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2, -1, 1) \\ P_s(0, 1, 0) \end{array} \right.$$

1. Construimos el vector $\overrightarrow{P_sP_r} = (1, -1, 1)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Longrightarrow \text{se cruzan}$$

2.

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (5, 7, -3)$$

$$d(r, s) = \frac{\left| \left[ \overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s} \right] \right|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{|-5|}{\sqrt{83}} = \frac{5}{\sqrt{83}}\ u$$

3.

$$\pi_1: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (5, 7, -3) \\ \overrightarrow{u_r} = (-1, 2, 3) \\ P_r(1, 0, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1: \begin{vmatrix} 5 & -1 & x-1 \\ 7 & 2 & y \\ -3 & 3 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 27x - 12y + 17z - 44 = 0$$

$$\pi_2: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (5, 7, -3) \\ \overrightarrow{u_s} = (2, -1, 1) \\ P_s(0, 1, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_2: \begin{vmatrix} 5 & 2 & x \\ 7 & -1 & y-1 \\ -3 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 4x - 11y - 19z + 11 = 0$$

$$t: \left\{ \begin{array}{l} 27x - 12y + 17z - 44 = 0 \\ 4x - 11y - 19z + 11 = 0 \end{array} \right.$$

4.

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{PP_r} = (1,0,1) \\ \overrightarrow{u_r} = (-1,2,3) \\ P_r(1,0,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 1 & -1 & x-1 \\ 0 & 2 & y \\ 1 & 3 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x+2y-z=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{P_sP} = (0,1,0) \\ \overrightarrow{u_s} = (2,-1,1) \\ P_s(0,1,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} 0 & 2 & x \\ 1 & -1 & y-1 \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x-2z=0$$

$$t : \begin{cases} x+2y-z=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$$

**Problema 2** (3 puntos). Dado el plano $\pi : x-3y+2z-1=0$ y la recta

$$r : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$$

se pide:

1. (1 punto). Estudiar su posición relativa y ángulos que forman.
2. (1 punto). Encontrar un plano perpendicular a $\pi$ que contenga a $r$.
3. (1 punto). Calcular la proyección ortogonal de $r$ sobre $\pi$.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,2,3) \\ P_r(-1,1,0) \end{cases} \qquad \overrightarrow{u_\pi} = (1,-3,2)$$

1.

$$r : \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \Longrightarrow (-1+\lambda)-3(1+2\lambda)+2(3\lambda)-1=0 \Longrightarrow \lambda = 5$$

Luego la recta $r$ y el plano $\pi$ se cortan en el punto $(4,11,15)$.

$$\sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_\pi}|}{|\overrightarrow{u_r}|\cdot|\overrightarrow{u_\pi}|} = \frac{1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \frac{1}{14} \Longrightarrow \alpha = 4^{o}5'46''$$

2. Sea el plano $\pi'$ el plano que buscamos:

$$\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,2,3) \\ \overrightarrow{u_\pi} = (1,-3,2) \\ P_r(-1,1,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x+1 \\ 2 & -3 & y-1 \\ 3 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 13x+y-5z+12=0$$

3. La proyección ortogonal de $r$ sobre $\pi$ se encuentra como intersección de dos planos:

$$t: \left\{ \begin{array}{l} 13x + y - 5z + 12 = 0 \\ x - 3y + 2z - 1 = 0 \end{array} \right.$$

**Problema 3** (2 puntos). Dado el plano $\pi : x + y - 2z + 2 = 0$, se pide:

1. (1 punto). Calcular una recta perpendicular a $\pi$ que pase por el punto $P(1, 1, 2)$.

2. (1 punto). Calcular un plano paralelo a $\pi$ contenga a $P$.

Solución:

1. $$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, 1, -2) \\ P_r(1, 1, 2) \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{array} \right.$$

2. $$x + y - 2z + \lambda = 0 \Longrightarrow 1 + 1 - 4 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 2$$

   El plano buscado es él mismo, dado que el punto $P$ está contenido en el plano.