Problema 1 *(2 puntos).* Dada la recta r definida por

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$$

1. Halla la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a r.

2. Halla la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular r.

Solución:

1. $$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,3,1) \\ P_r(1,-1,2) \end{array} \right. \quad O(0,0,0) \Longrightarrow \overrightarrow{OP_r} = (1,-1,2) \Longrightarrow$$

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,3,1) \\ \overrightarrow{OP_r} = (1,-1,2) \\ O(0,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & x \\ 3 & -1 & y \\ 1 & 2 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : 7x - 3y - 5z = 0$$

2. $\pi' : 2x + 3y + z + \lambda = 0$ y como pasa por el origen $0 + 0 + 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$, luego el plano buscado es $\pi' : 2x + 3y + z = 0$

Andalucía (Junio 2008)

Problema 2 *(2 puntos).* Dados los puntos $A(1,1,1)$, $B(1+\lambda, 2, 1-\lambda)$ y $C(1+\lambda, 1+\lambda, 2+\lambda)$, donde $\lambda \in R$.

1. Prueba que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ forman un ángulo de 90º, independientemente del valor de λ.

2. Determina los valores de λ, para los que la longitud de la hipotenusa del triángulo A, B y C sea igual a 3.

Solución:

1. Tenemos $\overrightarrow{AB} = (\lambda, 1, -\lambda)$ y $\overrightarrow{AC} = (\lambda, \lambda, 1+\lambda)$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \lambda^2 + \lambda - \lambda - \lambda^2 = 0 \Longrightarrow \alpha = 90^{\circ}$$

2. La hipotenusa vale $|\overrightarrow{BC}| = |(0, \lambda-1, 1+2\lambda)| = \sqrt{(\lambda-1)^2 + (1+2\lambda)^2} = 3 \Longrightarrow \lambda = -7/5$ y $\lambda = 1$.

Castilla La Mancha (Junio 2008)

Problema 3 *(3 puntos).* Dadas las rectas

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1} \quad s: \frac{x-1}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z+5}{3}$$

y el punto $P(1,1,-1)$, encontrar la recta que pasando por P corte a r y a s.

Solución:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,-1) \\ P_r(2,-1,0) \end{array} \right. \quad s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,2,3) \\ P_s(1,-7,-5) \end{array} \right. \quad P(1,1,-1)$$

$$\pi_1: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,-1) \\ \overrightarrow{P_rP} = (-1,2,-1) \\ P_r(2,-1,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1: \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & x-2 \\ 2 & 2 & y+1 \\ -1 & -1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi_1: y+2z+1=0$$

$$\pi_2: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,2,3) \\ \overrightarrow{P_sP} = (0,8,4) \\ P_s(1,-7,-5) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_2: \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & x-1 \\ 2 & 8 & y+7 \\ 3 & 4 & z+5 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi_2: 4x+y-2z-7=0$$

La recta t que buscamos es la definida como corte de dos planos:

$$t: \left\{ \begin{array}{c} y+2z+1=0 \\ 4x+y-2z-7=0 \end{array} \right.$$

Cataluña (Junio 2008)

Problema 4 *(3 puntos).* Dadas las rectas

$$r: \left\{ \begin{array}{c} y+z=0 \\ x-2y-1=0 \end{array} \right. \quad s: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-1}$$

Se pide:

1. Obtener, razonadamente, la ecuaciones paramétricas de r y s.
2. Explicar de un modo razonado cuál es la posición relativa de las rectas r y s.
3. Calcular la distancia entre las rectas r y s.

Solución:

1.

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,1,-1) \\ P_r(1,0,0) \end{array} \right. \quad s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2,1,-1) \\ P_s(0,1,3) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$r: \left\{ \begin{array}{l} x = 1+2\lambda \\ y = \lambda \\ y = -\lambda \end{array} \right. \quad s: \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 1+\lambda \\ y = 3-\lambda \end{array} \right.$$

2. Calculamos $\overrightarrow{P_sP_r} = (1, -1, -3)$ y tenemos: Rango$(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_sP_r}) = 2$ y Rango$(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}) = 1 \Longrightarrow$ luego las rectas son paralelas.

3.
$$|\overrightarrow{u_s} \times \overrightarrow{P_sP_r}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}| = |(4, -5, 3)| = \sqrt{50}$$

$$d(r, s) = d(P_r, s) = \frac{|\overrightarrow{u_s} \times \overrightarrow{P_sP_r}|}{|\overrightarrow{u_s}|} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

Comunidad Valenciana (Junio 2008)