Problema 1 *(6 puntos).* Sean el plano $\pi: 2x-y+3z-1=0$ y la recta $r: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$
se pide:

1. Encontrar una recta s perpendicular a π que pase por el punto $P(3,0,1)$.
2. Encontrar una recta t paralela a r que pase por P.
3. Encontrar un plano π' paralelo a π que contenga a P
4. Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π. En el caso de que se corten, calcular el punto de corte y el ángulo que forman.
5. Encontrar un plano π'' perpendicular a π que contenga a r.
6. Encontrar la recta h que es proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

Solución:

$$\pi: \overrightarrow{u_\pi}=(2,-1,3), \quad r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(1,-1,1) \\ P_r(1,0,-1) \end{cases}$$

1.
$$s: \begin{cases} \overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{u_\pi}=(2,-1,3) \\ P_s=P(3,0,1) \end{cases} \Longrightarrow s: \begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=-\lambda \\ z=1+3\lambda \end{cases}$$

2.
$$t: \begin{cases} \overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}=(1,-1,1) \\ P_t=P(3,0,1) \end{cases} \Longrightarrow s: \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$$

3.
$$\pi': 2x-y+3z+\lambda=0 \Longrightarrow 6-0+3+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-9$$
$$\pi': 2x-y+3z-9=0 \Longrightarrow P\in\pi$$

4.
$$r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases} \Longrightarrow 2(1+\lambda)-(-\lambda)+3(-1+\lambda)-1=0 \Longrightarrow \lambda=\frac{1}{3}$$

Luego la recta r y el plano π se cortan en el punto $\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

El ángulo que forman será $\beta = 90^{\circ} - \alpha$ donde α es el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{u_\pi} = (2, -1, 3)$ y $\overrightarrow{u_r} = (1, -1, 1)$:

$$\sin\beta = \frac{\overrightarrow{u_\pi} \cdot \overrightarrow{u_r}}{|\overrightarrow{u_\pi}| \cdot |\overrightarrow{u_r}|} = \frac{6}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{14}} \Longrightarrow \beta = 67^{\circ}47'43''$$

5.

$$\pi'' : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = (2, -1, 3) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, -1, 1) \\ P_r(1, 0, -1) \end{cases} \Longrightarrow \pi'' : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x-1 \\ -1 & -1 & y \\ 3 & 1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x+y-z-3 = 0$$

6.

$$h : \begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ 2x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

Problema 2 *(4 puntos).* Sean las rectas

$$r : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}, \quad s : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

Se pide:

1. Estudiar la posición relativa de r y s.
2. Calcular la distancia que las separa.
3. Calcular la distancia del punto $P(0, 1, 3)$ a la recta r.
4. La recta s y el punto $H(-1, 1, 2)$ determinan un plano π, calcular la distancia de P a π.

Solución:

1.

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ P_r(2, 1, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (-1, 1, 0) \\ P_s(1, 0, 2) \end{cases} \quad , \quad \overrightarrow{P_sP_r} = (1, 1, -2)$$

$$[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

2.

$$d(r,s)=\frac{|[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{8\sqrt{11}}{11}\ u$$

$$|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=\left|\begin{array}{rrr} i & j & k\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{array}\right|=|(-1,-1,3)|=\sqrt{11}$$

3. $P(0,1,3),\ P_r(2,1,0),\ \overrightarrow{P_rP}=(-2,0,3)$

$$d(P,r)=\frac{|\overrightarrow{P_rP}\times\overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}=\frac{\sqrt{77}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{77}{6}}\ u$$

$$|\overrightarrow{P_rP}\times\overrightarrow{u_r}|=\left|\begin{array}{rrr} i & j & k\\ -2 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{array}\right|=|(-6,5,-4)|=\sqrt{77}$$

4.

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(-1,1,0)\\ \overrightarrow{P_sH}=(-2,1,0)\\ P_s(1,0,2)\end{array}\right.\Longrightarrow\pi:\left|\begin{array}{ccc}-1 & -2 & x-1\\ 1 & 1 & y\\ 0 & 0 & z-2\end{array}\right|=0\Longrightarrow z-2=0$$

$$P(0,1,3)\Longrightarrow d(P,\pi)=\frac{|3-2|}{\sqrt{1}}=1\ u$$