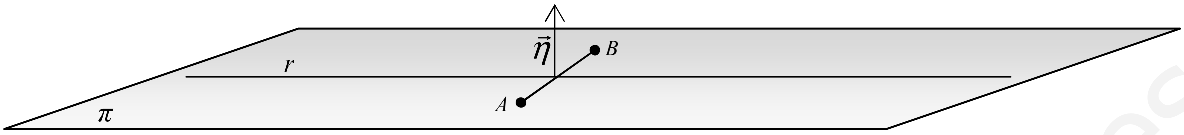
Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Los puntos $A=(1,0,-2)$ y $B=(-5,0,0)$ pertenecen al plano $\pi \equiv x-2y+3z+5=0$. Halla las ecuaciones de la recta contenida en π que es mediatriz del segmento AB.

Solución:



$A(1,0,-2)$, $B(-5,0,0)$, $\pi \equiv x-2y+3z+5=0$

La mediatriz del segmento AB, que está contenida en el plano π, es una recta perpendicular al segmento y al vector normal al plano, $\vec{\eta}=(1,-2,3)$.

$\overrightarrow{AB}=(-6,0,2)$, *un vector con la misma dirección que* $\overrightarrow{AB}$ *es* $\vec{u}=(-3,0,1)$

El vector director de la mediatriz r será $\vec{v}=\vec{u}\wedge\vec{\eta}=\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=2\vec{e}_1+10\vec{e}_2+6\vec{e}_3 \Rightarrow \vec{v}=(2,10,6)$

La recta pedida será: $r\equiv\begin{cases} \text{pasa por el punto medio del segmento } AB,\ M(-2,0,1) \\ \text{tiene la dirección del vector } \vec{v}=(2,10,6), \text{ o de } \vec{w}=(1,5,3) \end{cases} \Rightarrow r\equiv\begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=5\lambda \\ z=-1+3\lambda \end{cases}$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Halla el valor del parámetro a para que los tres planos $\pi_1 \equiv x+y+az=1$, $\pi_2 \equiv ax+y+z=1$, $\pi_3 \equiv 2x+y+z=a$, tengan una recta en común y calcula el punto simétrico de $P(1,0,-2)$ respecto de dicha recta.

Solución:

Para que los tres planos tengan una recta en común es necesario que el sistema formado por las tres ecuaciones sea compatible indeterminado con $rang A = rang \bar{A} = 2$

$$\begin{cases} x+y+az=1 \\ ax+y+z=1 \\ 2x+y+z=a \end{cases} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ como } rang A=2 \Rightarrow |A|=0 \ ; \ |A|=a^2-3a+2 \ , \ a^2-3a+2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=2 \end{cases}$$

$$Si\ a=2 \Rightarrow \bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \ y \text{ podemos encontrar } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \text{ con lo que tenemos que } rang\bar{A}=3$$

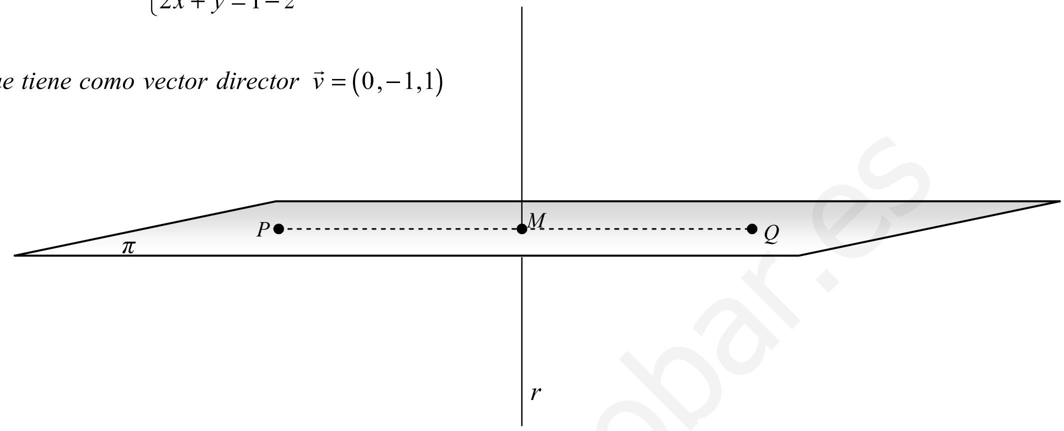
y el sistema es incompatible $\Rightarrow$ *los tres planos no tienen una recta común.*

