Problema 1 Se pide:

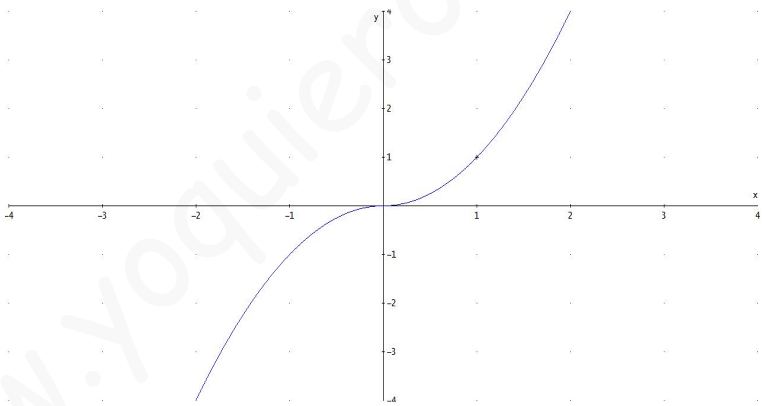
1. Exprese $f(x) = x|x|$ como una función definida por a trozos y dibuje su gráfica de forma aproximada.
2. Calcule la integral definida $\displaystyle\int_{-1}^{1} x|x|\,dx$
3. Calcule el área del recinto plano limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX, la recta $x = -1$ y la recta $x = 1$.

Extremadura (Junio 2009)

Solución:

1.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$



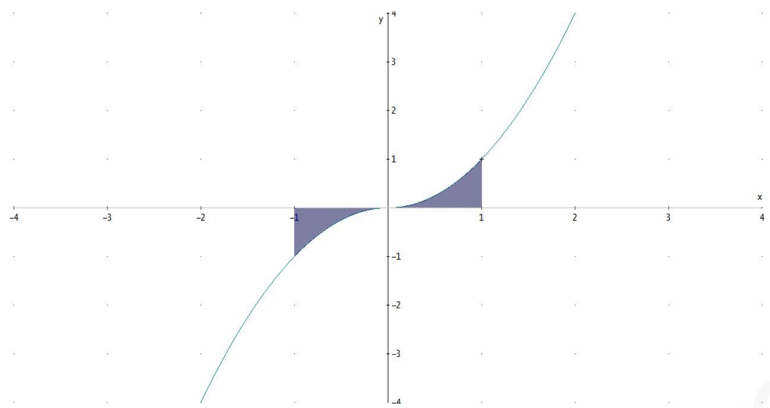
2.

$$\int_{-1}^{1} x|x|\,dx = \int_{-1}^{0} (-x^2)\,dx + \int_{0}^{1} (x^2)\,dx = -\frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{0} + \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{0} =$$

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

3. El área será el siguiente:

$$Área = \left|-\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3}\,u^2$$



Problema 2 Dadas la curva: $f(x) = \dfrac{(x-2)^3}{x^2}$, calcule:

1. Dominio de f.
2. Puntos de corte.
3. Signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Monotonía y extremos relativos.
7. Curvatura y puntos de inflexión.
8. Representación gráfica.
9. Calcular las posibles rectas tangentes a f que sean paralelas a la recta $y = x + 1$
10. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$.
11. Calcular el área del recinto limitado por la curva el eje de abcisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

1. Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{0\}$
2. Puntos de Corte
   - Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow (x-2)^3 = 0 \Longrightarrow x = 2 \Longrightarrow (2, 0)$.

- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow$ No hay.

3. $f(-x) \neq f(x) \Longrightarrow$ No es PAR.

   $f(-x) \neq -f(x) \Longrightarrow$ No es IMPAR.

4. Asíntotas:

   - **Verticales:** $x = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{(x-2)^3}{x^2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{(x-2)^3}{x^2} = \left[\frac{-4}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{(x-2)^3}{x^2} = \left[\frac{-4}{0^+}\right] = -\infty$$

   - **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{(x-2)^3}{x^2} = \infty$$

   - **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{(x-2)^3}{x^3} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2} - x\right) = -6$$

$$y = x - 6$$

5.

$$f'(x) = \frac{(x+4)(x-2)^2}{x^3} = 0 \Longrightarrow x = -4, \ \ x = 2$$

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece	decrece	crece

Crece: $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

Decrece: $(-4, 0)$

La función tiene un máximo en el punto $(-4, -27/2)$, en el punto donde $x = 2$ la función pasa de crecer a crecer, luego no es ni máximo ni mínimo, y en el punto $x = 0$ hay una asíntotata, luego tampoco puede ser ni máximo ni mínimo.

