**Problema 1** Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (m, 3, -1)$, $\overrightarrow{v} = (2, m, 2)$ y $\overrightarrow{w} = (m, -7, 7)$. Calcular $m$ de forma que los vectores sean linealmente dependientes.

**Solución:**

$$\begin{vmatrix} m & 3 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ m & -7 & 7 \end{vmatrix} = 4(2m^2 + 5m - 7) = 0 \Longrightarrow m = 1,\ m = -\frac{7}{2}$$

Si $m = 1$ o $m = -7/2$ los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente dependientes.

**Problema 2** Se pide:

1. Calcular $m$ para que los vectores $\overrightarrow{u} = (1, m, -1)$ y $\overrightarrow{v} = (2m, -2, 2m-1)$ sean perpendiculares.
2. Encontrar un vector perpendicular $\overrightarrow{u} = (2, -1, 3)$ y a $\overrightarrow{v} = (1, 2, 0)$ que tenga módulo 5.
3. Decidir si los vectores $\overrightarrow{u} = (2, -1, -1)$ y $\overrightarrow{v} = (2, -3, 7)$ son perpendiculares.

**Solución:**

1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 2m - 2m - 2m + 1 = 0 \Longrightarrow m = 1/2$
2. $$\overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-6, 3, 5) \Longrightarrow |\overrightarrow{w}| = \sqrt{70}$$
$$\overrightarrow{t} = \frac{5}{\sqrt{70}}(-6, 3, 5) = \left( \frac{-3\sqrt{70}}{7}, \frac{3\sqrt{70}}{14}, \frac{25\sqrt{70}}{70} \right)$$
3. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 4 + 3 - 7 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$

**Problema 3** Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (2, -2, 1)$, $\overrightarrow{v} = (3, 5, 0)$ y $\overrightarrow{w} = (0, 1, 4)$. Calcular:

1. Volumen de paralelepípedo que determinan.

2. Área de la base determinada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y la altura del paralelogramo sobre el vector $\overrightarrow{v}$.
3. Altura del paralelepípedo.
4. Volumen del tetraedro que determinan.
5. Área de la base del tetraedro determinada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y la altura del triángulo sobre el vector $\overrightarrow{v}$.
6. Altura del tetredro.

**Solución:**

1.
$$V_p = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 67\ u^3$$

2.
$$S_p = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}| = |(-5, 3, 16)| = \sqrt{290}\ u^2$$

$$S_p = |\overrightarrow{v}| \cdot h_p \Longrightarrow h_p = \sqrt{\frac{290}{34}}\ u$$

3.
$$V_p = S_p \cdot H_p \Longrightarrow H_p = \frac{67\sqrt{290}}{290}\ u$$

4.
$$V_t = \frac{67}{6}\ u^3$$

5.
$$S_t = \frac{\sqrt{290}}{2}\ u^2,\ \ h_t = h_p = \sqrt{\frac{290}{34}}\ u$$

6.
$$H_t = H_p = \frac{67\sqrt{290}}{290}\ u$$

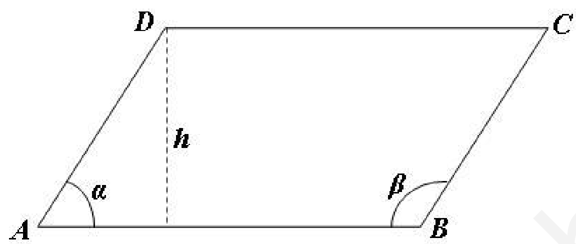
**Problema 4** Sean los puntos $A(1, -2, 0)$, $B(3, -1, 2)$ y $C(8, 3, 10)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

1. Encontrar el 4º vértice $D$.
2. Calcular la longitud de sus lados.
3. Calcular sus ángulos y su centro.

4. Calcular el punto simétrico de $A$ respecto de $C$.

5. Dividir el segmento $\overline{AC}$ en tres partes iguales.

**Solución**




1. $D = A + \overrightarrow{BC} = (1, -2, 0) + (5, 4, 8) = (6, 2, 8)$.

2. $|\overrightarrow{AB}| = |(2, 1, 2)| = 3$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(5, 4, 8)| = \sqrt{105}$

3.
$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{30}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{105}} \Longrightarrow \alpha = 12^{\circ}36'15'' \text{ y } \beta = 167^{\circ}23'45''$$

El centro es $M\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}, 5\right)$

4. $C = \dfrac{A + A'}{2} \Longrightarrow A' = 2C - A = (15, 8, 20)$

5.
$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right)$$
$$A_1 = A + \overrightarrow{u} = (1, -2, 0) + \left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{10}{3}\right)$$
$$A_2 = A_1 + \overrightarrow{u} = \left(103, -\frac{1}{3}, \frac{10}{3}\right) + \left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right) = \left(\frac{17}{3}, \frac{4}{3}, \frac{20}{3}\right)$$
$$C = A_3 = A_2 + \overrightarrow{u} = \left(\frac{17}{3}, \frac{4}{3}, \frac{20}{3}\right) + \left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right) = (8, 3, 10)$$