Si $a=1 \Rightarrow \overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\2&1&1&1\end{pmatrix}$, no hay menores de orden 3 distintos de cero y $\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}\neq 0$ con lo que

$rangA=rang\overline{A}=2$ y la recta común será $r\equiv\begin{cases}x+y+z=1\\2x+y+z=1\end{cases}$; si resolvemos el sistema obtendremos las

ecuaciones paramétricas de $r \Rightarrow \begin{cases}x+y=1-z\\2x+y=1-z\end{cases}$, restando las ecuaciones tenemos que $x=0$, $y=1-z$

$\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=0\\y=1-\lambda\\z=\lambda\end{cases}$ que tiene como vector director $\vec{v}=(0,-1,1)$



Para calcular Q, simétrico de P con respecto a r, tomamos un plano π, perpendicular a r y que contiene a P.
La intersección entre r y π será el punto M, punto medio del segmento PQ.
El plano π tiene como vector normal a $\vec{v}=(0,-1,1)$ y contiene a $P(1,0,-2) \Rightarrow \pi\equiv 0\cdot(x-1)-1\cdot(y-0)+1\cdot(z+2)=0$
$\pi\equiv -y+z+2=0$

$$M=r\cap\pi \Rightarrow \begin{cases}\text{como } M \text{ está en } r\text{, es de la forma } M(0,1-\lambda,\lambda)\\ \text{como } M \text{ está en } \pi\text{, verifica su ecuación: } -(1-\lambda)+\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow M\left(0,\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

Ahora $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OQ}=2\cdot\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP} \Rightarrow \overrightarrow{OQ}=2\cdot\left(0,\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)-(1,0,-2) \Rightarrow \overrightarrow{OQ}=(-1,3,1) \Rightarrow Q(-1,3,1)$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Calcula la ecuación de la recta r, que corta a las rectas $r_1\equiv\begin{cases}x=0\\z=1\end{cases}$, $r_2\equiv\begin{cases}x=2z-3\\y=1\end{cases}$, y es paralela a la recta $s\equiv x=-y=z$.

Solución:

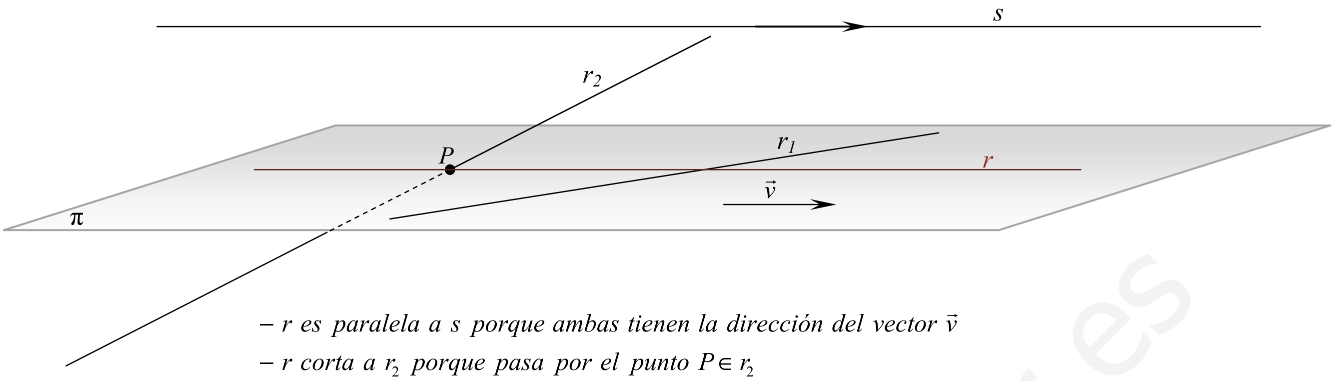
Calculamos un plano π que contiene a r_1 y es paralelo a s:

$$\left.\begin{array}{l} r_1\equiv\begin{cases}x=0\\z=1\end{cases} \Rightarrow r_1\equiv\begin{cases}x=0\\y=\lambda\\z=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}Q(0,0,1)\text{ es un punto de } r_1\\ \vec{u}=(0,1,0)\text{ es un vector con la dirección de } r\end{cases}\\ s\equiv x=-y=z \Rightarrow s\equiv\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1} \Rightarrow \vec{v}=(1,-1,1)\text{ es un vector con la dirección de } s\end{array}\right\} \pi\equiv\begin{vmatrix}x&y&z-1\\0&1&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi\equiv x-z+1=0$$