6.

$$f''(x) = \frac{24(x-2)}{x^4} = 0 \Longrightarrow x = 2$$

Como el denominador es siempre positivo, bastará con estudiar el numerador

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
y''	$-$	$+$
y	convexa	cóncava

Convexa: $(-\infty, 0) \cup (0, 2)$

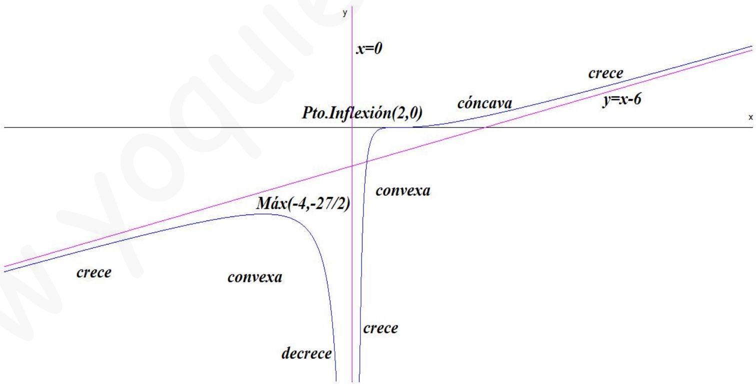
Cóncava: $(2, +\infty)$

En el punto $(2, 0)$ la gráfica pasa de ser convexa a ser cóncava y hay continuidad en ese punto, por lo que estamos ante un punto de inflexión.
Por el criterio de la tercera derivada sería

$$f'''(x) = \frac{24(8-3x)}{x^5} \Longrightarrow f'''(2) = \frac{3}{2} \neq 0$$

Luego en $x = 2$ hay un punto de inflexión.

7. Representación



8.

$$m = f'(a) \Longrightarrow 1 = \frac{(a+4)(a-2)^2}{a^3} \Longrightarrow a = \frac{4}{3}$$

Si $a = \dfrac{4}{3}$ tenemos:

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{6} \Longrightarrow y + \frac{1}{6} = \left(x - \frac{4}{3}\right) \Longrightarrow 2x - 2y - 3 = 0$$

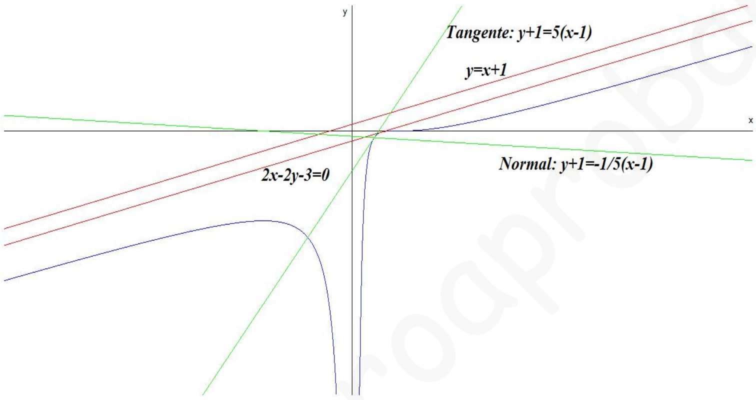
9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$:

   Como $f(1) = -1$ las rectas pasan por el punto $(1, -1)$.

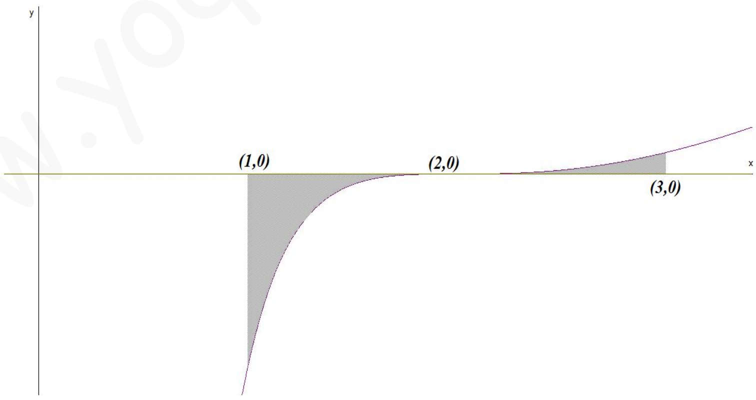
   Como $m = f'(1) = 5$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \ y + 1 = 5(x - 1)$$

$$\text{Recta Normal}: \ y + 1 = -\frac{1}{5}(x - 1)$$



10. En el intervalo $[1, 3]$ hay un punto de corte de la función con el eje de abcisas en $x = 2$ y, por tanto, tendremos que integrar entre $[1, 2]$, que saldrá un valor negativo y entre $[2, 3]$ donde saldrá positiva.



$$F(x) = \int \frac{(x-2)^3}{x^2}\,dx = \int \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2}\,dx =$$

$$= \int \left(x - 6 + \frac{12}{x} - \frac{8}{x^2}\right)\,dx = \frac{x^2}{2} - 6x + 12\ln|x| + \frac{8}{x} + C$$

$$\acute{A}rea = |F(2) - F(1)| + |F(3) - F(2)| = \left| -\frac{17}{2} + 12\ln 2 \right| + \left| -\frac{29}{6} + 12\ln\left(\frac{3}{2}\right) \right| =$$

$$\frac{11}{3} + 12\ln\left(\frac{3}{4}\right) = 0,2144817972\ u^2$$