

Problema 1 Dadas las retas:

$$r : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-1} \quad y \quad s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Se pide:

1. Estudiar la posición que ocupan.
2. Calcular la distancia mínima que las separa, si procede.
3. Encontrar una recta que las corte y sea perpendicular a ambas.
4. Si $P(2, 3, 1)$ encontrar una recta que pasando por P corte a las dos rectas.

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, -1) \\ P_r(-1, 1, -2) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 1, 2) \\ P_s(1, 0, 0) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_s P_r} = (-2, 1, -2)$$

1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -13 \neq 0 \implies \text{se cruzan}$$

2.

$$|[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s}]| = 13; \quad |\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = |(3, -5, 1)| = \sqrt{35}$$

$$d = \frac{13}{\sqrt{35}} = \frac{13\sqrt{35}}{35} u$$

3. $\vec{u}_t = (3, -5, 1)$

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_t \\ \vec{u}_r \\ P_r \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 2 & 3 & x+1 \\ 1 & -5 & y-1 \\ -1 & 1 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \implies 4x + 5y + 13z + 25 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_t \\ \vec{u}_s \\ P_s \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ 2 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 3x - 5y + z - 3 = 0$$

$$t : \begin{cases} 4x + 5y + 13z + 25 = 0 \\ 3x - 5y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

4. Tenemos $P(2, 3, 1)$, $\overrightarrow{P_r P} = (3, 2, 3)$ y $\overrightarrow{P_s P} = (1, 3, 1)$

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{P_r P} \\ \vec{u}_r \\ P \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 3 & 2 & x-2 \\ 2 & 1 & y-3 \\ 3 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies 5x - 9y + z + 16 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{P_s P} \\ \vec{u}_s \\ P_s \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ 3 & 1 & y \\ 1 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \implies 5x - y - 2z - 5 = 0$$

$$h : \begin{cases} 5x - 9y + z + 16 = 0 \\ 5x - y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

Problema 2 Sean los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, 3)$ y $C(3, 2, 2)$. Se pide:

1. Calcular la ecuación del plano π que los contiene.
2. ¿El punto $D(2, 1, 3)$ es coplanario con los puntos A , B y C ?
3. Encontrar un recta r perpendicular al plano determinado por los puntos A , B y C y que pase por $O(0, 0, 0)$. Expresarla en su forma continua.

Solución:

1.

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 0, 2) \\ \overrightarrow{AC} = (2, 1, 1) \\ A(1, 1, 1) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies 2x - 3y - z + 2 = 0$$

2. Sustituyendo el punto D en el plano π comprobamos:

$$4 - 3 - 3 + 2 = 0 \implies D \text{ es un punto del plano } \pi \text{ y, por tanto, coplanario con } A, B \text{ y } C.$$

3.

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, -3, -1) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \implies r : \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-1}$$

Problema 3 Sean los vectores $\vec{u} = (m, 2, -m)$, $\vec{v} = (-m, 1, 2)$ y $\vec{w} = (0, 3, m)$. Calcular el parámetro m de manera que los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} sean linealmente dependientes.

Si $m = -1$ encontrar una combinación lineal de vectores con los anteriores

vectores que nos proporcione el vector $\vec{t} = (3, 1, -2)$.

Solución:

$$\begin{vmatrix} m & 2 & -m \\ -m & 1 & 2 \\ 0 & 3 & m \end{vmatrix} = 6m(m-1) = 0 \implies m = 0, m = 1$$

Los tres vectores son linealmente dependientes cuando $m = 0$ o $m = 1$.

Cuando $m = -1$ los tres vectores son linealmente independientes y $\vec{u} = (-1, 2, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 2)$ y $\vec{w} = (0, 3, -1)$:

$$(3, 1, -2) = a(-1, 2, 1) + b(1, 1, 2) + c(0, 3, -1) \implies \begin{cases} -a + b = 3 \\ 2a + b + 3c = 1 \\ a + 2b - c = -2 \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} a = -13/6 \\ b = 5/6 \\ c = 3/2 \end{cases} \implies \vec{t} = -\frac{13}{6}\vec{u} + \frac{5}{6}\vec{v} + \frac{3}{2}\vec{w}$$