Problema 1 *(4 puntos).* Dados el punto $P(1,-1,2)$ y el plano $\pi: 2x-y+z=11$, se pide:

1. (2 puntos). Determinar el punto Q de intersección del plano π con la recta perpendicular a π que pasa por P. Hallar el punto simétrico del punto P respecto del plano π.

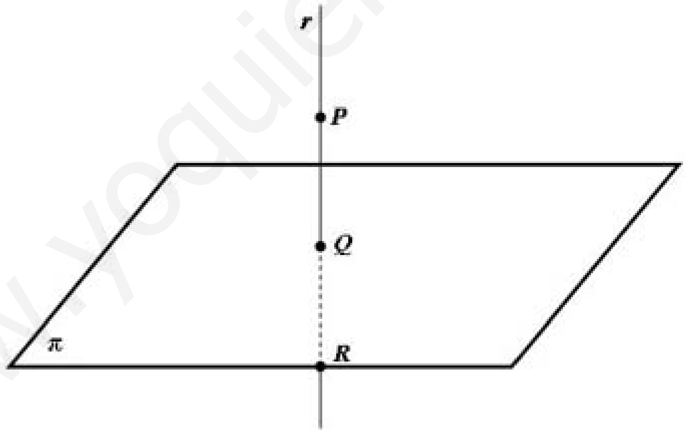
2. (2 puntos). Obtener la ecuación del plano paralelo al plano π que contiene al punto H que se encuentra a $5\sqrt{6}$ unidades del punto P en el sentido del vector $\overrightarrow{PQ}$.

Solución:

1. Tenemos

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (2,-1,1) \\ P_r = P(1,-1,2) \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = -1-\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases}$$

Sustituyendo en el plano tenemos



$$2(1+2\lambda) - (-1-\lambda) + (2+\lambda) - 11 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$$

Sustituyendo este valor en r tenemos $Q(3,-2,3)$.

El punto Q es el punto medio entre P y el punto R que buscamos

$$Q = \frac{P+R}{2} \Longrightarrow R = 2Q - P = 2(3,-2,3) - (1,-1,2) = (5,-3,4)$$

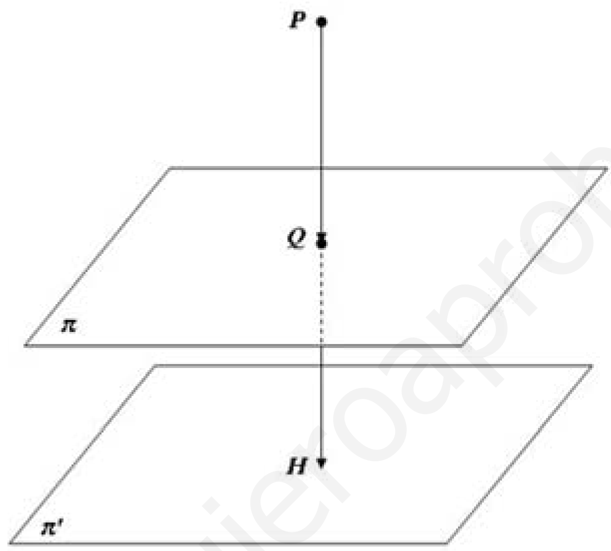
Luego $R(5,-3,4)$ es el punto simétrico de P respecto del plano π.

2. El vector $\overrightarrow{PQ} = (2, -1, 1) = \overrightarrow{u_\pi}$ y es perpedicular al plano π. Tenemos

$$H = P + \lambda \cdot \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{PH} = -\lambda \cdot \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow$$

$$|\overrightarrow{PH}| = \lambda|\overrightarrow{u_\pi}| = \lambda\sqrt{6} = 5\sqrt{6} \Longrightarrow \lambda = 5$$

Luego el punto $H = (1, -1, 2) + 5(2, -1, 1) = (11, -6, 7)$. El plano π' que buscamos contiene a este punto y tiene el mismo vector característico que π



$\pi' : 2x - y + z = \lambda \Longrightarrow 22 + 6 + 7 = \lambda \Longrightarrow \lambda = 35 \Longrightarrow 2x - y + z = 35$

Nota: Podemos comprobar si $d(P, \pi') = 5\sqrt{6}$:

$$d(P, \pi') = \frac{|2 + 1 + 2 - 35|}{\sqrt{6}} = \frac{30}{\sqrt{6}} = 5\sqrt{6}$$

y también podemos comprobar que

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6} \text{ y } |\overrightarrow{QH}| = \sqrt{64 + 16 + 16} = 4\sqrt{6}$$

La suma de ambos módulos nos vuelve a dar $5\sqrt{6}$.

Problema 2 *(3 puntos)* Dados el plano $\pi : x + 2y - z = 2$, la recta:

$$r : \frac{x - 3}{2} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 5}{4}$$

y el punto $P(-2, 3, 2)$, perteneciente al plano π, se pide:

1. (1 punto). Determinar la posición relativa de π y r.

2. (1 punto). Calcular la ecuación de la recta t contenida en π, que pasa por el punto P y que corta perpendicularmente a r.

3. (1 punto). Sea Q el punto intersección de r y t. Si s es la recta perpendicular al plano π y que contiene a P, y R es un punto cualquiera de s, probar que la recta determinada por R y Q es perpendicular a r.

Solución:

1. De dos formas difrentes:

   - La ecuación de la recta en paramétricas es $r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{cases}$, y si sustituimos en el plano π tenemos:

     $$(3 + 2\lambda) + 2(2 + \lambda) - (5 + 4\lambda) = 2 \Longrightarrow 2 = 2$$

     expresión que se cumple para cualquier punto de la recta independientemente del valor de λ y, por tanto, la recta r está contenida en el plano π.

