Problema 1 Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (m, 2, -1)$, $\overrightarrow{v} = (2, m, 2)$ y $\overrightarrow{w} = (m, -4, 7)$. Calcular m de forma que los vectores sean linealmente dependientes.

Solución:

$$\begin{vmatrix} m & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ m & -4 & 7 \end{vmatrix} = 4(2m^2 + 3m - 5) = 0 \Longrightarrow m = 1, \ m = -\frac{5}{2}$$

Si $m = 1$ o $m = -5/2$ los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente dependientes.

Problema 2 Se pide:

1. Calcular m para que los vectores $\overrightarrow{u} = (1, m, -1)$ y $\overrightarrow{v} = (4m, -3, 2m+1)$ sean perpendiculares.
2. Encontrar un vector perpendicular $\overrightarrow{u} = (1, -1, 2)$ y a $\overrightarrow{v} = (2, 1, 0)$ que tenga módulo 5.
3. Decidir si los vectores $\overrightarrow{u} = (2, 1, 3)$ y $\overrightarrow{v} = (3, -9, 1)$ son perpendiculares.

Solución:

1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 4m - 3m - 2m - 1 = 0 \Longrightarrow m = -1$
2. $$\overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 4, 3) \Longrightarrow |\overrightarrow{w}| = \sqrt{29}$$
$$\overrightarrow{t} = \frac{5}{\sqrt{29}}(-2, 4, 3) = \left(\frac{-10\sqrt{29}}{29}, \frac{20\sqrt{29}}{29}, \frac{15\sqrt{29}}{29} \right)$$
3. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 6 - 9 + 3 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$

Problema 3 Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (2, -3, 1)$, $\overrightarrow{v} = (3, 1, 0)$ y $\overrightarrow{w} = (0, -1, 4)$. Calcular:

1. Volumen de paralelepípedo que determinan.

2. Área de la base determinada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y la altura del paralelogramo sobre el vector $\overrightarrow{v}$.

3. Altura del paralelepípedo.

4. Volumen del tetraedro que determinan.

5. Área de la base del tetraedro determinada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y la altura del triángulo sobre el vector $\overrightarrow{v}$.

6. Altura del tetredro.

Solución:

1.
$$V_p = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 41\ u^3$$

2.
$$S_p = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}| = |(-1, 3, 11)| = \sqrt{131}\ u^2$$

$$S_p = |\overrightarrow{v}| \cdot h_p \Longrightarrow h_p = \sqrt{\frac{131}{10}}\ u$$

3.
$$V_p = S_p \cdot H_p \Longrightarrow H_p = \frac{41\sqrt{131}}{131}\ u$$

4.
$$V_t = \frac{41}{6}\ u^3$$

5.
$$S_t = \frac{\sqrt{131}}{2}\ u^3,\ \ h_t = h_p = \sqrt{\frac{131}{10}}\ u$$

6.
$$H_t = H_p = \frac{41\sqrt{131}}{131}\ u$$

Problema 4 Sean los puntos $A(3, -2, 0)$, $B(4, -1, -2)$ y $C(8, 2, 9)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

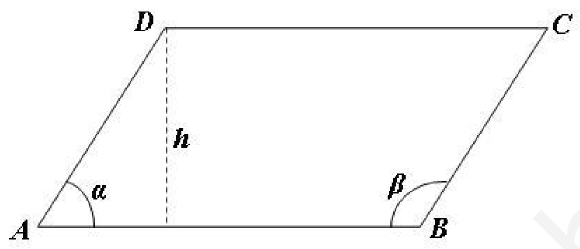
1. Encontrar el 4º vértice D.

2. Calcular la longitud de sus lados.

3. Calcular sus ángulos y su centro.

4. Calcular el punto simétrico de A respecto de C.
5. Dividir el segmento $\overline{AC}$ en tres partes iguales.

Solución



1. $D = A + \overrightarrow{BC} = (3, -2, 0) + (4, 3, 11) = (7, 1, 11)$.
2. $|\overrightarrow{AB}| = |(1, 1, -2)| = \sqrt{6}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(4, 3, 11)| = \sqrt{146}$
3. $$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|} = \frac{-15}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{146}} \Longrightarrow \alpha = 120^{\text{o}}27'4'' \text{ y } \beta = 59^{\text{o}}32'56''$$
   El centro es $M\left(\frac{11}{2}, 0, \frac{9}{2}\right)$
4. $C = \dfrac{A + A'}{2} \Longrightarrow A' = 2C - A = (13, 6, 18)$
5. $$\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 3\right)$$
   $$A_1 = A + \overrightarrow{u} = (3, -2, 0) + \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 3\right) = \left(\frac{14}{3}, -\frac{2}{3}, 3\right)$$
   $$A_2 = A_1 + \overrightarrow{u} = \left(\frac{14}{3}, -\frac{2}{3}, 3\right) + \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 3\right) = \left(\frac{19}{3}, \frac{2}{3}, 6\right)$$
   $$C = A_3 = A_2 + \overrightarrow{u} = \left(\frac{19}{3}, \frac{2}{3}, 6\right) + \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 3\right) = (8, 2, 9)$$