**Problema 1** Se pide:

1. Estudia la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$, $\lambda \in R$, y el plano de ecuación general $\pi \equiv 2x - y + 3z = 6$.
2. Encuentra la ecuación general del plano $\pi'$ perpendicular a $\pi$ que contenga a $r$.
3. Calcula la proyección ortogonal de $r$ sobre $\pi$.

**Solución:**

1. $-2\lambda + 3 + 3\lambda = 6 \Longrightarrow \lambda = 3 \neq 0 \Longrightarrow$ se cortan en el punto $(-3, 0, 4)$
2. $$\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{\pi} = (2, -1, 3) \\ \overrightarrow{u_r} = (-1, 0, 1) \\ P_r(0, 0, 1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} 2 & -1 & x \\ -1 & 0 & y \\ 3 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x+5y+z-1 = 0$$
3. $$t : \begin{cases} 2x - y + 3z = 6 \\ x + 5y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

**Problema 2** Dado el plano $\pi \equiv x + z = 4$ y el punto $P(1, 1, 0)$, se pide:

1. Encuentra la ecuación general del plano $\pi'$ paralelo a $\pi$ que pasa por $P$.
2. Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta $r$ perpendicular a $\pi$ que pasa por $P$

**Solución:**

1. $\pi' \equiv x + z + \lambda = 0 \Longrightarrow 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$:
$$\pi \equiv x + z - 1 = 0$$
2. $$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 0, 1) \\ P_r(1, 1, 0) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$$

**Problema 3** Dadas las rectas $s \equiv \dfrac{x-1}{3} = y = \dfrac{z-1}{2}$ y $t \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ 2y - z = 4 \end{array} \right.$ , se pide hallar la perpendicular común a $s$ y a $t$ y la distancia que las separa.
**Solución:**

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (3,1,2) \\ P_s(1,0,1) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (1,2,4) \\ P_t(0,0,-4) \end{array} \right.$$

Construimos el vector $\overrightarrow{P_sP_t} = (-1,0,-5)$:

$$\left| \begin{array}{rrr} -1 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \right| = -25 \neq 0 \Longrightarrow \text{ se cruzan}$$

$$d(s,t) = \frac{|[\overrightarrow{P_sP_t}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{u_t}]|}{|\overrightarrow{u_s} \times \overrightarrow{u_t}|} = 5\sqrt{5}\ u$$

$$\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_s} \times \overrightarrow{u_t} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \right| = (0,-2,1)$$

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (0,-2,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (3,1,2) \\ P_s(1,0,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \left| \begin{array}{rrr} 0 & 3 & x-1 \\ -2 & 1 & y \\ 1 & 2 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 5x - 3y - 6z + 1 = 0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (0,-2,1) \\ \overrightarrow{u_t} = (1,2,4) \\ P_t(0,0,-4) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_2 : \left| \begin{array}{rrr} 0 & -1 & x \\ -2 & 2 & y \\ 1 & 4 & z+4 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 10x + y + 2z + 8 = 0$$

$$r : \left\{ \begin{array}{l} 5x - 3y - 6z + 1 = 0 \\ 10x + y + 2z + 8 = 0 \end{array} \right.$$

**Problema 4** Se consideran las rectas $r$ y $s$ dadas por las ecuaciones:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{array} \right. , \quad s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{a}$$

1. Hallar el valor del parámetro $a$ para que $r$ y $s$ sean perpendiculares.
2. Hallar la recta $t$ paralela a $r$ y que pasa por el punto de $s$ cuya coordenada $z$ es 0.

**Solución**