   - Ponemos la recta r como intersección de dos planos:

     $$\frac{x-3}{2} = \frac{z-5}{4} \Longrightarrow 2x - z = 1$$

     $$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} \Longrightarrow x - 2y = -1$$

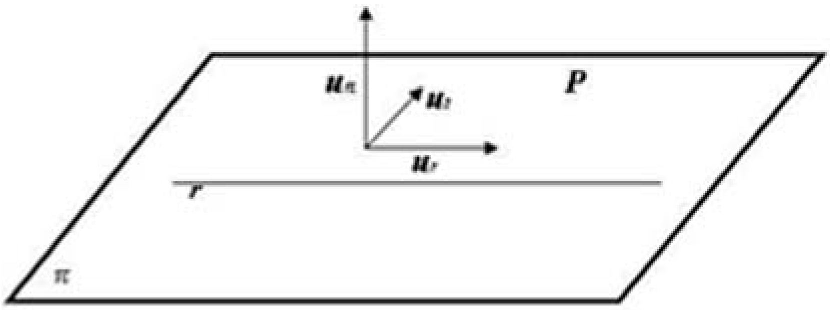
     Ahora estudiamos el sistema formado por estos dos planos y el plano π

     $$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x - 2y = -1 \\ 2x - z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

     $$\left.\begin{array}{c} |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 \\ \\ F_3 = F_1 + F_2 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

     Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

     El plano π y la recta r tienen infinitos puntos comunes y, por tanto, la recta está contenida en el plano.



2. Para que el enuciado tenga sentido es necesario que el punto P esté en el plano π, basta sustituir el punto en el plano para comprobarlo.

   El vector $\overrightarrow{u_t}$ de la recta t que buscamos tiene que ser perpendicular al vector característico del plano $\overrightarrow{u_\pi} = (1, 2, -1)$ y al vector director $\overrightarrow{u_r} = (2, 1, 4)$ de la recta r. Luego:

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} \times \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3(3, -2, -1)$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (3, -2, -1) \\ P(-2, 3, 2) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$$

   Evidentemente esta recta tiene que estar contenida en el plano π.

3. La situación geométrica es la siguiente:

   Tenemos que encontrar una recta s perpendicular al plano π y que pase por el punto P

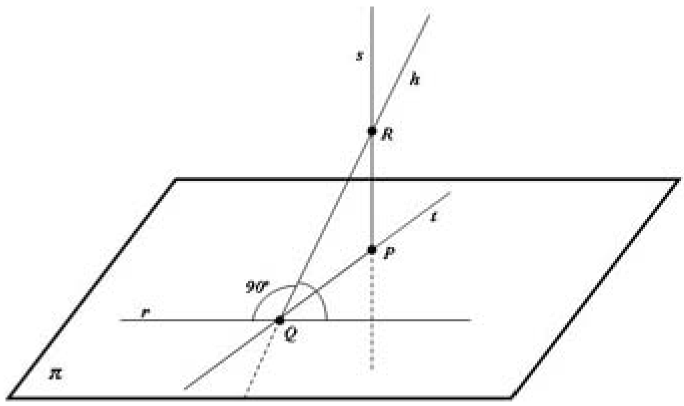
$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (1, 2, -1) \\ P(-2, 3, 2) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{array} \right.$$

   Un punto cualquiera R de la recta s es $R(-2 + \lambda, 3 + 2\lambda, 2 - \lambda)$.

   Ahora buscamos el punto de corte Q entre las rectas t y r

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{array} \right. , \quad t : \left\{ \begin{array}{l} x = -2 + 3\mu \\ y = 3 - 2\mu \\ z = 2 - \mu \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 + 2\lambda = -2 + 3\mu \\ 2 + \lambda = 3 - 2\mu \\ 5 + 4\lambda = 2 - \mu \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow Q(1, 1, 1)$$



Sólo nos queda por comprobar que los vectores $\overrightarrow{QR} = (-3+\lambda, 2+2\lambda, 1-\lambda)$ y $\overrightarrow{u_r} = (2,1,4)$ son siempre perpendiculares. Para ello calculamos su producto escalar y debe de ser cero independientemente del valor del parámetro λ

$$\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{u_r} = (-3+\lambda, 2+2\lambda, 1-\lambda)\cdot(2,1,4) = -6+2\lambda+2+2\lambda+4-4\lambda = 0$$

Luego la recta h que pasa por los puntos Q y R es siempre perpendicular a la recta r sea cual sea el punto R que tomemos de la recta s.

Problema 3 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}, \quad s : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$$

hallar la ecuación de la recta t perpendicular común a ambas y las corta.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,3) \\ P_r(-1,2,0) \end{array} \right. , \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2,3,4) \\ P_s(0,1,0) \end{array} \right.$$

$$u_t = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{array} \right| = (-1,2,-1)$$

Obtengo la recta t como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (-1,2,-1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,2,3) \\ P_r(-1,2,0) \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (-1,2,-1) \\ \overrightarrow{u_s} = (2,3,4) \\ P_s(0,1,0) \end{array} \right.$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x+1 \\ 2 & 2 & y-2 \\ -1 & 3 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 4x + y - 2z + 2 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} -1 & 2 & x \\ 2 & 3 & y-1 \\ -1 & 4 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 11x + 2y - 7z - 2 = 0$$

$$t : \begin{cases} 4x + y - 2z + 2 = 0 \\ 11x + 2y - 7z - 2 = 0 \end{cases}$$