$r_2\equiv\begin{cases}x=2z-3\\y=1\end{cases} \Rightarrow r_2\equiv\begin{cases}x=-3+2\lambda\\y=1\\z=\lambda\end{cases}$

$$P=r_2\cap\pi \Rightarrow \begin{cases}\text{como } P \text{ está en } r_2 \Rightarrow P \text{ es de la forma } P(-3+2\lambda,1,\lambda)\\ \text{como } P \text{ está en } \pi\text{, verifica su ecuación: } (-3+2\lambda)-\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda=2\end{cases}\text{, entonces } P(1,1,2)$$

$$Ahora\ la\ recta\ pedida\ será\ r \equiv \begin{cases} contiene\ a\ P(1,1,2) \\ tiene\ la\ dirección\ de\ \vec{v} = (1,-1,1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases}$$



$-\ r$ *es paralela a* s *porque ambas tienen la dirección del vector* $\vec{v}$

$-\ r$ *corta a* r_2 *porque pasa por el punto* $P \in r_2$

$-\ r$ *corta a* r_1 *porque ambas están en el plano* π *y no son paralelas*

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera el tetraedro cuyos vértices son $A(1,0,0)$, $B(1,1,1)$, $C(-2,1,0)$ *y* $D(0,1,3)$.

- Hallar el área del triángulo ABC y el volumen del tetraedro $ABCD$.
- Calcular el punto P, contenido en el plano determinado por los puntos A, B y C tal que el segmento PD sea la altura relativa al vértice D
- Hallar la distancia entre las rectas AC y BD.

Solución:

$$A(1,0,0)\ ;\ B(1,1,1)\ ;\ C(-2,1,0)\ ;\ D(0,1,3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (0,1,1)\ ;\ \overrightarrow{AC} = (-3,1,0)\ ;\ \overrightarrow{AD} = (-1,1,3)$$

$$Área\ (del\ triángulo\ ABC) = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{19}}{2} u^2$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-1,-3,3) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{19}$$

$$Volumen\ (tetraedro\ ABCD) = \frac{1}{6} \cdot \left|\left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}\right]\right| = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot |7| = \frac{7}{6} u^3$$

$$\pi\ es\ el\ plano\ determinado\ por\ los\ puntos\ A,\ B\ y\ C \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} contiene\ al\ punto\ A(1,0,0) \\ contiene\ los\ vectores\ \overrightarrow{AB} = (0,1,1)\ y\ \overrightarrow{AC} = (-3,1,0) \end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + 3y - 3z - 1 = 0$$

$$Sea\ r\ la\ recta\ perpendicular\ al\ plano\ \pi\ y\ que\ contiene\ al\ punto\ D \Rightarrow r \equiv \begin{cases} D(0,1,3) \\ \vec{\eta} = (1,3,-3) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1+3\lambda \\ z = 3-3\lambda \end{cases}$$

$$Ahora\ P = r \cap \pi \Rightarrow \begin{cases} P \in r \Rightarrow P(\lambda, 1+3\lambda, 3-3\lambda) \\ P \in \pi \Rightarrow \lambda + 3(1+3\lambda) - 3(3-3\lambda) - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{7}{19} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{7}{19}, \frac{40}{19}, \frac{36}{19}\right)$$

Las rectas AC y BD son rectas que se cruzan. Para calcular la distancia entre ambas, calculamos un plano que contiene a una de ellas y es paralelo a la otra.

$$\text{Tomamos } \pi, \text{ plano que } \begin{cases} \text{contiene a la recta } AC \Rightarrow \begin{cases} \text{contiene al punto } A(1,0,0) \\ \text{tiene la dirección del vector } \overrightarrow{AC} = (-3,1,0) \end{cases} \\ \text{es paralelo a la recta } BD \Rightarrow \text{tiene la dirección del vector } \overrightarrow{BD} = (-1,0,2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$\pi \equiv 2x + 6y + z - 2 = 0$

Ahora la distancia entre las dos rectas será igual a la distancia entre un punto de BD y el plano π

$$d(AC, BD) = d(B, \pi) = \frac{|2\cdot 1 + 6\cdot 1 + 1 - 2|}{\sqrt{2^2 + 6^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{41}} u$$