Problema 1 *(6 puntos)*. Sean el plano $\pi : x - 2y + 3z - 4 = 0$ y la recta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{1}$
se pide:

a) Encontrar una recta s perpendicular a π que pase por el punto $P(3, 1, 1)$.

b) Encontrar una recta t paralela a r que pase por P.

c) Encontrar un plano π' paralelo a π que contenga a P

d) Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π. En el caso de que se corten, calcular el punto de corte y el ángulo que forman.

e) Encontrar un plano π'' perpendicular a π que contenga a r.

f) Encontrar la recta h que es proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

Solución:

$$\pi : \overrightarrow{u_\pi} = (1, -2, 3), \quad r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2, -1, 1) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases}$$

a)

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, -2, 3) \\ P_s = P(3, 1, 1) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$$

b)

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} = (2, -1, 1) \\ P_t = P(3, 1, 1) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

c)

$$\pi' : x - 2y + 3z + \lambda = 0 \Longrightarrow 3 - 2 + 3 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -4$$

$$\pi' : x - 2y + 3z - 4 = 0 \Longrightarrow P \in \pi$$

d)

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \Longrightarrow (1+2\lambda) - 2(-\lambda) + 3(-1+\lambda) - 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{6}{7}$$

Luego la recta r y el plano π se cortan en el punto $\left(\dfrac{19}{7},-\dfrac{6}{7},-\dfrac{1}{7}\right)$.

El ángulo que forman será $\beta = 90^{\text{o}} - \alpha$ donde α es el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{u_\pi} = (1,-2,3)$ y $\overrightarrow{u_r} = (2,-1,1)$:

$$\sin\beta = \frac{\overrightarrow{u_\pi}\cdot\overrightarrow{u_r}}{|\overrightarrow{u_\pi}|\cdot|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}} \Longrightarrow \beta = 49^{\text{o}}47'49''$$

e)

$$\pi'' : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (1,-2,3) \\ \overrightarrow{u_r} = (2,-1,1) \\ P_r(1,0,-1) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi'' : \left|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & x-1 \\ -2 & -1 & y \\ 3 & 1 & z+1 \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow x+5y+3z+2=0$$

f)

$$h : \left\{\begin{array}{l} x-2y+3z-4=0 \\ x+5y+3z+2=0 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(4 puntos)*. Sean las rectas

$$r : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}, \quad s : \left\{\begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de r y s.

b) Calcular la distancia que las separa.

c) Calcular la distancia del punto $P(3,-1,1)$ a la recta r.

d) La recta s y el punto $H(2,1,1)$ determinan un plano π, calcular la distancia de P a π.

Solución:

a)

$$r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,2) \\ P_r(-2,1,0) \end{array}\right. \quad s : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,-1,0) \\ P_s(1,0,1) \end{array}\right. , \quad \overrightarrow{P_sP_r} = (-3,1,-1)$$

$$[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \left|\begin{array}{rrr} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

b)

$$d(r,s)=\frac{|[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ u$$

$$|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=|2(1,1,-1)|=2\sqrt{3}$$

c) $P(3,-1,1)$, $P_r(-2,1,0)$, $\overrightarrow{P_rP}=(5,-2,1)$

$$d(P,r)=\frac{|\overrightarrow{P_rP}\times\overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}=\frac{\sqrt{155}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{155}{6}}\ u$$

$$|\overrightarrow{P_rP}\times\overrightarrow{u_r}|=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 5 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=|(-5,-9,7)|=\sqrt{155}$$

d)

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(1,-1,0)\\ \overrightarrow{P_sH}=(1,1,0)\\ H(2,1,1)\end{array}\right.\Longrightarrow \pi:\begin{vmatrix} 1 & 1 & x-2\\ -1 & 1 & y-1\\ 0 & 0 & z-1\end{vmatrix}=0\Longrightarrow z-1=0$$

$$d(P,\pi)=\frac{|1-1|}{\sqrt{1}}=0\ u\Longrightarrow P\in\pi$$