Problema 1 Sea la recta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ y el punto $P(0,2,3)$. Se pide:

1. Encontrar la ecuación de un plano π que contiene a P y a r.
2. Encontrar la ecuación de una recta s perpendicular a π que pase por el punto P:
3. Encontrar la ecuación de un plano paralelo a π que contenga al punto $P'(1,1,1)$:
4. Encontrar la ecuación de un plano perpendicular a π que contenga a r.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,1,-1) \\ P_r(1,0,1) \end{array} \right. \quad , \quad P(0,2,3)$$

1.

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,1,-1) \\ \overrightarrow{P_rP} = (-1,2,2) P_r(1,0,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} 2 & -1 & x-1 \\ 1 & 2 & y \\ -1 & 2 & z-1 \end{array} \right| = 0$$

$$\Longrightarrow \pi : 4x - 3y + 5z - 9 = 0$$

2.

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} = (4,-3,5) \\ P_s = P(0,2,3) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \frac{x}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{5}$$

3.

$$\pi' : 4x - 3y + 5z + \lambda = 0, \;\; P'(1,1,1) \Longrightarrow 4 - 3 + 5 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -6 \Longrightarrow$$

$$\pi' : 4x - 3y + 5z - 6 = 0$$

4.

$$\pi'' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (4,-3,5) \\ \overrightarrow{u_r} = (2,1,-1) P_r(1,0,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi'' : \left| \begin{array}{ccc} 4 & 2 & x-1 \\ -3 & 1 & y \\ 5 & -1 & z-1 \end{array} \right| = 0$$

$$\Longrightarrow \pi : x - 7y - 5z + 4 = 0$$

Problema 2 Dado el plano $\pi : x - 2y + z - 4 = 0$, se pide:

1. Encontrar los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados y calcular el volumen del tetraedro que, junto con el origen de coordenadas, delimitan estos puntos.

2. Calcular la altura de este tetraedro sobre la base formada por los puntos calculados anteriormente.

Solución:

1. Corte con el eje OX: Hacemos $y = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow A(4, 0, 0)$

   Corte con el eje OY: Hacemos $x = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow B(0, -2, 0)$

   Corte con el eje OZ: Hacemos $x = 0$ y $y = 0 \Longrightarrow A(0, 0, 4)$

   Tendremos los vectores con el origen de coordenadas:

   $$\overrightarrow{OA} = (4, 0, 0), \quad \overrightarrow{OB} = (0, -2, 0), \quad \overrightarrow{OC} = (0, 0, 4)$$

   El volumen será:

   $$V = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}| = \frac{1}{6}|-32| = \frac{16}{3}\ u^3$$

2. Para calcular el área de la base utilizamos los vectores:

   $$\overrightarrow{AB} = (4, 2, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (4, 0, -4)$$

   $$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(-8, 16, -8)| =$$

   $$\frac{8}{2}|(-1, 2, -1)| = 4\sqrt{6}\ u^2$$

   $$V = \frac{1}{3}S \cdot h \Longrightarrow h = \frac{3V}{S} = \frac{2\sqrt{6}}{3}\ u$$

Problema 3 Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (1, \lambda, 3)$, $\overrightarrow{v} = (-1, 0, \lambda)$ y $\overrightarrow{w} = (0, \lambda, 5)$, se pide:

1. Calcular el parámetro λ de forma que estos vectores sean linealmente dependientes.

2. Para $\lambda = 1$, calcular el volumen del paralelepípedo determinado por estos vectores.

3. Calcular el área de la base formada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

4. Calcular la altura del paralelepípedo sobre la base calculada anteriormente.

Solución:

1. $$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 3 \\ -1 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & 5 \end{vmatrix} = 2\lambda - \lambda^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 0, \ \ \lambda = 2$$

   Si $\lambda = 0$ o $\lambda = 2 \Longrightarrow$ los tres vectores son linealmente dependientes.

   Si $\lambda = 0$ y $\lambda = 2 \Longrightarrow$ los tres vectores son linealmente independientes.

2. Para $\lambda = 1$ tenemos los vectores:

   $$\overrightarrow{u} = (1,1,3), \ \ \overrightarrow{v} = (-1,0,1), \ \ \overrightarrow{w} = (0,1,5)$$

   $$V = |\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}| = 1 \ u^3$$

3. El área de la base:

   $$S = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}| = |(1,-4,1)| = 3\sqrt{2} \ u^2$$

4. $$V = S \cdot h \Longrightarrow h = \frac{V}{S} = \frac{\sqrt{2}}{6} \ u$$

Problema 4 Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (2\lambda, -1, 5)$, $\overrightarrow{v} = (1, 2, -3\lambda)$, calcular el valor del parámetro λ para el que los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son perpendiculares.

Solución:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Longrightarrow 2\lambda - 2 - 15\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{2}{13}$$