Problema 1 (2 puntos). Encuentra el valor del parámetro m de forma que los vectores $\overrightarrow{u} = (m, 2, 3)$, $\overrightarrow{v} = (-m, 1, 2)$ y $\overrightarrow{w} = (m-1, 3, 5)$ de forma que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ sean linealmente dependientes. Encontrar la combinación lineal.

Solución:

$$\begin{vmatrix} m & 2 & 3 \\ -m & 1 & 2 \\ m-1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = m - 1 = 0 \Longrightarrow m = 1$$

Si $m = 1$ los tres vectores son LD.

La combinación lineal buscada es $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

Problema 2 (2 puntos). Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (1, -1, 3)$, $\overrightarrow{v} = (2, 0, 1)$ y $\overrightarrow{w} = (0, 1, 2)$ calcular la altura del tetraedro que determinan sobre la base definida por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

Solución:
La altura del tetredro coincide con la del paralelepípedo:

$$h = \frac{|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]|}{|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|} = \frac{9}{\sqrt{30}}\ u$$

Problema 3 (2 puntos).

1. Sean $\overrightarrow{u} = (m, m, -1)$ y $\overrightarrow{v} = (2, m, m)$. Encontrar el número real m de forma que los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ sean perpendiculares.
2. Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (3, 1, -1)$, $\overrightarrow{v} = (-1, 4, 0)$ encontrar un vector perpendicular a ellos que tenga módulo 5.

Solución:

1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 2m + m^2 - m = m(m+1) = 0 \Longrightarrow m = 0, \;\; m = -1$
2. $$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (4, 1, 13)$$
$$w = \frac{5}{\sqrt{186}}(4, 1, 13) = \left(\frac{20}{\sqrt{186}}, \frac{5}{\sqrt{186}}, \frac{65}{\sqrt{186}}\right)$$

Problema 4 (4 puntos). Dados los puntos $A(1,0,-1)$, $B(3,1,2)$ y $C(4,5,3)$ vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

1. Calcular el cuarto vértice D.
2. Sus ángulos.
3. Su centro.
4. Dividir el segmento $\overline{AC}$ en tres partes iguales.

Solución:

1. $D = A + \overrightarrow{BC} = (2, 4, -2)$
2. $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{18}$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{14}$

$$\cos\alpha = \frac{9}{\sqrt{18}\sqrt{14}} \Longrightarrow \alpha = 55^{o}27'45'', \ \ \beta = 124^{o}32'15''$$

3. $$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$$

4. $\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \left(1, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$$A_1 = A + \overrightarrow{u} = (1, 0, -1) + \left(1, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(2, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$A_2 = A_1 + \overrightarrow{u} = \left(2, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right) + \left(1, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(3, \frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

$$C = A_3 = A_2 + \overrightarrow{u} = \left(3, \frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right) + \left(1, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right) = (4, 5, 3)$$