Problema 1 Estudiar la posición que ocupan los planos siguientes para los diferentes valores que pueda tomar el parámetro m.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} (m-1)x+ & 3y- & z- & 1=0 \\ x+ & y- & (m-1)z+ & 3=0 \\ mx+ & 2y- & mz+ & 9=0 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} m-1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -m+1 & 3 \\ m & 2 & -m & 9 \end{array}\right)$$

$$|A|=-2m(m-2)=0 \Longrightarrow m=0,\;\; m=2$$

Si $m\neq 0$ y $m\neq 2 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A})$ $=3=$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas, luego en este caso sería un sistema compatible determinado y, por tanto, los tres planos se cortan en un punto.

Si $m=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

Como $|A|=0$ y el menor $\left|\begin{array}{rr} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{array}\right|=-4\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=2$.

Como $\left|\begin{array}{rrr} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 9 \end{array}\right|=32\neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})=3$.

Es decir, Rango$(\overline{A})$ $\neq$Rango(A) y el sistema es incompatible. Estudiamos ahora la posición de estos planos dos a dos.

$$\pi_1,\;\; \pi_2:\; \frac{-1}{1}\neq\frac{3}{1}\Longrightarrow \text{se cortan}$$

$$\pi_1,\;\; \pi_3:\; \frac{-1}{0}\neq\frac{3}{2}\Longrightarrow \text{se cortan}$$

$$\pi_2,\;\; \pi_3:\; \frac{1}{0}\neq\frac{1}{2}\Longrightarrow \text{se cortan}$$

Los planos se cortan dos a dos en rectas, pero sin puntos comunes a los tres.

Si $m = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 9 \end{array} \right)$$

Como $|A| = 0$ y el menor $\left| \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{array} \right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 2$.

Como $\left| \begin{array}{ccc} 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 9 \end{array} \right| = -6 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3$.

Es decir, Rango$(\overline{A})$ $\neq$Rango(A) y el sistema es incompatible. Estudiamos ahora la posición de estos planos dos a dos.

$$\pi_1,\ \ \pi_2 : \ \frac{1}{1} \neq \frac{3}{1} \Longrightarrow \text{ se cortan}$$

$$\pi_1,\ \ \pi_3 : \ \frac{1}{2} \neq \frac{3}{2} \Longrightarrow \text{ se cortan}$$

$$\pi_2,\ \ \pi_3 : \ \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{9} \Longrightarrow \text{ son paralelos}$$

Los planos π_2 y π_3 son paralelos y el plano π_1 corta a los dos.

Problema 2 Estudiar la posición relativa que ocupan el plano y la recta siguientes:

$$\pi : 3x - y - 5z - 8 = 0, \qquad r : \left\{ \begin{array}{rrrr} 3x+ & y- & z- & 1 = 0 \\ x+ & y+ & z+ & 2 = 0 \end{array} \right.$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & -5 & -8 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$|A| = 0, \quad \left| \begin{array}{rr} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{array} \right| = 6 \neq 0 \Longrightarrow \text{ Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = \left| \begin{array}{rrr} 3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = 0, \quad |A_2| = \left| \begin{array}{rrr} 3 & -5 & -8 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right| = 0$$

$$|A_3| = \left| \begin{array}{rrr} 3 & -1 & -8 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right| = 0, \quad |A_4| = \left| \begin{array}{rrr} -1 & -5 & -8 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right| = 0$$

Luego Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 <$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado, es decir, la recta y el plano tiene infinitos puntos comunes, la recta está contenida en el plano.